

**ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОЙ  
ПЛАЗМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНЬЮ ИОНИЗАЦИИ  
ПРИ ОТСУТСТВИИ ТОКОВ**

**В. М. Сарычев**

(Москва)

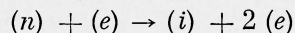
Рассматриваются одномерные течения невязкой термически неравновесной плазмы с переменной степенью ионизации при отсутствии токов. Дается критерий применимости для их описания обычных уравнений газовой динамики. Находится выражение для скорости звука в такой плазме. При некоторых условиях оно переходит в формулу Ньютона для изотермического звука. Находится условие, выполняющееся в критическом сечении канала. Установлено, что течение слабо ионизированной плазмы происходит при постоянной электронной температуре. Подробно исследованы возможные типы течений в цилиндрическом канале.

Дается критерий применимости модели термически равновесной плазмы, а также соотношения, позволяющие полностью рассчитать течение такой плазмы в канале переменного сечения.

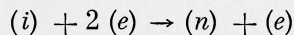
Течения плазмы и при отсутствии в ней токов, вообще говоря, отличаются от течений неионизованного газа. Это отличие связано с идущими в плазме процессами ионизации и рекомбинации. Обычно в этих процессах основную роль играют электроны, поэтому средние энергии (температуры) электронов и тяжелых частиц (атомов и ионов) могут отличаться друг от друга. Если частота неупругих столкновений в плазме мала по сравнению с частотой упругих столкновений, то отличие температур электронной и тяжелой компонент плазмы может быть значительным.

Здесь рассматриваются простейшие случаи одномерных течений плазмы с учетом процессов ионизации и рекомбинации и при отсутствии термического равновесия между ее компонентами.

**1. Исходные предположения и система уравнений.** Рассмотрим в двухжидкостном приближении одномерное установившееся течение невязкой термически неравновесной плазмы. Предполагается, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, а время установления термодинамически равновесного состава плазмы много меньше характерных времен остальных рассматриваемых процессов. Для простоты считается, что плазма образована из одноатомного газа, причем существенной в ней является лишь прямая ионизация электронным ударом



При термодинамическом равновесии этот процесс, в соответствии с принципом детального равновесия, должен уравновешиваться обратным ему процессом рекомбинации



Так как в прямом процессе ионизация происходит за счет энергии электрона, то в обратном процессе освобождающаяся при рекомбинации энергия также передается электрону. При таком характере неупругих процессов в плазме они определяются только электронной температурой. Поэтому, с точки зрения процесса изменения состава плазмы, термически неравновесную плазму в этом случае можно рассматривать как термически равновесную с температурой, равной электронной температуре в неравновесной плазме, а концентрацию в ней определять по уравнению Саха с электронной температурой (см. также [1]).

Система макроскопических уравнений для компонент плазмы в общем случае дана, например, в [2]. Для нашего случая уравнение сохранения числа тяжелых частиц, уравнение Саха и уравнения состояния, движения и энергии для плазмы в целом и отдельно для электронной компоненты можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (nvS) &= 0, & \frac{n_e^2}{n - n_e} &= 2 \frac{g_i}{g_n} \frac{(2\pi m_e k t_e)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{eU_i}{k t_e}\right) \\ P &= nkT & \left( P \equiv p + p_e, T \equiv t + \frac{n_c t_c}{n} \right), & p_e = n_e k t_e \\ mnv \frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx} &= 0, & \frac{dp_e}{dx} &= -en_e E_x \\ \frac{d}{dx} \left[ nvS \left( \frac{mv^2}{2} + \frac{5}{2} kt \right) + n_e v S \left( \frac{5}{2} k t_e + eU_i \right) \right] &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ n_e v S \left( \frac{5}{2} k t_e + eU_i \right) \right] &= -n_e v S e E_x - \delta \frac{m_e n_e S}{m \tau_e} k (t_e - t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $S$  — площадь поперечного сечения канала,  $g_i$  и  $g_n$  — статистические веса квантовых состояний иона и нейтрального атома,  $t$  — температура компоненты плазмы,  $T$  — обобщенная температура,  $U_i$  — потенциал ионизации атома,  $k$  и  $h$  — постоянные Больцмана и Планка,  $P$  — давление плазмы,  $E_x$  — напряженность поля поляризации в плазме,  $\tau_e$  — время релаксации для электронного импульса,  $\delta$  — постоянная  $\sim 1$ .

