

## ЛИТЕРАТУРА

1. Комашенко А. П., Нейланд В. Я. Гиперзвуковое обтекание сферы при наличии сильного вдува через ее поверхность.— ДАН УССР, 1969, № 12.
2. Гершбейн Э. А., Тирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах.— В кн.: Научные труды Ин-та механики. № 1. М.: Изд-во МГУ, 1970.
3. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов.— ПММ, 1974, № 6.
4. Гершбейн Э. А. Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981.
5. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
6. Нейланд В. Я. О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

УДК 532.593

## НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Букреев, А. В. Гусев, И. В. Стурова

(Новосибирск)

Выполнено теоретическое и экспериментальное исследование плоских внутренних волн, возникающих на поверхности раздела в двухслойной жидкости при нестационарном поступательном движении погруженного круглого цилиндра. В настоящее время теоретический анализ волнообразования при таком движении плоского тела выполнен лишь для частного случая однородной жидкости [1], а экспериментальные исследования посвящены в основном изучению стационарного движения [2, 3].

В линейной постановке рассмотрим плоскую задачу о волновых течениях, возникающих при движении в верхнем слое двухслойной жидкости диполя, момент которого меняется во времени. Предполагается, что аналогично однородной безграничной жидкости это эквивалентно движению круглого цилиндра радиуса  $R$  со скоростью  $U(t)$  (момент диполя равен  $m(t) = 2\pi R^2 U(t)$  и совпадает с направлением движения цилиндра). Жидкость предполагается невязкой и несжимаемой, состоящей из двух слоев разной плотности:  $\rho_1 (0 < y < H_1)$  и  $\rho_2 = \rho_1(1 + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0 (-H_2 < y < 0)$ . Ось  $y$  направлена вертикально вверх, горизонтальная ось  $x$  совпадает с невозмущенной поверхностью раздела. Предполагается, что в момент времени  $t = 0$  в верхнем слое жидкости в точке  $x = 0$ ,  $y = h$  начинает действовать диполь с переменным моментом  $m(t)$  ( $m(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ) и осью, совпадающей с положительным направлением оси  $x$ , так что траектория его движения имеет вид  $x = c(t)$ ,  $y = h$ .

В каждом слое течение предполагается потенциальным и уравнения движения имеют вид

$$\Delta v_n = -\gamma_n m(t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - c(t)) \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - h)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \text{ при } y = H_1, \\ v_1 &= v_2, \left[ \rho_n \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial y} - g \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right) \right]_2^1 = 0 \text{ при } y = 0, \\ v_2 &= 0 \text{ при } y = -H_2, \quad v_n \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

и начальными условиями

$$v_n = \partial v_n / \partial t = 0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь  $v_n$  — вертикальная компонента скорости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $n = 1, 2$  (индекс 1 относится к верхнему слою, индекс 2 — к ниж-

нему);  $\gamma_1 = 1$ ;  $\gamma_2 = 0$ . Условие «твердой крышки» на свободной поверхности ( $y = H_1$ ) позволяет отфильтровывать поверхностные волны без существенного искажения волн на поверхности раздела и несколько упрощает решение задачи.

Применяя преобразование Фурье и Лапласа

$$\bar{v}_n(k, y, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} v_n(x, y, t) dx$$

для действительных  $k$  и  $\text{Re } s > 0$ , получим для  $\bar{v}_n$  обыкновенные дифференциальные уравнения

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{v}_n'' - k^2 \bar{v}_n &= -\gamma_n \delta'(y - h) P(k, s), \\ \bar{v}_1 &= 0 \text{ при } y = H_1, \\ \bar{v}_1 = \bar{v}_2, s^2 \bar{v}_1' + gk^2 \bar{v}_1 &= (1 + \varepsilon)(s^2 \bar{v}_2' + gk^2 \bar{v}_2) \text{ при } y = 0, \\ \bar{v}_2 &= 0 \text{ при } y = -H_2, \end{aligned}$$

где  $P(k, s) = ik \int_0^{\infty} m(\theta) \exp[-(s\theta + ikc(\theta))] d\theta$ ;

штрих означает дифференцирование по  $y$ .

