

## К РАСЧЕТУ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНАМИ, УСИЛЕННОЙ КЛЕЕКЛЕПАНЫМИ РЕБРАМИ

Широкое внедрение композитных материалов в различных областях техники способствовало быстрому развитию технологии склеивания, усложнению конструкций с клевыми и клеомеханическими соединениями, совершенствованию расчетных моделей, позволяющих оценить их напряженно-деформированное состояние и остаточную прочность. Значительное число исследований, главным образом методом конечных элементов, посвящено анализу напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов типа изотропных или анизотропных пластин с повреждениями (трещинами, пробоями) и приклеенными подкрепляющими элементами (стопорами трещин, ремонтными накладками) (см., например, [1—3] и библиографию к ним). Тем не менее практически отсутствуют работы, касающиеся подобных задач для клеомеханических соединений — клееклепанных или клееболтовых.

В настоящей работе строится общая система интегральных уравнений для упругой прямолинейно-анизотропной полубесконечной пластины, ослабленной системой криволинейных разрезов и подкрепленной приклеенными или клееклепаными ребрами. Предлагается алгоритм численного решения. Приводятся некоторые результаты расчетов, дается сравнение с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим полубесконечную упругую пластину постоянной толщины из прямолинейно-анизотропного материала, имеющую одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластины  $D = \{-\infty < y < \infty, x > 0\}$ . Пластина ослаблена системой сквозных произвольно ориентированных гладких криволинейных разрезов  $L_j = \{t = t^j(\eta) \mid |\eta| < 1\}$  ( $j = \overline{1, k}$ ). Вдоль отрезков  $\Gamma_s$  ( $s = \overline{1, m}$ ), образующих с осью  $x$  углы  $\vartheta_s$  (рис. 1, а), присоединены посредством склеивающего слоя с модулем сдвига  $G_s$  и толщиной  $\Delta_s$ , а также заклепок диаметра  $d$  подкрепляющие элементы (ребра жесткости) (рис. 1, б). Заклепки пронумерованы от 1 до  $N^s$  на каждом ребре. Обозначим через  $q^s$  податливость заклепок,  $t_i^s$  ( $i = \overline{1, N^s}$ ) — координаты центров заклепок. Ограничимся случаем, когда на упругую систему действует внешнее поле нагрузок в пластине, задаваемое напряжениями на бесконечности. К концам  $t^s(-1)$ ,  $t^s(1)$  ребер приложены сосредоточенные силы  $P_1^s \exp[i(\vartheta_s + \pi)]$ ,  $P_2^s \exp[i\vartheta_s]$  соответственно. Берега разрезов свободны от нагрузок. Нормаль  $n$  направим вправо при положительном обходе линий  $L = \bigcup_{j=1}^k L_j$ ,

$$\Gamma = \bigcup_{s=1}^m \Gamma_s.$$

Примем ряд упрощающих допущений [4]. Будем считать, что толщина пластины и размеры поперечного сечения склеивающего слоя и ребра малы в сравнении с длиной  $2\rho_s$  участка соединения  $\Gamma_s$ , пластина находится в обобщенном плоском напряженном состоянии. Ослабление пластины и ребер за счет постановки заклепок не рассматривается.

При прохождении трещины через заклепочное отверстие не учитывается влияние этих отверстий и заклепок, их заполняющих. Возникающая при этом ошибка незначительна, если длина трещины, выходящей на заклепочное отверстие, больше,

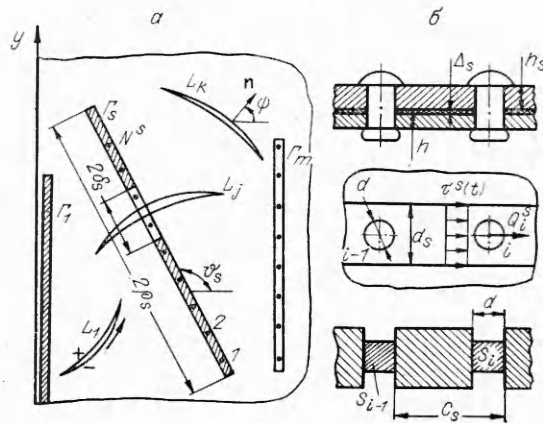


Рис. 1

чем его радиус. Ребра упруго деформируются только вдоль своей оси: изгибная жесткость ребер пренебрежимо мала. Считаем, что ребра непрерывно присоединены к пластине и  $L \cap \Gamma = 0$  (обобщение на случай прохождения трещины под ребром дано ниже). Клей работает на сдвиг, деформации  $\gamma_s(t)$  и напряжения  $\tau^s(t)$  сдвига равномерно распределены по ширине  $d_s$  склейки и являются функциями продольной координаты. Напряжениями отрыва, возникающими в клее, пренебрегаем.