Переменные без индексов относятся к тяжелой компоненте плазмы, а с индексом  $e$  — к электронам. Диэлектрическая и магнитная проницаемости для плазмы принимаются равными их значениям для вакуума.

Сделаем небольшое замечание о поле поляризации в плазме. Так как инерцией электронов можно пренебречь по сравнению с инерцией тяжелых частиц, то действующие на электроны силы должны взаимно уравновешиваться. Действие градиента давления электронного газа компенсируется полем поляризации, которое возникает вследствие разделения зарядов в начальный неустановившийся период движения.

Если  $dp_e/dx < 0$ , то напряженность поля поляризации  $E_x > 0$ . При движении в этом поле электроны затрачивают, а ионы и, следовательно, вся тяжелая компонента приобретают на единицу объема в секунду энергию  $-v dp_e/dx$ . Если  $dp_e/dx > 0$ , то  $E_x < 0$ , и тяжелая компонента затрачивает, а электроны приобретают указанную выше энергию. В отличие от обмена энергией через парные взаимодействия заряженных частиц, обмен энергией через компенсирующее поле поляризации происходит без диссипации.

**2. Общий анализ уравнений. Скорость звука.** Легко видеть, что уравнения (1.1) переходят в обычные уравнения газовой динамики при

$$n_e/n \equiv \alpha < kt/eU_i \quad (2.1)$$

Здесь  $\alpha$  — степень ионизации плазмы.

Исключая из уравнений (1.1) переменные  $n$ ,  $P$ ,  $p_e$  и  $E_x$  и разрешая полученные уравнения относительно производных, получим

$$(M^2 - M^{*2}) \frac{1}{v} \frac{dv}{d\xi} - \frac{2}{5} \delta \frac{\alpha(\theta - 1)}{1 + \alpha\theta} \left( U + \frac{3}{2} \right) \frac{Z}{\xi} + \frac{M^{*2}}{S} \frac{dS}{d\xi} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (M^2 - M^{*2}) \frac{1}{t} \frac{dt}{d\xi} &= \frac{2}{3} \left[ (M^2 - 1) \xi + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{5} \left( U + \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \alpha\theta} \right) \right] \delta \alpha (\theta - 1) \frac{Z}{\xi} - \frac{2}{3} \frac{M^2}{S} \frac{dS}{d\xi} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(M^2 - M^{*2}) \frac{1}{t_e} \frac{dt_e}{d\zeta} = - (M^2 - M^{*2}) \frac{1}{U} \frac{dU}{d\zeta} = - \left[ \frac{2-\alpha}{1-\alpha} (M^2 - 1) - \frac{2}{5} \frac{\alpha\theta U}{1+\alpha\theta} \right] \delta \frac{\theta-1}{\theta U} \frac{Z}{\xi} - \frac{1}{\xi} \left[ 1 + \frac{7-5\alpha}{2U(1-\alpha)} \right] \frac{M^2}{S} \frac{dS}{d\zeta} \quad (2.4)$$

$$(M^2 - M^{*2}) \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\zeta} = - (M^2 - 1) \left( U + \frac{3}{2} \right) \delta \frac{\theta-1}{\theta U} \frac{Z}{\xi} - \frac{1}{\xi} \frac{M^2}{S} \frac{dS}{d\zeta} \quad (2.5)$$

$$M^2 \equiv \frac{3}{5} \frac{mv^2}{kT}, \quad \theta \equiv \frac{t_e}{t}, \quad U \equiv \frac{eU_i}{kt_e}, \quad \zeta \equiv \frac{x}{L}$$

$$Z \equiv \frac{m_e}{m} \frac{L}{v\tau_e}, \quad \xi \equiv U + 3 + \frac{3}{4} \frac{7-5\alpha}{U(1-\alpha)}, \quad M^{*2} \equiv 1 - \frac{2}{5} \frac{\alpha\theta}{1+\alpha\theta} \frac{U}{\xi}$$

Здесь  $M^2$  — безразмерная переменная, аналогичная числу Маха;  $\theta$  — безразмерная переменная, характеризующая степень термической неравновесности плазмы;  $U$  — безразмерная переменная, обратно пропорциональная электронной температуре;  $\zeta$  — безразмерная координата вдоль оси канала;  $L$  — характерный размер канала;  $Z$  — безразмерная переменная, характеризующая трение между компонентами плазмы;  $M^*$  — критическое значение.

