

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МГД-КАНАЛА
С НЕПРОВОДЯЩИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

И. В. Лавре́йтьев

(Ленинград)

Получены электромагнитные характеристики МГД-канала с изоляционными стенками, двумя достаточно длинными электродами и непроводящими перегородками при произвольном законе распределения магнитного поля вдоль канала. Подробно рассмотрены некоторые частные случаи задания магнитного поля и расположения перегородок.

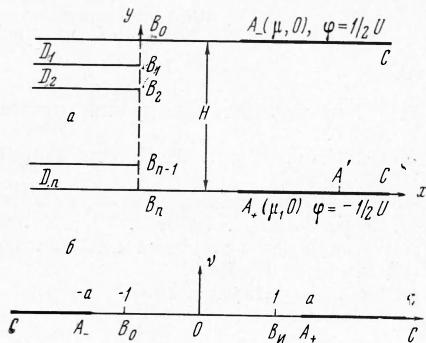
1. Рассмотрим плоский канал $|x| < \infty, 0 < y < H$ с двумя полубесконечными электродами $\mu < x < \infty, y = 0$ и $y = H$. В канал введены $(n - 1)$ бесконечно тонкие непроводящие перегородки, левые концы которых уходят в бесконечность, а координаты правых концов суть $(0, kH/n)$ ($k = 1, \dots, n - 1$) (фиг. 1, а).

Предположим, что электропроводность среды постоянна, распределение скорости задано в виде $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ ($V = \text{const}$), а магнитное поле выражается зависимостью

$$\mathbf{B} = (0, 0, -B(x)) \tag{1.1}$$

$$B(x) = B_0 b(x), b(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

где B_0 — некоторая характерная для задачи величина магнитного поля. Тогда при малых магнитных числах Рейнольдса для определения электрических характеристик канала необходимо решить следующую систему уравнений и граничных условий [1]:



Фиг. 1

$$\begin{aligned} j_x &= -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ j_y &= -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \sigma V B(x), \quad \nabla^2 \Phi = 0 \\ \partial \Phi / \partial x &= 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad \partial \Phi / \partial y = 0 \\ &\text{при } x = -\infty \tag{1.2} \\ \Phi &= 1/2 U \text{ при } y = H, \mu < x < \infty \\ \partial \Phi / \partial y &= U / H \text{ при } x = \infty, \\ \Phi &= -1/2 U \text{ при } y = 0, \mu < x < \infty \\ \partial \Phi / \partial y &= VB(x) \text{ на изоляционных} \\ &\text{стенках и перегородках.} \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{j} — плотность тока, Φ — электрический потенциал, U — напряжение на электродах.

Если теперь ввести аналитическую функцию

$$f(z) = p + iq = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1.3}$$

то задача (1.2) сводится к нахождению этой функции, удовлетворяющей граничным условиям: $q = 0$ на электродах, $p = VB(x)$ на изоляционных перегородках и стенках. Для решения поставленной задачи конформно отображим полосу $|x| < \infty$, $0 < y < H$ с разрезами вдоль перегородок на верхнюю полуплоскость плоскости $t = \tau + iv$ (фиг. 1, б) при помощи формулы [2]

$$z = H/n\pi \ln T_n(t), \quad T_n(t) = 1/2[(t + \sqrt{t^2 - 1})^n + (t - \sqrt{t^2 - 1})^n] \quad (1.4)$$

$T_n(t)$ — полиномы Чебышева. При этом точкам B_k и D_m плоскости z будут соответствовать точки $(\tau_k, 0)$ и $(\tau'_m, 0)$ плоскости t , где

$$\tau_k = \cos \theta_k, \quad \theta_k = -\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, \quad T_n(\tau_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

$$\tau'_m = \cos \theta'_m, \quad \theta'_m = \frac{m\pi}{n}, \quad \frac{dT_n(\tau'_m)}{d\tau} = 0 \quad (m = 1, \dots, n-1)$$