Под заклепочным соединением понимаем любую технологическую операцию или способ точечного крепежа (сварка, клепка, болтовое соединение), когда размер площадки сцепления мал по сравнению с характерными размерами тела и шагом крепежа  $c_s$ . Все заклепки одинаковые. Действие заклепки на пластину моделируется загрузкой ее постоянными касательными усилиями  $\tau_i^s$  ( $i = \overline{1, N^s}$ ,  $s = \overline{1, m}$ ) по квадратной площадке  $S_i$  (см. рис. 1, б) со стороной  $d$ .

Суммарный вектор усилий на каждой заклепке

$$(1.1) \quad Q_i^s = \int_{S_i} \tau_i^s ds = \tau_i^s d^2 \quad (i = \overline{1, N^s}, s = \overline{1, m})$$

и контактные усилия  $r(t) = \{r_s(t) = \tau^s(t)d_s | t \in \Gamma_s, s = \overline{1, m}\}$ , передающиеся от ребер к пластине по линиям  $\Gamma_s$ , будем рассматривать как объемные силы в пластине, совпадающие с ее срединной плоскостью (эффект эксцентриситета не учитывается). Положительное направление для  $Q_i^s$  и  $r_s(t)$  совпадает с направлением вектора  $\exp [i(\vartheta_s + \pi)]$  ( $s = \overline{1, m}$ ).

Напряжения и смещения в анизотропной пластине выражаются через две аналитические функции  $\Phi_\nu(z_\nu)$  ( $\nu = 1, 2$ ) [5]

(1.2)

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2\text{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 (\mu_\nu^2, 1, -\mu_\nu) \Phi_\nu(z_\nu) \right\}, \quad (u, v) = 2 \text{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 (p_\nu, q_\nu) \Phi_\nu(z_\nu) \right\},$$

удовлетворяющие заданной системе приложенных к пластине внешних нагрузок, крайним условиям

$$(1.3) \quad \sigma_x^- |_{x=0} = \tau_{xy}^- |_{x=0} = 0, \quad \tau_n^- - \tau_n^+ = r(t)/h, \quad \sigma_n^- = \sigma_n^+, \quad u^- = u^+, \quad v^- = v^+, \quad t \in \Gamma;$$

$$(1.4) \quad a(t) \Phi_1^\pm(t_1) + b(t) \overline{\Phi_1^\pm(t_1)} + \Phi_2^\pm(t_2) = 0, \quad t \in L,$$

$$a(t) = \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2 M_1(t)}{\mu_2 - \bar{\mu}_2 M_2(t)}, \quad b(t) = \frac{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 \overline{M_1(t)}}{\mu_2 - \bar{\mu}_2 M_2(t)}, \quad M_\nu(t) = \mu_\nu \cos \psi - \sin \psi$$

и условиям совместности смещений ребра и пластины вдоль линии контакта  $\Gamma_s$  в клеевом слое [1, 4]

$$(1.5) \quad w(t^s, \vartheta_s) - w_s(t^s) = \frac{\Delta_s}{G_s a_s} r_s(t^s) \quad (t^s \in \Gamma'_s, \quad s = \overline{1, m})$$

и в точках крепежа  $t_i^s$  [4]

$$(1.6) \quad w(t_i^s, \vartheta_s) - w_s(t_i^s) = q^s Q_i^s \quad (t_i^s \in \Gamma_s'', \quad i = \overline{1, N^s}, \quad s = \overline{1, m}),$$

$$\Gamma_s'' = \bigcup_{i=1}^{N^s} \{|t_i^s - t| \leq d/2\}, \quad \Gamma_s' = \Gamma_s \setminus \Gamma_s''.$$

Здесь  $\varphi_\nu(z_\nu)$  — первообразная для  $\Phi_\nu(z_\nu)$ ;  $\sigma_n^\pm, \tau_n^\pm, u^\pm, v^\pm$  — предельные значения слева и справа напряжений и смещений на  $\Gamma$ ;  $\psi = \psi(t)$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  в точке  $t \in L$  и осью  $x$ ;  $w(t, \vartheta_s)$  — перемещение пластины в точке  $t$  по направлению  $\exp(i\vartheta_s)$ ;  $w_s(t)$  — перемещение ребра с номером  $s$ .

2. С учетом принципа суперпозиции ищем функции  $\Phi_\nu(z_\nu)$ , дающие решение краевой задачи (1.2)–(1.6), в виде

$$(2.1) \quad \Phi_\nu(z_\nu) = \sum_{j=1}^3 \Phi_\nu^j(z_\nu)$$

( $\Phi_\nu^1(z_\nu)$  — решение для неподкрепленной пластины без трещин, удовлетворяющее условиям на краю полуплоскости и на бесконечности, его можно определить с помощью известных методов [5]).