Легко видеть, что критическое значение  $M^2$  всегда находится в интервале от  $3/5$  до 1, т. е. между изотермическим и адиабатическим значениями. Приравнявая  $M^2$  и  $M^{*2}$ , найдем выражение для критической скорости или скорости звука

$$a^2 = \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{\alpha\theta}{1+\alpha\theta} \frac{U}{\xi} \right) \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} = \left[ 1 + \alpha\theta \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{U}{\xi} \right) \right] \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} \quad (2.6)$$

Здесь  $\rho \equiv mn$  — плотность плазмы.

Если  $p_e \ll p$  ( $\alpha\theta \ll 1$ ), то, как и следовало ожидать, скорость звука в плазме совпадает со скоростью звука в обычном газе. В другом предельном случае, когда  $\alpha\theta \gg 1$  и  $U \gg 1$ , формула (2.6) переходит в формулу Ньютона для изотермического звука —  $a^2 = P/\rho$ . Это объясняется тем, что в данном случае давление плазмы определяется давлением электронной компоненты. Но при сделанном предположении о большой скорости установления равновесной концентрации в плазме и при  $U \gg 1$  идущие в плазме процессы ионизации и рекомбинации очень чувствительны к электронной температуре и стабилизируют ее. В остальных случаях величина скорости звука в плазме лежит между изотермическим и адиабатическим значениями.

При  $M^2 = M^{*2}$  правые части уравнений (2.2) — (2.5) одновременно обращаются в нуль при выполнении условия

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{d\zeta} = \frac{2}{5} \frac{\delta}{M^{*2}} \frac{\alpha(\theta-1)}{1+\alpha\theta} \left( U + \frac{3}{2} \right) \frac{Z}{\xi} \quad (2.7)$$

Таким образом, критическое сечение при течении термически неравновесной плазмы располагается не в горле канала, а там, где переменные удовлетворяют условию (2.7).

Если  $t_e > t$ , то критическое сечение располагается в расширяющейся части канала, а если  $t_e < t$  — то в сужающейся части канала.

Для безразмерных переменных  $M^2$  и  $\theta$  получим уравнения

$$(M^2 - M^{*2}) \frac{1}{M^2} \frac{d(M^2)}{d\zeta} = - \frac{2}{3} \left( M^2 + \frac{3}{5} \right) \left( U + \frac{3}{2} \right) \delta \frac{\alpha(\theta-1)}{1+\alpha\theta} \frac{Z}{\xi} + \left[ \frac{5}{3} M^2 \left( M^{*2} - \frac{3}{5} \right) + 2M^{*2} \right] \frac{1}{S} \frac{dS}{d\zeta} \quad (2.8)$$

$$(M^2 - M^{*2}) \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = - \left\{ (M^2 - 1) \left[ \frac{2}{3} d\theta \xi + \frac{2 - \alpha}{U(1 - \alpha)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \alpha \theta U \right\} \delta \frac{\theta - 1}{\theta} \frac{Z}{\xi} + \frac{2}{3} \left( U + \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\xi} \frac{M^2}{S} \frac{dS}{d\xi} \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.4), (2.5), (2.8) и (2.9) эквивалентна системе уравнений (2.2) — (2.5).

Из уравнения (2.9) следует, что плазма может оставаться в состоянии термического равновесия только при течении в цилиндрическом канале.

Для напряженности поля поляризации в плазме получим выражение

$$E_x = \frac{kt_e}{eL\xi} \left\{ \left[ 1 + \frac{7 - 5\alpha}{2U(1 - \alpha)} \right] \delta \frac{\theta - 1}{\theta} Z + \right. \\ \left. + \frac{M^2}{M^2 - M^{*2}} \left[ U + 5 + \frac{5}{4} \frac{7 - 5\alpha}{U(1 - \alpha)} \right] \left[ \frac{1}{S} \frac{dS}{d\xi} - \frac{2}{5} \frac{\delta}{M^{*2}} \frac{\alpha(\theta - 1)}{1 + \alpha\theta} \left( U + \frac{3}{2} \right) \frac{Z}{\xi} \right] \right\} \quad (2.10)$$