Соответствие остальных точек ясно из фиг. 1, а величина a находится из уравнения

$$T_n(a) = \exp(\mu n \pi / H) \quad (1.6)$$

Аналитическая функция $f(z)$ (1.3) в области комплексного переменного t перейдет в аналитическую функцию

$$f_1(t) = p_1 + iq_1 \quad (1.7)$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} f_1(\tau_k) &= 0, \quad f_1(\infty) = U/H \\ p_1 &= VB(\tau) \text{ на } A_-A_+, \quad -a < \tau < a \\ q_1 &= 0 \text{ на } CA_- \text{ и } A_+C, \quad a < |\tau| < \infty \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, приходим к смешанной краевой задаче для гармонической функции f_1 , причем f_1 должна иметь особенности полюсного типа в точках τ_m , соответствующих концам перегородок, так как в этих точках плотность тока обращается в бесконечность ($q = \infty$, тогда как $p = VB(x)$ остается ограниченной). Точно так же, как это сделано в [3] при выводе формулы Келдыша — Седова, можно показать, что поставленную задачу решает формула

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{VB_0}{i\pi g(t)} \int_{-a}^a \frac{g(\tau)b(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{U}{Hg(t)} + \frac{VB_0}{\Pi(t)} \left(\gamma_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m}{t-\tau'_m} \right) \\ g(t) &= \sqrt{(t-a)/(t+a)}, \quad |\Pi(t)| = \sqrt{(t-a)(t+a)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь рассматривается та ветвь корня, которая положительна на отрезке (a, ∞) . Из условия $f_1(\tau_k) = 0$ следует, что постоянные γ_0, γ_m удовлетворяют системе уравнений

$$\gamma_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m}{\tau_k - \tau'_m} = (J - K)(a + \tau_k) + F_k \quad (1.10)$$

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} b(\vartheta) d\vartheta, \quad F_k = \frac{a \sin \vartheta_k}{\pi} \int_0^{\pi} b(\vartheta) \operatorname{ctg}(\vartheta - \vartheta_k) d\vartheta \quad (1.11)$$

$$K = U/E, \quad E = HB_0V, \quad \cos \vartheta = \tau/a, \quad \cos \vartheta_k = \tau_k/a, \quad b(\vartheta) \equiv b[x(\vartheta)]$$

Здесь K — коэффициент нагрузки. При выводе формулы для F_k использовано тождество

$$\frac{1}{\cos \psi - \cos \chi} = \frac{1}{2 \sin \chi} \left(\operatorname{ctg} \frac{\chi + \psi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\chi - \psi}{2} \right) \quad (1.12)$$

Воспользовавшись симметрией расположения точек τ_k и τ_m относительно $\tau = 0$ (см. (1.5)), а также равенством $F_k(\tau_k) = -F(-\tau_k)$, нетрудно показать, что

$$\gamma_0 = (J - K)a \quad (1.13)$$

2. Для определения электрических характеристик канала необходимо знать срабатываемую в нем электромагнитную мощность и ток, поступающий на электроды. Так как в рассматриваемом случае электроды считаются бесконечно длинными, то эти величины будут также бесконечно велики. С другой стороны, такой канал можно представить как половину канала с конечными (длины 2λ), но очень длинными электродами, ток I на которых равен $I = 2I_\lambda$, где I_λ — ток на часть электрода длины λ рассматриваемого канала (участок A_1A' на фиг. 1, а) при достаточно больших λ/H . Подсчитаем теперь ток I_λ при условии, что $\lambda/H \rightarrow \infty$. Из (1.2), (1.3) и (1.7) имеем

$$\frac{I_\lambda}{\sigma} = \int_{\mu}^{\lambda+\mu} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + VB \right) dx = VB_0 \int_{\mu}^{\lambda+\mu} b(x) dx - \frac{H}{n\pi} \int_a^A p_1(\tau, 0) d \ln T_n(\tau) \quad (2.1)$$