Следуя [4, 6],  $\Phi_\nu^j(z_\nu)$  ( $j = 2, 3$ ) представим в форме обобщенных интегралов Коши, ядрами которых является фундаментальное решение задачи о действии единичной сосредоточенной силы  $\exp(i\varphi)$  в точке  $\tau$  анизотропной пластины [5]:

$$(2.2) \quad \Phi_\nu^2(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{A_\nu(\tau)}{z_\nu - \tau_\nu} + \frac{l_\nu s_\nu \overline{A_1(\tau)}}{s_\nu z_\nu - \bar{\tau}_1} + \frac{n_\nu m_\nu \overline{A_2(\tau)}}{m_\nu z_\nu - \bar{\tau}_2} \right\} r(\tau) ds,$$

$$\Phi_\nu^3(z_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{\omega_\nu(\tau) d\tau_\nu}{\tau_\nu - z_\nu} - \frac{l_\nu s_\nu \overline{\omega_1(\tau) d\bar{\tau}_1}}{\bar{\tau}_1 - s_\nu z_\nu} - \frac{n_\nu m_\nu \overline{\omega_2(\tau) d\bar{\tau}_2}}{\bar{\tau}_2 - m_\nu z_\nu} \right\}.$$

Комплексные функции  $\omega_\nu(t) = \{\omega_{\nu j}(t) | t \in L_j, j = 1, k\}$  и контактные усилия  $r(t) = \{r_s(t) | t \in \Gamma_s, s = 1, m\}$  — основные неизвестные задачи. Постоянные  $A_\nu(t)$  ( $t \in \Gamma_s$ ),  $l_\nu, s_\nu, n_\nu, m_\nu$  определены в [6].

Функции  $\Phi_\nu^j(z_\nu)$  ( $j = 2, 3$ ), выбранные в виде (2.2), автоматически удовлетворяют краевым условиям (1.3) и заданным усилиям на бесконечности.

Учитывая (1.2), (2.1), (2.2), перемещения пластины и ребер можно записать как

$$(2.3) \quad w(t, \vartheta_s) = w^0(t, \vartheta_s) - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^2 T_\nu(\vartheta_s) \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [\omega_\nu(\tau) \ln(\tau_\nu - t_\nu) d\tau_\nu - \right. \right.$$

$$\left. - l_\nu \ln(\bar{\tau}_1 - s_\nu t_\nu) \overline{\omega_1(\tau) d\bar{\tau}_1} - n_\nu \ln(\bar{\tau}_2 - m_\nu t_\nu) \overline{\omega_2(\tau) d\bar{\tau}_2} \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} [A_\nu(\tau) \ln(\tau_\nu - t_\nu) + l_\nu \overline{A_1(\tau) \ln(\bar{\tau}_1 - s_\nu t_\nu)} + n_\nu \overline{A_2(\tau) \ln(\bar{\tau}_2 - m_\nu t_\nu)}] r(\tau) ds \right\},$$

$$w_s(t) = \frac{P_s^1}{F_s E_s} (t + \rho_s) + \int_{-\rho_s}^t \frac{dv}{E_s F_s} \int_v^{\rho_s} r_s(u) du + C_s \quad (s = \overline{1, m}),$$

где  $C_s$  — смещения ребер как твердого целого;  $E_s, F_s$  — модуль Юнга и площадь поперечного сечения ребра  $s$  соответственно;  $w^0(t, \vartheta_s)$  — смещение от действия системы внешних усилий. Значения  $w^0(t, \vartheta_s)$  будем считать известными.

Подставляя (2.1) в краевые условия (1.4), получим

$$(2.4) \quad \int_L \frac{\omega_1(\tau) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \int_L \{k_1(t, \tau) \omega_1(\tau) + k_2(t, \tau) \overline{\omega_1(\tau)}\} ds + \int_{\Gamma} k_3(t, \tau) r(\tau) ds = f_1(t),$$

$$t \in L,$$

$$\omega_2(t) = -a(t) \omega_1(t) - b(t) \overline{\omega_1(t)},$$

$$k_1(t, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \ln \frac{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}{\tau_1 - t_1} \right] + \frac{\overline{b(\tau)} - \overline{b(t)}}{b(t) (\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2)} \frac{d\bar{\tau}_2}{ds} + \frac{\overline{a(t)}}{b(t)} \frac{\bar{l}_1 \bar{s}_1}{\tau_1 - \bar{s}_1 \bar{t}_1} \frac{d\tau_1}{ds} - \right.$$

$$\left. - \frac{\overline{a(t)} a(\tau)}{b(t)} \frac{\bar{n}_1 \bar{m}_1}{\tau_2 - \bar{m}_1 \bar{t}_1} \frac{d\tau_2}{ds} + \frac{b(\tau) n_1 m_1}{\bar{\tau}_2 - m_1 \bar{t}_1} \frac{d\bar{\tau}_2}{ds} + \frac{1}{b(t)} \frac{\bar{l}_2 \bar{s}_2}{\tau_1 - \bar{s}_2 \bar{t}_2} \frac{d\tau_1}{ds} - \frac{a(\tau)}{b(t)} \frac{\bar{n}_2 \bar{m}_2}{\tau_2 - \bar{m}_2 \bar{t}_2} \frac{d\tau_2}{ds} \right\},$$