Основной интерес в данной задаче представляет исследование поведения функции  $\eta(x, t)$ , описывающей возвышение поверхности раздела и удовлетворяющей линеаризованному условию  $\partial\eta/\partial t = v|_{y=0}$ . Из решения системы (1) можно получить выражение для функции  $\bar{\eta}(k, s)$  — двойного образа функции  $\eta$ :

$$\bar{\eta}(k, s) = \frac{\bar{v}(k, 0, s)}{s} = s(\text{ch } kh - \text{th } kH_1 \text{sh } kh) \text{th } kH_2 \cdot P/D,$$

где  $D(s, k) = a(k)s^2 + b(k)$ ,  $a(k) = (1 + \varepsilon) \text{th } kH_1 + \text{th } kH_2$ ,  $b(k) = \varepsilon gk \text{th } kH_1 \text{th } kH_2$ .

Выполнив обратные преобразования Фурье и Лапласа, получим

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{ch } kh - \text{th } kH_1 \text{sh } kh) \text{th } kH_2 e^{ikx} F dk,$$

где  $F = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{sP e^{st}}{D} ds = \frac{ik}{a} \int_0^t m(\theta) \cos[\gamma(t-\theta)] e^{-ikc(\theta)} d\theta$  в силу того,

что  $a, b \geq 0$ ,  $\gamma(k) = \sqrt{b/a}$ .

Окончательное выражение для функции  $\eta$  имеет вид

$$(2) \quad \begin{aligned} \eta(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{a} \text{th } kH_2 (\text{ch } kh - \text{th } kH_1 \text{sh } kh) dk \times \\ &\times \int_0^t m(\theta) \sin[k(x - c(\theta))] \cos[\gamma(t - \theta)] d\theta. \end{aligned}$$

Это выражение значительно упрощается в случае безгранично глубокой жидкости ( $H_1, H_2 \rightarrow \infty$ ):

$$(3) \quad \eta_{\infty}(x, t) = -\frac{1}{\pi(2 + \varepsilon)} \int_0^{\infty} k e^{-kh} dk \int_0^1 m(\theta) \sin[k(x - c(\theta))] \cos[\sqrt{gk}(t - \theta)] d\theta$$

и аналогично решению [1].

Интегрирование по  $\theta$  в (2), (3) можно выполнить аналитически, в частности, для случая равномерного движения цилиндра со скоростью  $U_0$  в течение конечного промежутка времени  $0 < t < T$ . В этом случае

$$\begin{aligned} m(t) &= 2\pi U_0 R^2, \quad c(t) = U_0 t \quad \text{при } 0 < t \leq T, \\ m(t) &\equiv 0, \quad c(t) = U_0 T \quad \text{при } t > T \end{aligned}$$

и внутренний интеграл в (2) примет вид

$$(4) \quad \pi U_0 R^2 (f_1 / (kU_0 + \gamma) + f_2 / (kU_0 - \gamma)),$$

где при  $0 < t < T$

$$f_1 = \cos [k(x - U_0 t)] - \cos (kx + \gamma t), \quad f_2 = \cos [k(x - U_0 t)] - \cos (kx - \gamma t);$$

при  $t > T$

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos [k(x - U_0 T) - \gamma(T - t)] - \cos (kx + \gamma t), \\ f_2 &= \cos [k(x - U_0 T) + \gamma(T - t)] - \cos (kx - \gamma t). \end{aligned}$$

Для проверки применимости приведенной выше теории при расчетах реальных внутренних волн были проведены опыты в непроточном лотке длиной 4,82 м, шириной 0,2 м и высотой 0,6 м, заполненном двумя слоями несмешивающихся жидкостей: водой (плотность  $\rho_2 = 1 \text{ г/см}^3$ , толщина слоя  $H_2 = 30 \text{ см}$ ) и керосином ( $\rho_1 = 0,8 \text{ г/см}^3$ ,  $H_1 = 15 \text{ см}$ ). Волны генерировались цилиндром радиусом  $R = 1,03 \text{ см}$ , который буксировался в верхнем слое на расстоянии  $h < H_1$  от границы раздела. В начальный момент времени цилиндр располагался на расстоянии  $l_0$  от одной из торцевых стенок лотка. Закон движения цилиндра  $c(t)$  регистрировался датчиками реостатного типа. Ниже будет рассматриваться случай нестационарного движения, при котором скорость цилиндра описывается выражением

$$(5) \quad U(t) = \frac{dc}{dt} = \begin{cases} U_0 [1 - \exp(-t/t_1)] & \text{при } 0 < t \leq T, \\ U_0 \exp[-(t-T)/t_2] & \text{при } t > T, \end{cases}$$