величина A находится из уравнения

$$T_n(A) = \exp [(\lambda + \mu)n\pi / H] \quad (A \rightarrow \infty \text{ при } \lambda/H \rightarrow \infty) \quad (2.2)$$

Из (1.9) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{p_1(\tau, 0)}{B_0V} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\tau + a}{\tau - a} \right)^{1/2} \int_{-a}^a \left(\frac{a - \tau_1}{a + \tau_1} \right)^{1/2} \frac{b(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - \tau} + \\ &+ K \left(\frac{\tau + a}{\tau - a} \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - a^2}} \left(\gamma_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m'}{\tau - \tau_m'} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Формулу (2.3) с учетом (1.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{p_1(\tau, 0)}{B_0V} &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - a^2}} \left[(K - J)\tau + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m'}{\tau - \tau_m'} \right] + \\ &+ \frac{\sqrt{\tau^2 - a^2}}{\pi a} \int_0^\pi \frac{b(\vartheta) d\vartheta}{(\tau/a) - \cos \vartheta} + \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - a^2}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m''}{\tau - \tau_m''} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\gamma_m = \gamma_m' + \gamma_m''$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m'}{\tau_k - \tau_m'} = (J - K)\tau_k \quad (2.5)$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m''}{\tau_k - \tau_m''} = F_k \quad (2.6)$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках в (2.4) можно представить в виде

$$[] = (K - J) \frac{nT_n(\tau)}{T_n'(\tau)} \quad (2.7)$$

Действительно

$$[] = (K - J) M_n(\tau) \prod_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\tau - \tau_m'}$$

где $M_n(\tau)$ — полином степени n , удовлетворяющий согласно (2.5) условию $M_n(\tau_k) = 0$. Следовательно $M_n(\tau) = 2^{1-n} T_n(\tau)$, а так как

$$\frac{dT_n(\tau)}{d\tau} = n2^{n-1} \prod_{m=1}^{n-1} (\tau - \tau_m')$$

то (2.7) доказана.

Подставив (2.4) в (2.1) с учетом (2.7), получим

$$\frac{2I_\lambda}{\sigma E} = \Phi(J - K) - I_1 - I_2 + \frac{2}{H} \int_{\mu}^{\lambda+\mu} b(x) dx \quad (2.8)$$

где

$$I_1 = \frac{2}{n\pi} \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m \int_a^a \frac{d \ln T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m') \sqrt{\tau^2 - a^2}}, \quad \Phi = \frac{2}{\pi} \int_a^A \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - a^2}}$$

$$I_2 = \frac{2}{n\pi^2 a} \int_0^\pi d\theta b(\theta) \int_a^A \frac{\sqrt{\tau^2 - a^2} d \ln T_n(\tau)}{(\tau/a) - \cos \theta}$$

При больших значениях λ/H

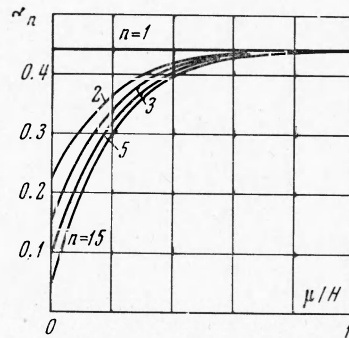
$$\Phi = c + \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{2 \ln 2}{n\pi} + \frac{2\mu}{H} - \frac{2}{\pi} \ln a, \quad c = \frac{2\lambda}{H} \quad (2.9)$$