$$\begin{aligned}
k_2(t, \tau) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overline{a(t)}}{\overline{b(t)}} \frac{d}{ds} \left[ \ln \frac{\overline{\tau_2 - t_2}}{\overline{\tau_1 - t_1}} \right] + \frac{\overline{a(\tau)} - \overline{a(t)}}{\overline{b(t)} (\overline{\tau_2 - t_2})} \frac{d\overline{\tau_2}}{ds} - \frac{\overline{a(t)} \overline{b(\tau)}}{\overline{b(t)}} \frac{n_1 m_1}{\tau_2 - \overline{m_1 t_1}} \frac{d\tau_2}{ds} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{l_1 s_1}{\overline{\tau_1 - s_1 t_1}} \frac{d\overline{\tau_1}}{ds} + \frac{\overline{a(\tau)} n_1 m_1}{\overline{\tau_2 - m_1 t_1}} \frac{d\overline{\tau_2}}{ds} - \frac{\overline{b(\tau)}}{\overline{b(t)}} \frac{\overline{n_2 m_2}}{\tau_2 - \overline{m_2 t_2}} \frac{d\tau_2}{ds} \right\}, \\
k_3(t, \tau) &= R_1(t, \tau) - \frac{\overline{a(t)}}{\overline{b(t)}} \overline{R_1(t, \tau)} - \frac{1}{\overline{b(t)}} \overline{R_2(t, \tau)}, \\
f_1(t) &= -\pi i \left[ \frac{\overline{a(t)}}{\overline{b(t)}} \overline{\Phi_1^0(t_1)} + \overline{\Phi_1^0(t_1)} + \frac{1}{\overline{b(t)}} \overline{\Phi_2^0(t_2)} \right], \\
R_v(t, \tau) &= \frac{A_v(\tau)}{t_v - \tau_v} + \frac{l_v s_v \overline{A_1(\tau)}}{s_v t_v - \overline{\tau_1}} + \frac{n_v m_v \overline{A_2(\tau)}}{m_v t_v - \overline{\tau_2}}.
\end{aligned}$$

К уравнениям (2.4) необходимо присоединить дополнительные ограничения

$$(2.5) \quad \int_L \omega_1(\tau) d\tau_1 = 0,$$

которые следуют из условия однозначности смещений при обходе  $L_j$  ( $j = \overline{1, k}$ ).

Из (1.5), (1.6) с учетом соотношений (1.4), (2.3) имеем

$$(2.6) \quad D_s r_s(t) + \int_{\Gamma} k_4(t, \tau) r(\tau) ds + \int_L \operatorname{Re} \{k_5(t, \tau) \omega_1(\tau)\} ds + C_s = f_2(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\begin{aligned}
k_4(t, \tau) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{v=1}^2 T_v(\vartheta) [A_v(\tau) \ln(\tau_v - t_v) + l_v \overline{A_1(\tau)} \ln(\overline{\tau_1} - s_v t_v) + \right. \\
&\quad \left. + n_v \overline{A_2(\tau)} \ln(\overline{\tau_2} - m_v t_v)] \right\} + k^*(t, \tau),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_5(t, \tau) &= \frac{1}{\pi i} \left\{ T_1(\vartheta) \ln(\tau_1 - t_1) \frac{d\tau_1}{ds} - a(\tau) T_2(\vartheta) \ln(\tau_2 - t_2) \frac{d\tau_2}{ds} - \right. \\
&\quad \left. - \overline{b(\tau)} \overline{T_2(\vartheta)} \ln(\overline{\tau_2} - t_2) \frac{d\overline{\tau_2}}{ds} - \frac{d\tau_1}{ds} \sum_{v=1}^2 \overline{l_v T_v(\vartheta)} \ln(\overline{\tau_1} - s_v t_v) + \right. \\
&\quad \left. + a(\tau) \frac{d\tau_2}{ds} \sum_{v=1}^2 \overline{n_v T_v(\vartheta)} \ln(\overline{\tau_2} - m_v t_v) + \overline{b(\tau)} \frac{d\overline{\tau_2}}{ds} \sum_{v=1}^2 n_v T_v(\vartheta) \ln(\overline{\tau_2} - m_v t_v) \right\},
\end{aligned}$$

$$f_2(t) = w^0(t, \vartheta_s) - \frac{P_s^1}{E_s F_s} (t + \rho_s),$$

$$\begin{aligned}
k^*(t, \tau) &= \delta_{ls} \rho_s (\eta - \xi) [\operatorname{sign}(\xi - \eta) + 1] / (2E_s F_s), \quad \tau = t^l(\eta), \quad t = t^s(\xi) \\
&\quad (l, s = \overline{1, m}),
\end{aligned}$$

$$D_s = \begin{cases} \Delta_s (G_s d_s)^{-1}, & t \in \Gamma'_s, \\ q^s d^2 (d_s)^{-1}, & t \in \Gamma''_s, \quad r(t) = r_s(t^s_i) = \operatorname{const}, \quad t \in \Gamma''_s \end{cases}$$

( $\delta_{ls}$  — символ Кронекера).