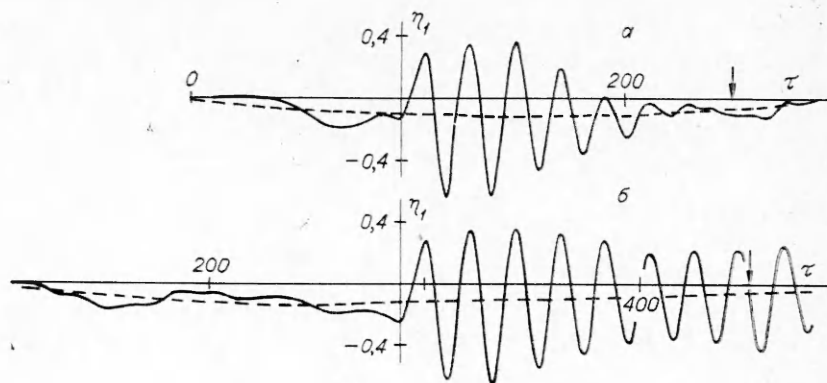
где  $U_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $T$  — постоянные величины.

Для регистрации колебаний границы раздела на нескольких фиксированных расстояниях  $c_*$  устанавливались волномеры, принцип работы которых основан на существенном различии электропроводности воды и керосина\*. Метрологические испытания показали, что они имели линейную статическую калибровочную характеристику, пренебрежимо малый гистерезис, высокую чувствительность (порядка 40 мВ/мм) и пространственно-временную разрешающую способность, с запасом удовлетворяющую требованиям данных опытов. Выходные сигналы волномеров подавались на самописец, а также на специализированную ЭВМ HISTOMAT-S, с помощью которой осуществлялся, в частности, спектральный анализ сигналов.

На границе раздела несмешивающихся жидкостей наряду с рассматриваемыми здесь гравитационными волнами генерируются капиллярные волны, обусловленные поверхностным натяжением. Но в соответствии с оценками, приведенными в [4], в условиях данных опытов капиллярные волны были пренебрежимо малы.

Существенным и, к сожалению, неустранимым различием в условиях проведения опытов и расчетов на основе линейной теории является то, что при расчетах жидкости предполагаются невязкими, а слои — безграничными в направлении оси  $x$ , тогда как в опытах жидкости имели вязкости  $\nu_1 = 0,0162 \text{ см}^2/\text{с}$  (керосин) и  $\nu_2 = 0,0108 \text{ см}^2/\text{с}$  (вода), а лоток — ограниченную длину. Влиянием вязкости обусловлено расхождение экспериментальных и расчетных данных, обсуждаемое ниже. Из-за ограниченности длины лотка имело место отражение волн от торцевых стенок и возникновение сейшеобразных колебаний на больших временах. Это ограни-

\* Волномеры разработаны В. В. Зыковым и Е. И. Хахилевым.



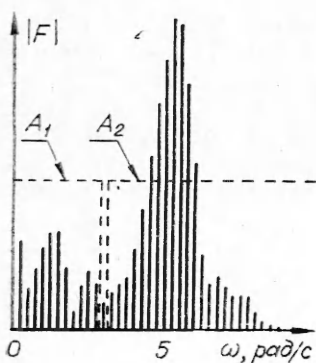
Ф и г. 1

чивало интервал времени, на котором можно было изучать поведение основных мод колебаний границы раздела.

Опыты проводились для ряда значений определяющих параметров задачи. Здесь будут приведены лишь некоторые типичные результаты. На фиг. 1 сплошными линиями показаны записи колебаний границы раздела во времени двумя датчиками, расположенными на расстояниях  $c_* = 1$  м (фиг. 1, а) и  $c_* = 3$  м (фиг. 1, б) от начальной точки движения цилиндра. Значения других параметров задачи для этих двух режимов одинаковы и равны:  $\Lambda = gR/U_0^2 = 2,51$ ,  $h/R = 6$ ,  $\epsilon = 0,25$ ,  $t_1 U_0/R = 3,8$ ,  $t_2 U_0/R = 11,4$ . По оси абсцисс отложено безразмерное время  $\tau = t U_0/R$ , отсчитываемое от начала движения, по оси ординат — безразмерная величина  $\eta_1 = \eta/R$ . При этом ось  $\eta_1$  на каждом из графиков смещена в точку, соответствующую моменту прохода цилиндра над датчиком. Стрелками указаны точки на оси  $\tau$ , соответствующие моменту остановки цилиндра.