Здесь c — характеристическое отношение канала, Φ есть величина, обратная безразмерному интегральному сопротивлению канала в случае, когда жидкость покоится, что следует из (2.8), если положить $V = 0$. Зависимость α_n от μ/H , построенная по формуле (2.9), приведена на фиг. 2 при значениях $n = 1, 2, 3, 5, 15$. Рассмотрим теперь интеграл I_1 . Так как

$$d \ln T_n(\tau) = \sum_{k=1}^n \frac{d\tau}{\tau - \tau_k} \quad (2.10)$$

то

$$I_1 = \frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m \int_a^A \frac{d\tau}{(\tau - \tau_m')(\tau - \tau_k) \sqrt{\tau^2 - a^2}} = \frac{2}{n\pi} \sum_{k=1}^n F_k \int_a^A \frac{d\tau}{(\tau - \tau_k) \sqrt{\tau^2 - a^2}}$$



Фиг. 2

Это следует из (2.6) и соотношений

$$\frac{1}{(\tau - \tau_m')(\tau - \tau_k)} = \frac{1}{\tau_m' - \tau_k} \left(\frac{1}{\tau - \tau_m'} - \frac{1}{\tau - \tau_k} \right), \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tau_m' - \tau_k} = 0$$

Взяв интеграл и подставив значение F_k из (1.11), получим

$$I_1 = \frac{2}{n\pi^2} \sum_{k=1}^n (\pi - \vartheta_k) \sin \vartheta_k \int_0^\pi \frac{b(\vartheta) d\vartheta}{\cos \vartheta_k - \cos \vartheta} \quad (2.11)$$

Аналогично для I_2 можно получить выражение

$$I_2 = J\Phi + \frac{2}{n\pi^2} \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{(\pi - \vartheta) \sin \vartheta b(\vartheta) d\vartheta}{\cos \vartheta_k - \cos \vartheta} - \\ - \frac{2}{n\pi^2} \sum_{k=1}^n (\pi - \vartheta_k) \sin \vartheta_k \int_0^\pi \frac{b(\vartheta) d\vartheta}{\cos \vartheta_k - \cos \vartheta} \quad (2.12)$$

Подставляя (2.11) и (2.12) в (2.8) с учетом (1.23), найдем окончательное выражение для тока, снимаемого с электродов

$$\frac{I}{\sigma E} = cG_1 - K\Phi + \beta_1, \quad G_1 = \lambda^{-1} \int_\mu^{\lambda+\mu} b(x) dx \quad (2.13)$$

$$\beta_1 = \frac{4}{n\pi^2} \int_0^a \arcsin \frac{\tau}{a} b(\tau) d \ln T_n(\tau) \quad (2.14)$$

3. Определим теперь срабатываемую в канале электромагнитную мощность

$$P_2 = 2 \int_{-\infty}^{\lambda+\mu} dx \int_0^H dy (\mathbf{B} \times \mathbf{j}) \mathbf{V} = 2\sigma V^2 B_0^2 H \int_{-\infty}^{\lambda+\mu} b^2(x) dx - \\ - 2\sigma V B_0 U \int_\mu^{\lambda+\mu} b(x) dx + 2\sigma V B_0 \int_S b(x) \varphi(x) dx \quad (3.1)$$

Здесь индекс S означает интегрирование по изоляционным стенкам и обеим сторонам перегородок, а $\varphi(x)$ в этом интеграле определяется из соотношения

$$\varphi(x) = -\frac{U}{2} - \frac{H}{n\pi} \int_{\tau(x)}^a q_1(\tau, 0) d \ln T_n(\tau) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), можно получить

$$\int_S b(x) \varphi(x) dx = \frac{H^2 V B_0}{n^2 \pi^2} \int_0^\pi b(\vartheta) J(\vartheta) d \ln T_n(\vartheta) \quad (3.3)$$

где

$$J(\vartheta) = \int_{a \cos \vartheta}^a q_1(\tau, 0) d \ln T_n(\tau)$$

$$\frac{q_1(\tau, 0)}{B_0 V} = \frac{(\tau + a)(J - K)}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} + \frac{\sqrt{a^2 - \tau^2}}{\pi} \int_0^\pi \frac{b(\vartheta) d\vartheta}{\tau - a \cos \vartheta} - \frac{1}{\sqrt{a^2 - \tau^2}} \left(\gamma_0 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\gamma_m}{\tau - \tau_m} \right)$$