Неизвестные постоянные  $C_s$  ( $s = \overline{1, m}$ ) можно определить из условий равновесия  $s$ -го ребра:

$$(2.7) \quad \int_{\Gamma_s} r_s(\tau) ds = P_s^1 - P_s^2 \quad (s = \overline{1, m}).$$

Система интегральных уравнений (2.4), (2.6) совместно с дополнительными условиями (2.5), (2.7) дает однозначное решение поставленной

задачи. Ядра  $k_j(t, \tau)$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) в силу принятых допущений имеют не более чем слабую особенность. Полученная разрешающая система уравнений остается справедливой, если на некотором участке линии  $\Gamma$  отсутствует связь пластины и ребра посредством клея или заклепок, например, вследствие разрушения клея и заклепок из-за приближения трещины и прохождения ее под ребром. При этом образуется зона отслоения, размеры которой можно найти, воспользовавшись, например, критерием равенства сдвиговых деформаций в клее у концов участка отслоения максимальной допускаемой деформации  $\gamma^0$ , определяемой экспериментально [7]. При этом систему (2.4)–(2.7) следует дополнить условием  $r_s(t)/(G_s d_s) = \gamma^0$ ,  $t \in \Gamma$ . Будем считать, что при прохождении трещины под ребром размеры зоны отслоения заданы.

3. Поведение решений системы (2.4)–(2.7) в окрестности особых точек, к которым относятся вершины трещин и концы отрезков склеивания, известно [4, 8, 9]. Поэтому искомые функции  $\omega_{1j}(t)$ ,  $r_s(t)$  можно представить в виде

$$\omega_{1j}(t) = \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = t^j(\beta) \in L_j \quad (|\beta| < 1, \quad j = \overline{1, k}),$$

$$r_s(t) = Q_1^s \frac{(1+\xi)}{2} \left[ \ln \left( \frac{1+\xi}{2} \right) + 1 \right] + Q_2^s \frac{(1-\xi)}{2} \left[ \ln \left( \frac{1-\xi}{2} \right) + 1 \right] + R_s(\xi),$$

$$t = t^s(\xi) \in \Gamma_s \quad (|\xi| \leq 1, \quad s = \overline{1, m}),$$

где  $\Omega_j(\beta)$ ,  $R_s(\xi)$  — непрерывные функции на  $[-1, 1]$ . Постоянные  $Q_1^s$ ,  $Q_2^s$  определяются через  $R_s(-1)$ ,  $R_s(1)$  и параметры жесткости склеивающего слоя и ребра [8].

Приближенное решение системы (2.4)–(2.7) на отрезках  $\Gamma_s$  ( $s = \overline{1, m}$ ) строим методом сплайн-коллокации первого порядка [10]. Для этого введем разбиение отрезков  $\Gamma_s$  ( $s = \overline{1, m}$ ) точками  $\xi_j$  ( $j = \overline{1, N}$ ) и  $\xi_i^s$  ( $i = \overline{1, N^s}$ ) так, что  $t(\xi_j) \in \Gamma'_s$ ,  $t(\xi_i^s) \in \Gamma''_s$ ,  $t_i^s = t(\xi_i^s)$ . На каждом интервале  $[-1; \xi_1^s - d/(2\rho_s)]$ ,  $[\xi_{N^s}^s + d/(2\rho_s); 1]$ ,  $[\xi_i^s + d/(2\rho_s); \xi_{i+1}^s - d/(2\rho_s)]$  ( $i = \overline{1, N^s - 1}$ ), включая и их концы, равномерно расположено одинаковое количество точек  $\xi_j$ . Общее количество точек  $\xi_j$  равно  $N$ . Представим неизвестные функции в виде  $R_s(\xi) = \sum_{h=1}^{N_\Sigma} R_h^s L_s^h(\xi)$ , где  $L_s^h(\xi)$  — функции, непрерывные на  $[-1, 1]$  и линейные на каждом интервале  $[\xi_{j-1}, \xi_j]$  ( $j = \overline{2, N_\Sigma}$ ),  $N_\Sigma = N + N^s$ ,  $L_s^h(\xi) = \delta_{hj}$ .

Обычным образом (см., например, [4, 8]) сводим решение задачи (2.4)–(2.7) к совместному решению системы линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций  $\Omega_j(\beta)$  в узловых точках  $\beta_i = \cos \left( \frac{2i-1}{N_j} \pi \right)$  ( $i = \overline{1, N_j}$ ,  $j = \overline{1, k}$ ) и относительно неизвестных коэффициентов  $R_h^s$ ,  $k = \overline{1, N_\Sigma}$ ,  $s = \overline{1, m}$  (явный вид системы не приводим ввиду громоздкости).