Из уравнений сохранения числа тяжелых частиц, Саха и энергии для плазмы в целом (1.1) получим соотношения между безразмерными переменными

$$\frac{1 + \alpha\theta}{\theta U} (M^2 + 3) + \frac{6}{5} \alpha = \text{const}, \quad \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{vS}{U^2 \exp U} \left[ \frac{1 + \alpha\theta}{\theta} M^2 \right]^{1/2} \quad (2.11) \\ \left( v \equiv 2 \frac{g_i}{g_n} \left( \frac{5}{3m} \right)^{1/2} \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (eU_i)^2}{h^3 n_1 v_1 S_1} \right)$$

Подставляя выражение для  $\theta U / (1 + \alpha\theta)$  из первого уравнения (2.11) в (2.6), получим

$$a^2 = \frac{M_1^2 + 3 + 6(\alpha_1 - \alpha - 1/\xi) \theta_1 U_1 / 5(1 + \alpha_1 \theta_1)}{M_1^2 + 3 + 6(\alpha_1 - \alpha + 1/3\xi) \theta_1 U_1 / 5(1 + \alpha_1 \theta_1)} \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} \quad (2.12)$$

**3. Течение слабо ионизованной плазмы.** Если  $p_e \ll p$  ( $\alpha\theta \ll 1$ ), но

$$\frac{n_e}{n} \frac{eU_i}{kt} \gg 1 \quad (\alpha\theta U \gg 1)$$

то уравнения (2.2)—(2.5), (2.8) и (2.9) упрощаются следующим образом:

$$t_e = \text{const} \quad (U = \text{const})$$

$$(M^2 - 1) \frac{1}{v} \frac{dv}{d\xi} = - \frac{2}{5} \delta \alpha (\theta - 1) Z + \frac{1}{S} \frac{dS}{d\xi} \quad (3.1)$$

$$(M^2 - 1) \frac{1}{t} \frac{dt}{d\xi} = - (M^2 - 1) \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{2}{3} \left( M^2 - \frac{3}{5} \right) \delta \alpha (\theta - 1) Z - \frac{2}{3} \frac{M^2}{S} \frac{dS}{d\xi}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\xi} = \delta \frac{\theta - 1}{\theta U_1} Z$$

$$(M^2 - 1) \frac{1}{M^2} \frac{d(M^2)}{d\xi} = - \frac{2}{3} \left( M^2 + \frac{3}{5} \right) \delta \alpha (\theta - 1) Z + \frac{2}{3} (M^2 + 3) \frac{1}{S} \frac{dS}{d\xi}$$

Таким образом, течение плазмы при этих условиях происходит при постоянной электронной температуре. Объяснение причин стабилизации электронной температуры дано выше. Степень ионизации  $\alpha$  в этом случае растет при  $t_e > t$  и убывает при  $t_e < t$ .

Условие в критическом сечении (2.7) здесь имеет вид

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{d\xi} = \frac{2}{5} \delta \alpha (\theta - 1) Z \quad (3.2)$$

а напряженность поля поляризации в плазме определяется формулой

$$E_x = \frac{kt_{e1}}{eL} \left\{ \delta \frac{\theta-1}{\theta U_1} Z + \frac{M^2}{M^2-1} \left[ \frac{1}{S} \frac{dS}{d\xi} - \frac{2}{5} \delta \alpha (\theta-1) Z \right] \right\} \quad (3.3)$$

Соотношения (2.11) в рассматриваемом случае упрощаются так:

$$\frac{M^2+3}{\theta U_1} + \frac{6}{5} \alpha = \text{const}, \quad \frac{\alpha^2}{S} \left( \frac{\theta}{M^2} \right)^{1/2} = \text{const} = v \quad (3.4)$$

Последнее соотношение сводится к обратной пропорциональности степени ионизации плазмы  $\alpha$  корню квадратному из ее плотности.

4. Течение в цилиндрическом канале ( $S = \text{const}$ ). В этом случае имеет место интеграл

$$mnv^2 + P = \text{const} \quad \text{или} \quad \left( \frac{1+\alpha\theta}{\theta U M^2} \right)^{1/2} \left( M^2 + \frac{3}{5} \right) = \text{const} \quad (4.1)$$