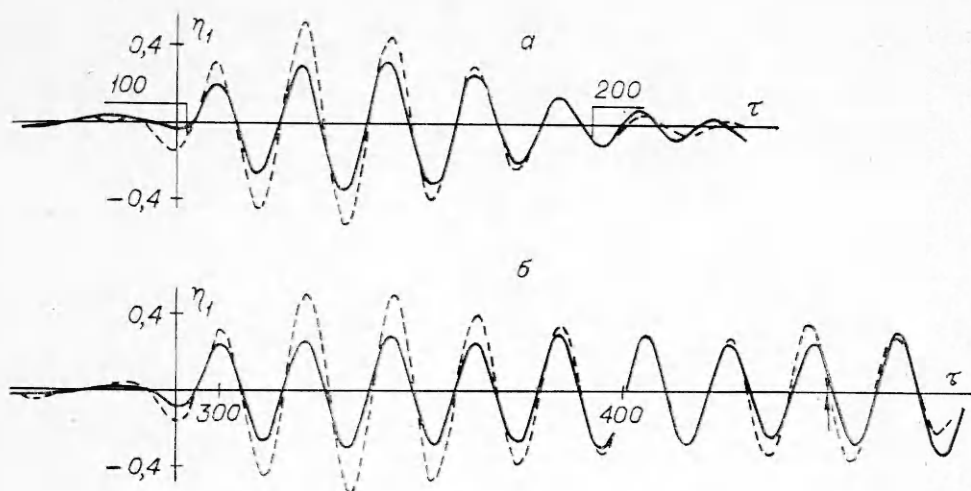
Из фиг. 1 видно, что впереди цилиндра движется волна понижения уровня, скорость распространения переднего фронта которой больше фазовой скорости основного пуга волн (совпадающей со скоростью движения цилиндра при равномерном режиме). К моменту добегания до датчика волна понижения уровня достаточно сильно расплывается, и в записях четко прослеживаются две моды колебаний, которые назовем условно длинноволновой и коротковолновой.

Для разделения упомянутых мод выполнялся спектральный анализ сигнала датчика. Для примера на фиг. 2 приведен модуль дискретного комплексного спектра сигнала  $F(\omega)$ , соответствующего сплошной кривой на фиг. 1, а. Величина  $\omega$ , отложенная на оси абсцисс, есть круговая частота колебаний; по оси ординат масштаб дан в условных единицах. Выделение низких и высоких частот из суммарного сигнала осуществлялось с помощью фильтров, амплитудно-частотные характеристики которых показаны на фиг. 2 линиями  $A_1$  и  $A_2$ .



Ф и г. 2

Длинноволновая и коротковолновая моды находились в результате обратного преобразования Фурье отфильтрованных сигналов. Для рассматриваемого здесь примера длинноволновые моды показаны штриховыми линиями на фиг. 1, а коротковолновые — штриховыми линиями на фиг. 3 (обратим внимание на различие масштабов по оси  $\tau$  на фиг. 1 и 3). Сплошными линиями на фиг. 3 нанесены результаты расчетов на основе приведенной выше линейной теории. При этом интегрирование в (2) производилось численно. Интересно отметить, что при данных значениях толщин слоев  $H_1$  и  $H_2$  расхождение между решениями (2) и



Ф и г. 3

(3) практически отсутствует, так что слои можно было считать бесконечно глубокими.

Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что линейная теория описывает только коротковолновую моду. При этом имеет место хорошее совпадение фазовой картины колебаний и некоторое расхождение по амплитуде.

Расхождение расчетных и экспериментальных данных обусловлено влиянием вязкости и проявляется в разных аспектах. Прежде всего вязкость влияет на картину обтекания тела, приводя к образованию пограничного слоя и следа. При этом в жидкость вносится импульс, равный в стационарном режиме силе сопротивления тела. В нестационарном режиме в дополнение к этому в поток вносится интенсивная начальная завихренность. Все это не улавливается в теории потенциального обтекания тела и приводит к расхождению расчетных и экспериментальных данных в отношении длинноволновой моды и начальной амплитуды коротковолновой моды.

Другой эффект вязкости, проявляющийся в затухании внутренних волн, может быть учтен в рамках линейной теории (по крайней мере в качественном отношении), если в исходных уравнениях сохранить слагаемое с вязкостью. Соответствующие расчеты и их экспериментальная проверка выполнены в работе [4]. Было найдено, что затухание носит экспоненциальный характер, так что введение поправки на этот эффект вязкости сводится к умножению величин  $\eta$  в стационарном случае на множитель  $\exp(-k_1 x)$ , где декремент затухания  $k_1$  зависит от величин  $\varepsilon g / [(2 + \varepsilon) U_0^2]$  и  $v_{1,2}$ , но не зависит от параметра  $h$  и от формы тела.