Определив  $\Omega_j(\beta)$ ,  $R_s(\xi)$ , находим согласно (1.2), (2.1) напряжения и перемещения в пластине, а также коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершинах трещин [4]. Данные для изотропной среды получаются путем предельного перехода в параметрах анизотропии ( $\mu_\nu \rightarrow i$ ,  $\mu_1 - \mu_2 \rightarrow 0$ ) [8].

Ниже приводятся результаты расчетов пластины с трещиной и подкрепляющими приклеенными, приклепанными или клееклепанными ребрами. Рис. 2 иллюстрирует влияние угла ориентации  $\varphi$  трещины на КИН  $K_{1,2}(-a)/(\sigma\sqrt{\pi a})$  в неподкрепленной полуплоскости и в полуплоскости с двумя приклеенными ребрами (кривые 1, 2). Расчеты проводились для пластин из боропластика при  $E_1 = 276,1$  ГПа,  $E_2 = 27,61$  ГПа,  $G_{12} = 10,35$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,25$ ,  $h = 2$  мм (сплошные линии) и стеклопластика при  $E_1 = 53,84$  ГПа,  $E_2 = 17,95$  ГПа,  $G_{12} = 8,63$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,25$ ,  $h =$

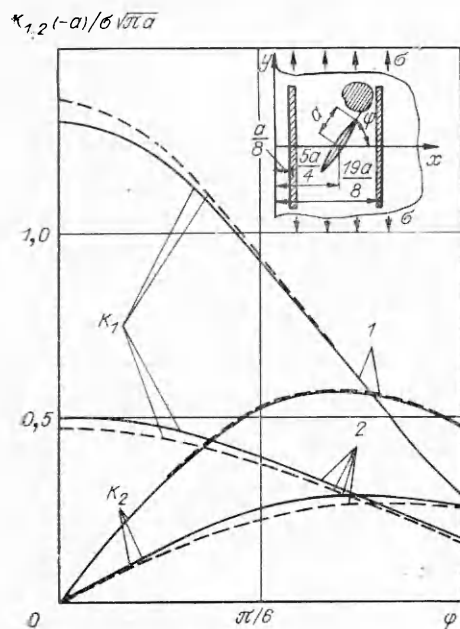


Рис. 2

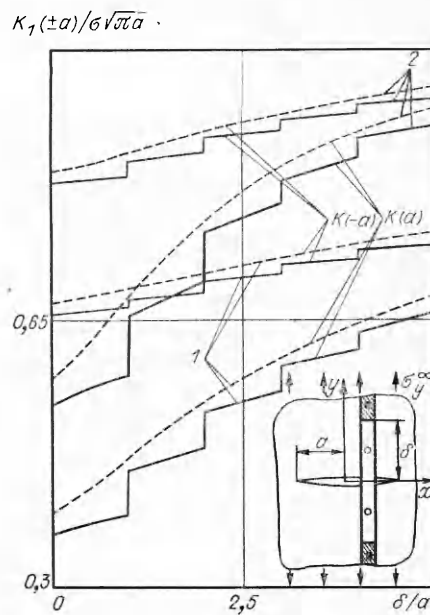


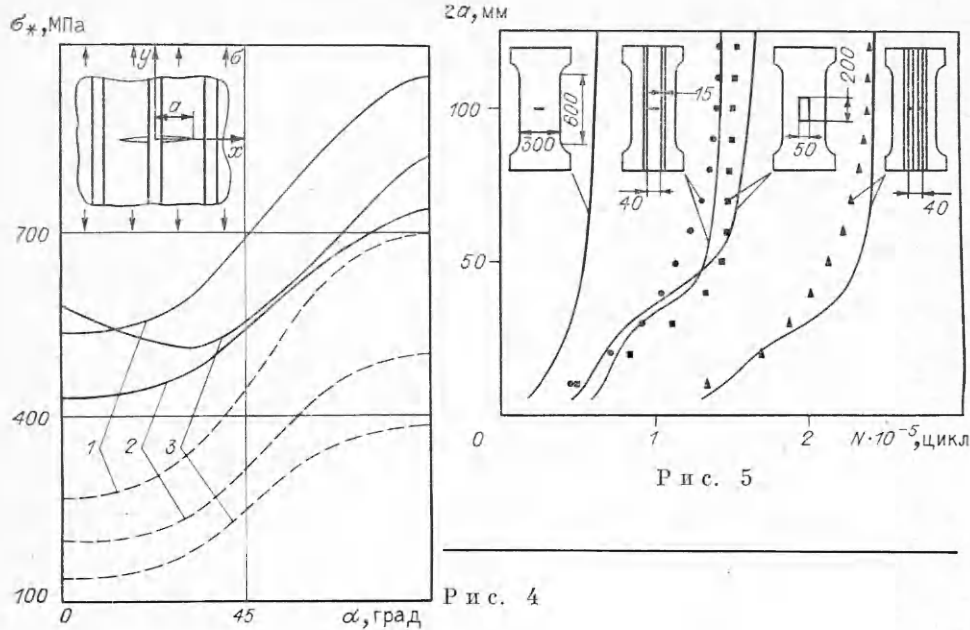
Рис. 3

$= 2$  мм (штриховые). Считалось, что главное направление ортотропии  $E_1$  совпадает с направлением трещины. К пластине приложена растягивающая нагрузка  $\sigma$ , относительная жесткость ребра  $U_s = E_1 h a (E_s F_s)^{-1} = 0,04$ , клевого слоя  $V_s = G_s d_s a (E_1 h \Delta_s)^{-1} = 0,05$ , полудлина ребра  $\rho_s = 10a$ , полудлина отслоения клея  $\delta_s = 0$ .

На рис. 3 демонстрируется влияние длины отслоения клея на КИН для трещины в бесконечной пластине из боропластика, подкрепленной одним клееклепаным ребром, расположенным на расстоянии  $0,5a$  от центра трещины. Задача решалась для следующих исходных параметров: количество заклепок на ребре  $N^s = 18$ ,  $d_s = a/2$ ,  $d = a/6$ , шаг заклепок  $c_s = a$ ,  $h = 1$  мм,  $\varphi = \pi/2$ . Отношение податливостей заклепки и клея  $M_s = q_s d^2 G_s / \Delta_s$  принималось равным нулю (абсолютно жесткая заклепка — сплошные линии) и  $M_s = 10$  (податливая заклепка — штриховые). Кривые 1 — загрузка пластины растягивающими усилиями  $\sigma$ , 2 — приложение одинаковых усилий  $\sigma$  к пластине и концам ребра. Предполагается, что отслоение клея развивается от наиболее нагруженной области вблизи трещины вдоль ребра одинаково в обе стороны. При прохождении границы отслоения через заклепку последняя разрушается, этим объясняются значительные скачки КИН для подкрепления с абсолютно жесткими заклепками и почти незаметные для подкрепления с податливым крепежом.

В таблице дается сравнение результатов, полученных на основе изложенного метода, с данными расчетов заклепочного соединения по бесструктурной асимптотической теории точечных связей [4]. Расчеты проводились для бесконечной изотропной пластины ( $E = 7200$  МПа,  $\nu =$