Отсюда и из (2.11) найдем

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{5}{6} \frac{1+\alpha_1\theta_1}{\theta_1 U_1} \left[ M_1^2 + 3 - (M^2 + 3) \frac{M^2}{M_1^2} \left( \frac{M_1^2 + 3/5}{M^2 + 3/5} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

$$U^{3/2} \exp U = \frac{6}{5} v \left( \frac{\theta_1 U_1 M_1^2}{1+\alpha_1\theta_1} \right)^{1/2} \frac{M^2}{M_1^2} \frac{M_1^2 + 3/5}{M^2 + 3/5} \times \\ \times \frac{6(1-\alpha_1)\theta_1 U_1 / 5(1+\alpha_1\theta_1) - M_1^2 - 3 + (M^2+3)M^2(M_1^2+3/5)^2 / M_1^2(M^2+3/5)^2}{[M_1^2+3+6\alpha_1\theta_1 U_1 / 5(1+\alpha_1\theta_1) - (M^2+3)M^2(M_1^2+3/5)^2 / M_1^2(M^2+3/5)^2]^2}$$

На фиг. 1 сплошные кривые изображают  $\alpha = \alpha(M^2)$ , штриховые —  $M^{*2} = M^{*2}(M^2)$ , при этом

$$\alpha(0) = \alpha_1 + \frac{5}{6} \frac{1+\alpha_1\theta_1}{\theta_1 U_1} (M_1^2 + 3), \quad \alpha(\infty) = \alpha_1 + \frac{3}{2} \frac{1+\alpha_1\theta_1}{\theta_1 U_1} \left( 1 - \frac{1}{5M_1^2} \right)$$

Если

$$\alpha_1 - \frac{15}{32} \frac{1+\alpha_1\theta_1}{\theta_1 U_1 M_1^2} (M_1^2 - 1)^2 > 0$$

то  $\alpha$  имеет минимум при  $M^2 = 1$ , причем

$$\alpha_{\min} = \alpha_1 - \frac{15}{32} \frac{(1+\alpha_1\theta_1)(M_1^2 - 1)^2}{\theta_1 U_1 M_1^2}$$

(фиг. 1, а). В противном случае достижимые значения  $M^2$  лежат вне интервала, заключенного между корнями  $M_1^2$  и  $M_{II}^2$  уравнения

$$\left[ 5M_1^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_1\theta_1 U_1}{1+\alpha_1\theta_1} \right) - 1 \right] M^4 - \left( 5M_1^4 + 3 - 4 \frac{\alpha_1\theta_1 U_1}{1+\alpha_1\theta_1} \right) M^2 + \\ + M_1^2 \left( M_1^2 + 3 + \frac{6}{5} \frac{\alpha_1\theta_1 U_1}{1+\alpha_1\theta_1} \right) = 0 \quad (4.3)$$

При достижении термического равновесия ( $\theta = 1$ ) поток плазмы в цилиндрическом канале становится стационарным.

Из дифференциальных уравнений (2.8) и (2.9) легко получить общую картину возможных течений плазмы в цилиндрическом канале (фиг. 2). На фиг. 2 сплошные кривые со стрелками изображают  $\theta = \theta(M^2)$  в различных типах течений, штриховая кривая изображает  $M^{*2} = M^{*2}(M^2)$ , штрих-пунктирная

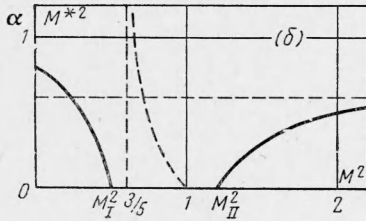
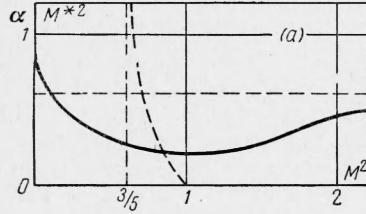
$$d\theta \sim M^2 - 1 + 2\alpha\theta U / 5\alpha\theta\xi + 3(2-\alpha) / 2U(1-\alpha) = 0$$

При  $t_e < t$  плазма при достаточной длине канала всегда приходит в состояние термического равновесия. При этом дозвуковой поток за-

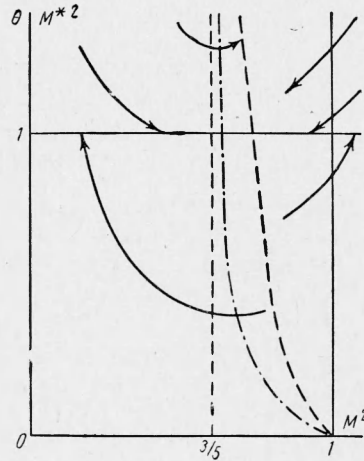
медляется, сверхзвуковой — ускоряется, а предельные (при  $\theta = 1$ ) значения  $M^2$  лежат вне интервала

$$1 - \frac{2}{5} \frac{\alpha U}{\alpha \xi + 3(2-\alpha)/2U(1-\alpha)} \div 1 - \frac{2}{5} \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{U}{\xi} = M^{*2}$$

При  $t_e > t$  плазма в дозвуковом потоке может, как видно на фиг. 2, или прийти в состояние термического равновесия, или, не приходя в состояние термического равновесия в канале любой длины, достигнуть на выходе из канала звуковой скорости.