Используя (2.5) — (2.7), имеем

$$J(\vartheta) = n(J - K)\vartheta - \sum_{m=1}^{n-1} \gamma_m'' \int_{a \cos \vartheta}^a \frac{d \ln T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m') \sqrt{a^2 - \tau^2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^\vartheta \sin \vartheta d \ln T_n(\vartheta) \int_0^\pi \frac{b(\vartheta') d\vartheta'}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} \quad (3.4)$$

Точно так же, как это было сделано с интегралом I_1 из п. 2, можно показать, что второй член в правой части выражения для $J(\vartheta)$ равен

$$\sum_{k=1}^n \frac{F_k}{a} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta_k}$$

Используя (2.10), последний член в (3.4) совместно с выражением $n\vartheta J$ можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\vartheta d\vartheta \int_0^\pi d\vartheta' b(\vartheta') \sum_{k=1}^n \left[1 + \frac{\sin^2 \vartheta}{(\cos \vartheta - \cos \vartheta')(\cos \vartheta - \cos \vartheta_k)} \right] \quad (3.5)$$

Выражение в квадратной скобке в (3.5) можно представить так:

$$[] = \frac{\sin^2 \vartheta'}{(\cos \vartheta' - \cos \vartheta_k)(\cos \vartheta - \cos \vartheta')} - \frac{\sin^2 \vartheta_k}{(\cos \vartheta' - \cos \vartheta_k)(\cos \vartheta - \cos \vartheta_k)}$$

Тогда (3.5) примет вид

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\vartheta d\vartheta \int_0^\pi \frac{b(\vartheta') \sin \vartheta' d \ln T_n(\vartheta')}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} + \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{a} \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta'}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta_k}$$

Таким образом, для $J(\vartheta)$ получим

$$J(\vartheta) = -nK\vartheta + \frac{1}{\pi} \int_0^\vartheta d\vartheta \int_0^\pi \frac{b(\vartheta') \sin \vartheta' d \ln T_n(\vartheta')}{\cos \vartheta - \cos \vartheta'} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.3) с учетом (1.12), (2.14) и меняя порядок интегрирования, найдем

$$\int_S = -KE^2 \beta_1 - \frac{E^2}{n^2 \pi^3} \int_0^\pi d\vartheta \left[\int_0^\pi b\left(\frac{\vartheta'}{2}\right) d \ln T_n\left(\frac{\vartheta'}{2}\right) \right] \int_0^{2\pi} b\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{2} d \ln T_n\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right)$$

Подставляя это выражение в (3.1), получаем окончательную формулу для срабатываемой мощности

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \sigma E^2 [c (G_2 - KG_1) - K\beta_1 + \beta_2] \\
 G_1 &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mu}^{\lambda+\mu} b(x) dx, \quad G_2 = \frac{1}{\lambda} \int_{\mu}^{\lambda+\mu} b^2(x) dx \\
 \beta_2 &= \frac{2}{H} \int_{-\infty}^{\mu} b^2(x) dx - \\
 &- \frac{2}{n^2 \pi^3} \int_0^{\pi} d\vartheta \left[\int_0^{\frac{\vartheta'}{2}} b\left(\frac{\vartheta'}{2}\right) d \ln T_n \left(\frac{\vartheta'}{2}\right) \right] \int_0^{2\pi} b\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{2} d \ln T_n \left(\frac{\vartheta_1}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что в выражение для β_2 входит особый интеграл с ядром Гильберта. Вычислить этот интеграл для произвольной функции $b(1/2 \vartheta)$ можно, разлагая функцию

$$f(\vartheta) = b\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \frac{d \ln T_n(\vartheta/2)}{d\vartheta}$$