$x/a$	$K_1(a)/(\sigma\sqrt{\pi a})$					
	Целое ребро			Разрушенное ребро		
	1	2	3	1	2	3
0	0,8911	0,8858	0,60	1,1145	1,1134	0,10
0,5	0,8699	0,8632	0,78	1,1487	1,1482	0,04
1,0	0,9194	0,9180	0,15	1,1558	1,1577	0,16
1,5	0,9753	0,9763	0,10	1,0970	1,0969	0,01
2,0	0,9918	0,9922	0,04	1,0474	1,0460	0,13



$= 0,33$ ,  $h = 2$  мм), ослабленной прямолинейным разрезом  $L = \{|x| < a, y = 0\}$  и подкрепленной приклепанным ребром с параметрами  $U_s = 20$ ,  $V_s = 500$ ,  $\rho_s = 10a$ ,  $d_s = a/2$ ,  $\bar{a} = a/6$ . Количество абсолютно жестких заклепок ( $M_s = 0$ ) на ребре  $N^s = 18$ , шаг заклепок  $c_s = a$ . В таблице представлены значения  $K_1(a)/(\sigma \sqrt{\pi a})$  в зависимости от расстояния  $x/a$  между центром трещины и осью неповрежденного или разрушенного посередине ребра, столбец 1 — результаты настоящего исследования, 2 — расчеты по модели [4]. Для каждой пары значений КИН в столбце 3 приводится величина относительной погрешности в процентах. Как видно из таблицы, результаты расчетов по обеим моделям практически совпадают.

Изложенный выше подход к расчету подкрепленных анизотропных пластин с повреждениями можно применять для оценки влияния подкрепляющего набора на остаточную прочность панелей из слоистых композитных материалов (СКМ). В силу многообразия видов и характера разрушения СКМ существует большое число критериев разрушения слоистых материалов. Воспользуемся деформационным критерием [11], который подтверждается экспериментальными данными для широкого спектра СКМ с различными типами укладок. Критерий основан на предположении, что СКМ с повреждением типа щели разрушается у концов щели, когда величина деформации основных несущих слоев, т. е. слоев, имеющих наименьший угол с направлением приложения нагрузки, достигает своего предельного значения. На рис. 4 изображена зависимость критической нагрузки  $\sigma_*$ , приложенной к пластине, от типа укладки СКМ. Расчеты проводились для бесконечной пластины толщиной  $h = 1$  мм из углепластика с параметрами монослоя  $E_1 = 141$  ГПа,  $E_2 = 9,5$  ГПа,  $G_{12} = 5,2$  ГПа,  $\nu_{12} = 0,31$  для различных укладок  $(0/\pm\alpha/90^\circ)_s$  ( $\alpha$  — угол между осью  $x$  и направлением волокон в монослое). Пластина имеет повреждение типа трещины с полудлиной  $a = 2; 4; 6$  мм (кривые 1—3 соответственно) и подкреплена тремя приклепанными без отслоения ребрами полудлиной 20 мм на расстоянии 5 мм одно от другого. Относительные жесткости ребер и клея  $U_s = 0,4$ ,  $V_s = 0,5$ . Ребра предполагались целыми (сплошные линии) и разорванными посередине (штриховые). Обобщенный параметр вязкости разрушения  $Q_c = \epsilon_1 \sqrt{2\pi r}$  принимался согласно [11] равным  $1,5 \text{ мм}^{-1/2}$  для всех типов укладок. Анализ графиков позволяет сделать вывод, что для неповрежденных ребер критическая нагрузка  $\sigma_*$  несколько увеличивается, когда вершина трещины выходит за