Фиг. 1



Фиг. 2

В сверхзвуковом потоке при  $t_e > t$  плазма может достичь состояния термического равновесия или в непрерывном течении или через скачок.

Параметры установившегося потока ( $\theta = 1$ )  $M^{**2}$ ,  $U^{**}$  и  $\alpha^{**}$  во всех случаях определяются соотношениями

$$U^{**} = \left[ \frac{5}{6} (M_1^2 + 3) + \frac{(1 + \alpha_1) \theta_1 U_1}{1 + \alpha_1 \theta_1} \right] \frac{M_1^2}{M^{**2}} \left( \frac{M^{**2} + 3/5}{M_1^2 + 3/5} \right)^2 - \frac{5}{6} (M^{**2} + 3)$$

$$U^{**3/2} \exp U^{**} = v \left( \frac{\theta_1 U_1 M_1^2}{1 + \alpha_1 \theta_1} \right)^{1/2} \frac{M^{**2}}{M_1^2} \frac{M_1^2 + 3/5}{M^{**2} + 3/5} \times \quad (4.4)$$

$$\times \frac{(1 - \alpha_1) \theta_1 U_1 / (1 + \alpha_1 \theta_1) - 5(M_1^2 + 3)/6 + 5(M^{**2} + 3) M^{**2} (M_1^2 + 3/5)^2 / 6 M_1^2 (M^{**2} + 3/5)^2}{[5(M_1^2 + 3)/6 + \alpha_1 \theta_1 U_1 / (1 + \alpha_1 \theta_1) - (M^{**2} + 3) M^{**2} (M_1^2 + 3/5)^2 / M_1^2 (M^{**2} + 3/5)^2]}$$

$$\alpha^{**} = \alpha_1 + \frac{5}{6} \frac{1 + \alpha_1 \theta_1}{\theta_1 U_1} \left[ M_1^2 + 3 - (M^{**2} + 3) \frac{M^{**2}}{M_1^2} \left( \frac{M_1^2 + 3/5}{M^{**2} + 3/5} \right)^2 \right]$$

При достижении на конце канала скорости звука критические параметры потока плазмы  $U^*$ ,  $\alpha^*$  и  $\theta^*$  находятся через начальные значения переменных по соотношениям

$$\frac{3}{10\xi^*} + \frac{(\alpha^* U^*)^3 \exp 2U^*}{v^2 (1 - \alpha^*)^2} = \frac{1 + \alpha_1 \theta_1}{\alpha^* \theta_1 U_1} \frac{M_1^2 + 3}{4} + \frac{3}{10} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha^*} - 1 \right)$$

$$\left[ \frac{1 + \alpha_1 \theta_1}{\alpha^* \theta_1 U_1} \frac{M_1^2 + 3}{4} + \frac{3}{10} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha^*} - 1 \right) - \frac{3}{20\xi^*} \right] \frac{v(1 - \alpha^*)}{\alpha^* U^{*3/2} \exp U^*} =$$

$$= \frac{5}{8} \left( \frac{1 + \alpha_1 \theta_1}{\theta_1 U_1 M_1^2} \right)^{1/2} \left( M_1^2 + \frac{3}{5} \right) \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\theta^*} = \left( \frac{2}{5} \frac{U^*}{\xi^*} - 1 \right) \alpha^* + \frac{(\alpha^* U^*)^4 \exp 2U^*}{v^2 (1 - \alpha^*)^2}$$

5. Термически равновесная плазма ( $\theta = 1$ ). Как указывалось выше, входящая в уравнения (2.2)–(2.5) безразмерная переменная  $Z$  характеризует трение между компонентами плазмы. Если  $Z \ll 1$ , то трением между компонентами плазмы можно пренебречь.