в ряд Фурье. Замечая, что $f(\vartheta)$ нечетная функция ϑ , имеем

$$f(\vartheta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\vartheta, \quad b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} b\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \sin m\vartheta d \ln T_n \left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (3.8)$$

Подставляя разложение (3.8) в (3.7) и производя интегрирование, воспользовавшись соотношением [2]

$$\int_0^{2\pi} \sin m\vartheta' \operatorname{ctg} \frac{\vartheta' - \vartheta}{2} d\vartheta' = 2\pi \cos m\vartheta$$

получим

$$\beta_2 = \frac{2}{H} \int_{-\infty}^{\mu} b^2(x) dx - \frac{8}{n^2 \pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m} \quad (3.9)$$

где

$$C_m = \int_0^{1/2 \pi} b(\vartheta) \sin 2m\vartheta d \ln T_n(\vartheta)$$

В некоторых частных случаях задания магнитного поля $b(x)$ особый интеграл в β_2 может быть вычислен непосредственно (см. 6). Рассмотрим теперь некоторые частные случаи расположения перегородок и распределения магнитного поля за электродами.

4. Если канал не имеет перегородок ($n = 1$), то формулы (2.9), (2.14) и (3.9) принимают вид

$$\begin{aligned}
 \Phi &= c + \frac{2 \ln 2}{\pi}, \quad \beta_1 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{1/2 \pi} b(\psi) \psi \operatorname{ctg} \psi d\psi \\
 b(\psi) &\equiv b[x(\psi)], \quad \sin \psi = \exp(\pi x / H) \\
 \beta_2 &= \frac{2}{H} \int_{-\infty}^{\mu} b^2(x) dx - \frac{8}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^2}{m}, \quad A_m = \int_0^{1/2 \pi} b(\psi) \operatorname{ctg} \psi \sin 2m\psi d\psi
 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Формулы (4.1) совпадают с соответствующими формулами работы [4], полученными отображением верхней полуплоскости $v > 0$ на прямоугольник и последующим решением задачи методом Фурье. Для канала с одной парой перегородок ($n = 2$) формулы для β_1 и β_2 совпадают с соответствующими формулами работы [5].

5. Перегородки введены вплоть до электродной зоны ($\mu = 0$). В этом случае из (2.9) следует, что

$$\Phi = c + \frac{2 \ln 2}{n\pi} \quad (5.1)$$

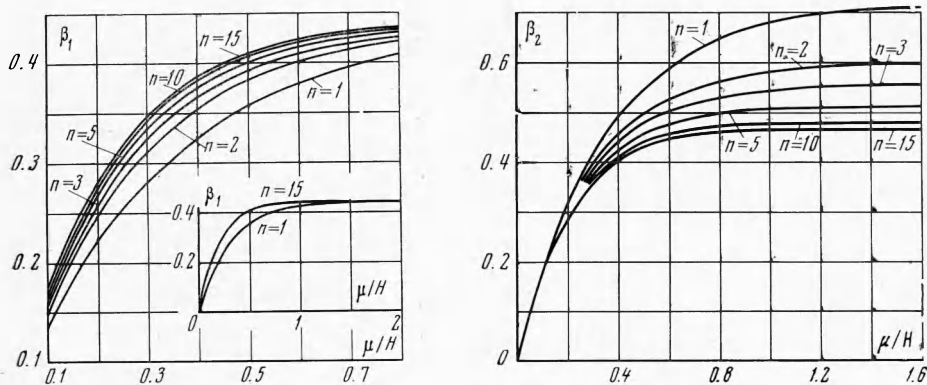
Это совпадает с соответствующим выражением работы [6]. Так как в рассматриваемом случае $b(n\theta)$ имеет период π/n ($T_n(\theta) = \cos n\theta$), то из (2.14) следует:

$$\beta_1 = \frac{4}{n\pi^2} \int_0^{1/2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) b(n\theta) \operatorname{tg}(n\theta) d(n\theta) = \frac{4}{n\pi^2} \int_0^{1/2\pi} b(\psi) \psi \operatorname{ctg} \psi d\psi = \frac{\beta_{10}}{n} \quad (5.2)$$