Обобщая этот результат, можно предложить следующий полуэмпирический способ учета влияния вязкости не только на затухание волн, но и на начальное возмущение: величину  $\eta$ , найденную по линейной теории волн в идеальной жидкости, следует умножить на величину  $a_1 \exp(-k_1 x)$ , где  $a_1$  зависит также и от формы тела. Параметры  $a_1$  и  $k_1$  лучше всего брать по экспериментальным данным. Для графиков фиг. 3 хорошее согласование с экспериментальными данными достигается при  $a_1/R = 2$  и  $k_1 R = 5 \cdot 10^{-3}$ . Для волн, генерируемых движением удобообтекаемого крыла, имеет место существенно меньшее отличие  $a_1/R$  от единицы, т. е. лучшее совпадение с линейной теорией [3]. В нестационарном случае таким способом можно исправить только коротковолновую моду.

С влиянием вязкости связано также появление дрейфовых течений, некоторый перекося границы раздела, частично компенсирующий силу сопротивления, и другие эффекты, которые сказываются на результатах слабее, чем рассмотренные выше. Ими можно объяснить, видимо, неко-

торое нарастание амплитуды коротковолновой моды, проявляющееся при больших  $\tau$  на фиг. 3, б.

В заключение остановимся на вопросе о том, нельзя ли заменить реальный закон движения цилиндра (5) ступенчатым:

$$U(t) = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Этот вопрос анализировался сравнением результатов расчетов по формулам (2), (4). Было найдено, что такая замена приводит при указанных выше значениях параметров  $t_1$  и  $t_2$  лишь к смещению цуга волн как единого целого по оси  $\tau$  на постоянную величину, близкую к  $t_1 U_0 / R$ .

Поступила 9 VII 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
2. Salvesen N. On higher-order wave theory for submerged two-dimensional bodies.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 2.
3. Букреев В. И. Волны на границе раздела двух жидкостей разной плотности, генерируемые движением кругового цилиндра и симметричного крыла.— ПМТФ, 1980, № 1.
4. Бородин Н. И., Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Вязкое затухание внутренних волн, возникающих в двухслойной жидкости при движении цилиндра и крыла.— В кн.: Математические проблемы механики сплошных сред. Вып. 54. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1982.

УДК 66.071.7 : 532.59

### ДИФФУЗИЯ СЛАБОРАСТВОРИМОГО ГАЗА В СТЕКАЮЩИХ ВОЛНОВЫХ ПЛЕНКАХ ЖИДКОСТИ

П. И. Гешев, А. М. Лапин

(Новосибирск)

Пленка жидкости, стекающая по наклонной поверхности, почти всегда покрыта волнами, которые существенно влияют на процессы межфазного переноса. Наиболее явно эффект волн проявляется при абсорбции в пленках слабо растворимых газов. Увеличение коэффициента массоотдачи за счет волн достигает 100% и более [1, 2].

Интенсификация массообмена волнами объясняется в литературе несколькими факторами: увеличением суммарной поверхности раздела фаз из-за волнообразования (не более 1% [1]); разрушением волнами инертного газового слоя, препятствующего абсорбции (но не десорбции [1]); вихревым движением в газовой и жидкой фазах [2]; наличием интенсивных конвективных потоков массы [3, 4] и, наконец, полным перемешиванием во впадинах волн [5].

Так как для слабо растворимых газов основное диффузионное сопротивление сосредоточено в жидкой фазе, процессом диффузии в газе можно пренебречь. Вплоть до чисел Рейнольдса  $Re = 200-400$  в различных экспериментах по визуализации течения в пленках не обнаружено вихревого движения [6, 7], так что интенсификация обусловлена чисто волновым механизмом [1].

В данной работе в приближении тонкого пограничного слоя вблизи свободной поверхности получено точное решение задачи о диффузии к волновой пленке. Показано, что основные факторы, повышающие массообмен в случае двумерных волн, — это, во-первых, приближение поверхностной скорости жидкости на гребнях волн к фазовой скорости, приводящее к интересному явлению диффузионной независимости ячеек жидкости, разделенных гребнями, во-вторых, интенсивные поперечные пульсации скорости.

**Гидродинамика волновой пленки.** При наложении пульсаций расхода на пленке наблюдаются двумерные возбужденные волны [1, 8]. Из экспериментов [1, 8] следует, что в большом диапазоне расходов длина волны намного превосходит среднюю толщину пленки. При этом профиль продольной скорости хорошо аппроксимируется полиномом второй степени [6].

$$(1) \quad u(x, y, t) = \frac{3}{2} V(x, t) \left[ 2 \frac{y}{h(x, t)} - \left( \frac{y}{h(x, t)} \right)^2 \right],$$