Если  $Z \gg 1$ , то при одинаковом порядке величин членов в правых частях этих уравнений должно быть  $|\theta - 1| \ll 1$ . Этот случай соответствует модели термически равновесной плазмы. Более точно критерий применимости модели термически равновесной плазмы находится следующим образом. Полагая в уравнении (2.9)  $d\theta/d\zeta = 0$ , найдем

$$\theta - 1 = \frac{2}{3} \frac{(U + 3/2) M^2}{\delta Z \alpha \eta (M^2 - M_*^2)} \frac{1}{S} \frac{dS}{d\zeta}$$

$$\eta \equiv U + 3 + \frac{15}{4U} + \frac{3}{U\alpha(1-\alpha)}, \quad M_*^2 = 1 - \frac{2}{5} \frac{U}{\eta} \quad (5.1)$$

Отсюда получим необходимое условие применимости модели

$$|\theta - 1| \sim \frac{(U + 3/2) M^2}{Z \alpha \eta |M^2 - M_*^2| S} \left| \frac{dS}{d\zeta} \right| \ll 1 \quad (5.2)$$

Условие применимости для описания течений плазмы обычных уравнений газовой динамики и в этом случае имеет вид (2.1).

Подставляя выражение для  $\theta = 1$  из (5.1) в уравнения (2.2)–(2.5), (2.8) и (2.9), получим систему для термически равновесной плазмы

$$(M^2 - M_*^2) \frac{S}{v} \frac{dv}{dS} = M_*^2, \quad (M^2 - M_*^2) \frac{S}{\alpha} \frac{d\alpha}{dS} = -\frac{1+\alpha}{\alpha\eta} M^2$$

$$(M^2 - M_*^2) \frac{S}{t} \frac{dt}{dS} = -(M^2 - M_*^2) \frac{S}{U} \frac{dU}{dS} = -\frac{M^2}{\eta} \left[ 1 + \frac{2}{U\alpha(1-\alpha)} + \frac{5}{2U} \right]$$

$$(M^2 - M_*^2) \frac{S}{M^2} \frac{d(M^2)}{dS} = \left[ 2 + \frac{2}{U\alpha(1-\alpha)} + \frac{5}{2U} \right] \frac{M^2}{\eta} + 2M_*^2 \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что значение  $M^2 = M_*^2$  является критическим для течения термически равновесной плазмы. Оно, как и в случае термически неравновесной плазмы, заключено между изотермическим и адиабатическим значениями. Для скорости звука отсюда получим выражение

$$a^2 = \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{U}{\eta} \right) \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} = \frac{5 + \alpha(1-\alpha)(U + 5/2)^2}{3 + \alpha(1-\alpha)[(U + 3/2)^2 + 3/2]} \frac{P}{\rho} \quad (5.4)$$

(это выражение получено ранее в [3] другим способом).

Если  $\alpha \ll U^{-2}$ , то скорость звука в термически равновесной плазме совпадает со скоростью звука в неионизованном газе. Если  $\alpha U^2 \gg 1$  и  $U \gg 1$ , то (5.4) переходит в формулу Ньютона для изотермического звука. Объяснение этому аналогично данному для термически неравновесной плазмы. Критическое сечение в рассматриваемом случае располагается в горле канала. В дозвуковом потоке

$$\frac{d(M^2)}{dS} < 0, \quad \frac{dv}{dS} < 0, \quad \frac{dt}{dS} > 0, \quad \frac{d\alpha}{dS} > 0$$

В сверхзвуковом потоке производные меняют знаки на обратные.

Для напряженности поля поляризации в термически равновесной плазме получим выражение

$$E_x = -\frac{kt}{eL} \frac{M^2}{(M^2 - M_*^2)\eta} \left[ U + \frac{1}{\alpha} + \frac{5}{2} \frac{2-\alpha}{U\alpha(1-\alpha)} + \frac{25}{4U} \right] \frac{1}{S} \frac{dS}{d\zeta} \quad (5.5)$$

Соотношения между параметрами (2.11) в этом случае имеют вид

$$\frac{1+\alpha}{U} (M^2 + 3) + \frac{6}{5} \alpha = \text{const}, \quad \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{vS}{U^2 \exp U} [(1+\alpha)M^2]^{1/2} \quad (5.6)$$

Из второго и третьего уравнений (5.3) найдем еще один интеграл:

$$U(1 + \alpha) + \frac{5}{2}\alpha + 2 \ln \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \text{const} \quad (5.7)$$