Аналогично из (3.9)

$$\beta_2 = \beta_{20} / n \quad (5.3)$$

Здесь β_{10} и β_{20} — соответствующие коэффициенты для канала без перегородок ширины H/n . Этот результат очевиден. Действительно, точно так же, как это сделано в [6] для случая $V = 0$, можно показать, что картина распределения электрических полей имеет период H/n по y , и прямые, соединяющие правые концы левых перегородок с левыми концами соответствующих правых перегородок, есть эквипотенциалы, разделяющие весь канал на n одинаковых подканалов ширины H/n , включенных электрически последовательно, откуда и следуют формулы (5.2) и (5.3).



Фиг. 3

6. Рассмотрим в качестве примера простейший случай задания магнитного поля за электродами

$$b(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < \mu \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Из (2.14) после интегрирования по частям получим

$$\beta_1 = \frac{2\mu}{H} - \frac{4}{n\pi^2} \int_0^{\theta} \ln T_n(\vartheta) d\vartheta \quad \left(\theta = \arccos \frac{1}{a} \right) \quad (6.2)$$

Далее, воспользовавшись известными формулами для вычисления предельных значений интеграла типа Коши, из (3.7) получим

$$\beta_2 = \frac{2\mu}{H} \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{a} \right) \beta_1 + \frac{4}{n^2\pi^3} \sqrt{a^2 - 1} \int_0^{\theta} \frac{\ln^2 T_n(\vartheta) d\vartheta}{a^2 \cos^2 \vartheta - 1} + \frac{4}{n^2\pi^3} \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{a} \int_0^{\theta} \frac{\ln T_n(\vartheta) d\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_k} \quad (6.3)$$

На фиг. 3, а, б приведены зависимости коэффициентов β_1 и β_2 от μ / H при различных значениях n , подсчитанные по формулам (6.2) и (6.3).

7. Из формул (6.2) и (6.3) можно получить выражение для джоулевых потерь Q в том случае, когда все стенки канала изоляционные, переходя к пределу при $\mu / H \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow \infty$). При этом

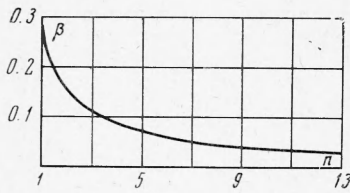
$$Q = \sigma E^2 \beta \quad (7.1)$$

где

$$\beta = \lim_{\mu/H \rightarrow \infty} (\beta_2 - \beta_1) = \frac{4}{n^2 \pi^3} \int_0^1 \frac{\ln^2 T_n(x^{-1}) dx}{1-x^2} - \frac{8}{n^2 \pi^3} \int_0^1 S_n(x) \ln T_n(x^{-1}) dx$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{|\tau_k| \operatorname{Arcth} |\tau_k|^{-1}}{1-x\tau_k} \quad (7.2)$$

Значения τ_k даются формулой (1.5). На фиг. 4 приведена зависимость β от числа перегородок, подсчитанная по формуле (7.2). При больших значениях n ($n > 15$) $\beta = 2 \ln 2 / \pi n$. Заметим, что при $n = 1$ и $n = 2$ (7.2) совпадает с соответствующими выражениями, полученными в работах [7,8], с той лишь разницей, что значение β из (7.2) в два раза больше, чем в [7,8], так как учитывались суммарные потери на входе и выходе из магнитного поля.