ребро. Для разорванных ребер  $\sigma_*$  уменьшается с ростом длины трещины тем быстрее, чем больше  $\alpha$ .

На рис. 5 представлены результаты расчетно-экспериментального исследования роста усталостной трещины в плоских образцах толщиной 2 мм из алюминиевого сплава Д16АТ при циклическом растяжении ( $\sigma_{\text{брутто}}^{\text{max}} = 10 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\sigma_{\text{брутто}}^{\text{min}} = 1 \text{ кг/мм}^2$ ) в исходном состоянии и с приклеенными по стандартной технологии клеем ВК-9 подкрепляющими элементами: стопорами трещин с размерами поперечного сечения  $15 \times 2$  мм из сплава Д16АТ и широкой накладкой из титанового сплава с размерами поперечного сечения  $50 \times 0,5$  мм. Все образцы имели концентратор напряжений (отверстие диаметром 5 мм в центре образца с иницированными трещинами длиной 1—2 мм). При расчетах по описанной выше модели широкая накладка интерпретировалась как несколько расположенных вплотную друг к другу ребер с эквивалентной жесткостью. Для определения скорости роста трещины в подкрепленных образцах использовались формула Пэриса и эмпирические постоянные, полученные из испытаний исходных образцов. Результаты расчетов показали хорошее совпадение с экспериментальными данными. При длине трещины 100 мм отличие между расчетным и экспериментальным числом циклов нагружения для образцов с двумя стопорами не превышает 2 %, а с тремя — около 4 %. Некоторую завышенность расчетных оценок по сравнению с экспериментальными результатами можно объяснить физической неоднородностью склеивающего слоя (микродфекты), которая не учитывается в расчетах. Различия в характере расчетной кривой и проведенной через экспериментальные точки следуют из принятой при расчете модели контакта по линии. Заметим, что в среднем живучесть по сравнению с исходными образцами возросла у образцов с двумя стопорами в 2,2 раза, с тремя — в 3,7 раза, у образцов с накладкой — в 2,4 раза.

Анализ представленных результатов позволяет сделать вывод о достоверности и надежности развитой методики оценки остаточной прочности и долговечности, а также о высокой эффективности использования приклеенных и клееклепанных подкрепляющих элементов для торможения усталостных трещин.

Авторы благодарят Н. Д. Абдрасилова за помощь в проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bigelow C. A. Nonlinear adhesive behavior effects in a cracked orthotropic sheet stiffened by a semi-infinite orthotropic sheet // *Engng Fract. Mech.*— 1986.— V. 25, N 1.
2. Jones R., Callinan R. J. Analysis of composite laminates and fibre composite repair schemes // *Fibre Sci. and Techn.*— 1981.— V. 15, N 3.
3. Гришин В. П., Берегов Т. К. Коэффициенты интенсивности напряжений в пластине с центральной поперечной трещиной, усиленной накладками из композитного материала // *Механика композит. материалов.*— 1986.— № 4.
4. Максименко В. Н., Павшук В. Н., Хан Ю. Н., Цендровский А. В. Влияние подкрепляющих накладок на развитие трещин у отверстия в конечной анизотропной пластине // *Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек.*— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987.— Т. 2.
5. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: Гостехиздат, 1957.
6. Максименко В. Н. К контактной задаче для анизотропной пластины, подкрепленной ребром жесткости // *Изв. АН СССР. МТТ.*— 1981.— № 1.
7. Свифт Т. Анализ разрушения клеевых панелей с трещинами // *Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д.*— 1978.— Т. 100, № 1.
8. Максименко В. Н., Судаков Н. С. Взаимодействие приклеенного ребра жесткости с пластиной из композитного материала // *Механика композит. материалов.*— 1983.— № 3.
9. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.
10. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.
11. Poe C. S., Jr. A unifying strain criterion for fracture of fibrous composite laminates // *Engng Fract. Mech.*— 1983.— V. 17, N 2.

г. Новосибирск

Поступила 11/Х 1990 г.