Уравнения (5.6) и (5.7) позволяют найти  $M^2$ ,  $U$  и  $\alpha$  как функции  $S$ . Подставляя  $U(\alpha)$  из (5.7) в (5.4), найдем скорость звука

$$a^2 = \frac{5(1 + \alpha)^2 + \alpha(1 - \alpha)\{(1 + \alpha_1)(U_1 + 5/2) + 2L(\alpha)\}^2}{3(1 + \alpha)^2 + \alpha(1 - \alpha)\{(1 + \alpha_1)(U_1 + 3/2) + \alpha_1 - \alpha + 2L(\alpha)\}^2 + 3/2} \frac{P}{\rho} \quad (5.8)$$

$$L(\alpha) = \ln [\alpha_1(1 - \alpha) / \alpha(1 - \alpha_1)]$$

Для стационарного потока в цилиндрическом канале имеем

$$\left(\frac{1 + \alpha}{UM^2}\right)^{1/2} \left(M^2 + \frac{3}{5}\right) = \text{const} \quad (5.9)$$

Отсюда и из первого уравнения (5.6) найдем

$$A \equiv \frac{M^2(M^2 + 3 + 6/5U)}{(M^2 + 3/5)^2} = \text{const} \quad \left(\max A \text{ при } M^2 = \frac{3}{5} \frac{U + 5/2}{U + 3/2}\right) \quad (5.10)$$

Это значение  $M^2$  соответствует скорости распространения слабых возмущений. Отсюда скорость звука

$$a^2 = \frac{U + 5/2}{U + 3/2} \frac{P}{\rho} \quad (5.11)$$

Из второго уравнения (5.6) и (5.7) следует, что при  $\alpha \ll 1$  плазма будет баротропной (для нее  $P \sim \rho^{5/3}$ ); при этом из (5.6) и (5.7) имеем

$$\alpha^2 \exp U = \text{const}, \quad \frac{U^2}{(M^2)^{1/2} S} = \text{const}, \quad \frac{M^2 + 3}{U} + \frac{6}{5}\alpha = \text{const} \quad (5.12)$$

Отсюда найдем  $M^2$  в зависимости от  $S/S^*$

$$\frac{(M^2 + 3)^2}{16(M^2)^{1/2}} = \left\{1 + \frac{3}{10}\alpha^* U^* \left[1 - \exp \left\{\frac{U^*}{2} \left[1 - (M^2)^{1/4} \left(\frac{S}{S^*}\right)^{1/2}\right]\right\}\right]^2 \frac{S}{S^*}\right\} \quad (5.13)$$

Из этой формулы следует, что при наличии ионизации кривая  $S/S^*$  ( $M^2$ ) лежит ниже соответствующей кривой для обычного газа (одинаковое возрастание числа Маха достигается при наличии ионизации при меньшем, чем для обычного газа, изменении площади канала).

Далее найдем  $S/S^*$  в зависимости от  $U$ , а также от  $\alpha$ :

$$\frac{S}{S^*} = \left(\frac{U}{U^*}\right)^2 \left[4 \frac{U}{U^*} - 3 + \frac{6}{5}\alpha^* U \left(1 - \exp \frac{U^* - U}{2}\right)\right]^{-1/2} \quad (5.14)$$

$$\frac{S}{S^*} = \left(1 + \frac{2}{U^*} \ln \frac{\alpha^*}{\alpha}\right)^2 \left\{4 \left[1 + \frac{3}{10}(\alpha^* - \alpha) U^*\right] \left(1 + \frac{2}{U^*} \ln \frac{\alpha^*}{\alpha}\right) - 3\right\}^{-1/2} \quad (5.15)$$

Кривая (5.14) также лежит ниже соответствующей кривой для обычного газа (одинаковое изменение температуры достигается при наличии ионизации при меньшем, чем для обычного газа, изменении площади канала). Автор благодарит М. Н. Когана за обсуждение работы.

Поступила 1 II 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Керреброк J. L. Nonequilibrium Ionisation Due to Electron Heating. 1. Theory, AJAA-J, 1964, vol. 2, No. 6 (русс. перев.: Керреброк. Неравновесная ионизация вследствие нагрева электронов. I. Теория. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 6).
2. Бай Ш и-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд. «Мир», 1964.
3. Финкельбург В. и Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. Изд. иностр. лит., 1961.