Фиг. 4

8. Если постоянное по величине магнитное поле вынесено за электроды на расстояние $\mu + \Delta\mu$, где $\Delta\mu > 1.3 H / n$, а затем спадает по любому закону, то значения коэффициентов β_1 и β_2 определяются следующим образом. Для определения коэффициента β_1 можно считать, что поле постоянно вдоль всего канала; тогда, как показано в [9], выражение для безразмерного тока имеет вид: $(1 - K) \Phi$. Сравнивая это последнее выражение с (1.26), получим, что в рассматриваемом случае $\beta_1 = \Phi - c$. Аналогично определяется и коэффициент

$$\beta_2 = \Phi - c + n\beta_0$$

Здесь β_0 — безразмерные джоулевы потери в подканале ширины H / n с изоляционными стенками в области изменения магнитного поля (на расстоянии $\mu + \Delta\mu$ за электродами), которые можно определить, пользуясь формулами, полученными в [9]. Таким образом, с точки зрения получения максимальной снимаемой мощности и максимального к.п.д. оптимальной будет следующая геометрия канала и магнитного поля $\mu > 1.3 H$, $\Delta\mu > 1.3 H / n$. В этом случае концевые зоны вносят максимальный вклад в снимаемую мощность, а джоулевы потери в зоне неоднородности магнитного поля минимальны¹.

Таким образом, получены следующие выражения для мощности, снимаемой с электродов $P_1 = UI$, срабатываемой в канале электромагнитной мощности P_2 и электромагнитного к.п.д. η

$$P_1 = \sigma E^2 K [cG_1 - K\Phi + \beta_1]$$

$$P_2 = \sigma E^2 [c(G_2 - KG_1) - K\beta_1 + \beta_2]$$

$$\eta = \frac{P_1}{P_2}, \quad K = \frac{\sigma R (cG_1 + \beta_1)}{1 + \sigma R \Phi}$$

¹ Последнее утверждение справедливо только в рамках двумерной теории. Как показано в [11], при учете трехмерного характера задачи возникают дополнительные джоулевы потери, возрастающие с увеличением выноса магнитного поля за электроды, что связано с замыканием токов по пограничному слою в плоскости поперечного сечения канала.

Здесь R — сопротивление нагрузки. Выражения (2.14) и (3.9) для коэффициентов β_1 и β_2 справедливы, строго говоря, для канала с бесконечно длинными электродами, практически же эти формулы можно использовать для подсчета концевых эффектов в каналах с конечными, но достаточно длинными электродами, когда можно пренебречь взаимным влиянием процессов на входе и выходе из канала. Для каналов без перегородок это имеет место уже при $c > 1$ [4], более того, введение в канал перегородок уменьшает масштаб зоны неоднородности электрического поля на входе и выходе из канала, поэтому можно считать, что полученные формулы для β_1 и β_2 заведомо справедливы для каналов с $c > 1$.

В заключение отметим, что все полученные выше формулы справедливы для канала, работающего не только в генераторном режиме, но и в других режимах (насосном, тормозном) [10].

Поступила 10 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. В., Регирер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.
2. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1960.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
4. Sutton G. W., Hurwitz H. Jr., Poritsky E. Electrical and pressure losses in a magnetohydrodynamic channel due to end current loops. Commun. and Electron., 1962, No. 58, pp. 687—695.
5. Лаврентьев И. В. Влияние расположения перегородок на характеристики МГД-канала. Магнитная гидродинамика, 1967, № 4.
6. Ватажин А. В., Немкова Н. Г. Некоторые двумерные задачи о распределении электрического тока в канале магнитогиродинамического генератора с непроводящими перегородками. ПМТФ, 1964, № 2.
7. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогиродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5.
8. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале с диэлектрическими стенками и одной непроводящей перегородкой при течении по нему проводящей среды в неоднородном магнитном поле. ПМТФ, 1964, № 4.
9. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
10. Карасев Б. Г., Лаврентьев И. В. О режимах работы МГД-канала. Магнитная гидродинамика, 1968, № 2.
11. Немкова Н. Г. Исследование поперечных и продольных краевых эффектов при трехмерном течении в канале МГД-генератора с полубесконечными электродами. III Всес. съезд по теорет. и прикл. механ. (аннот. докл.). М., «Наука», 1968.