

10. Преображенский Н. Г. О повышении точности при спектральном определении малых содержаний.— «Изв. СО АН СССР», 1962, № 12, с. 75.
11. Pomraning G. C. The equations of radiation hydrodynamics. Oxford, Pergamon Press, 1973.
12. Bartels H. Über das Spektrum des dichten Plasmas.— In: Probleme des Plasmas in Physik und Astronomie. Berlin, 1958.
13. Современные проблемы газовой динамики. Под ред. Лоха У. Х. Т. М., «Мир», 1971.
14. Бай Ши-и. Динамика излучающего газа. М., «Мир», 1968.
15. Соляникова В. А. Метод определения параметров плазмы по самообращенным контурам спектральных линий.— «Оптика и спектроскопия», 1976, т. 40, № 2.

УДК 621.1.016+536.24

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ПЕРЕНОСА

А. М. Шварцбург

(Новосибирск)

Решение интегро-дифференциального уравнения энергии для поглощающе-излучающей среды связано со значительными математическими трудностями. В связи с этим при расчете радиационного теплообмена широко используются приближенные дифференциальные уравнения, содержащие коэффициенты переноса, осредненные по различным направлениям [1—8]. При анализе области применимости этого метода необходимо знать точные значения коэффициентов переноса и влияние их отклонения от осредненных значений на величину лучистого потока.

В работе [9] для расчета одномерных потоков излучения получено дифференциальное уравнение и граничные условия к нему:

$$(1) \quad \partial^2 q / \partial \eta^2 - [\tau_0(\tau_0 + \delta \beta l) / A] q - 4\tau_0 n^2 \partial E / \partial \eta = 0;$$

$$(2) \quad (1/\varepsilon - 1/2)q - (1/2\tau_0 m_1) \partial q / \partial \eta = (1 - 2/m_1)n^2 E \quad (\eta = 0);$$

$$(3) \quad q + (1/\tau_0 m_2) \partial q / \partial \eta = 4n^2 E / m_2 - 2(1 - r)E_0 \quad (\eta = 1);$$

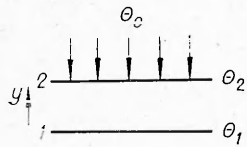
$$A = \frac{\int_{(4\pi)} \frac{\partial I(\eta, s)}{\partial s} \cos(s, y) d\omega_s}{\int_{(4\pi)} \frac{\partial I(\eta, s)}{\partial y} d\omega_s}, \quad \delta = 1 - \frac{1}{4} \int_0^\pi \gamma(\vartheta) \sin 2\vartheta d\vartheta,$$

$$m_1 = \frac{\int_{(4\pi)} I(0, s) d\omega_s}{\int_{(4\pi)} I(0, s) |\cos(s, y)| d\omega_s}, \quad m_2 = \frac{\int_{(4\pi)} I(1, s) d\omega_s}{\int_{(4\pi)} I(1, s) |\cos(s, y)| d\omega_s},$$

где q — безразмерный поток излучения, $q = Q/\sigma T_c^4$ (Q — результирующий поток излучения, T_c — характерная температура); η — безразмерная координата, $\eta = y/l$; τ_0 — оптическая толщина слоя толщиной l ; β — коэффициент рассеяния; n — коэффициент преломления; E — безразмерная полусферическая плотность излучения абсолютно черного тела; ε — степень черноты пластины; r — коэффициент отражения; $I(\eta, s)$ —

интенсивность излучения в точке η в направлении s ; γ — осесимметричная индикатриса рассеяния; σ — постоянная Стефана-Больцмана.

Уравнения (1) — (3) являются точными и учитывают как анизотропию, так и рассеяние излучения. Однако решение этих уравнений затруднено, так как значения коэффициентов переноса A , m_1 , m_2 заранее неизвестны. Полагая $A = 1/3$, $m_1 = m_2 = 2$, получаем легко решаемые уравнения дифференциального приближения. Можно показать, что указанные значения коэффициентов соответствуют



либо сферической изотропии поля излучения, либо изотропии в пределах верхней и нижней полусфер. Для оптически плотных сред при умеренных градиентах температур анизотропия излучения невелика [10] и значения коэффициентов переноса близки к своим осредненным значениям. Уменьшение опти-

ческой толщины усиливает анизотропию излучения, и коэффициенты A , m_1 , m_2 начинают зависеть от относительного распределения интенсивности излучения по направлениям. В данной работе проводится численное исследование этой зависимости, а также сравнение величин лучистых потоков, полученных из точного решения и с помощью уравнений дифференциального приближения.

Исследование проводилось на физической модели, изображенной на фигуре. Плоский слой излучающе-поглощающей среды, ограниченный оптически непрозрачной пластиной 1 и прозрачной пластиной 2, облучается сверху диффузно-излучающим источником, имеющим температуру Θ_0 ($\Theta = T/T_c$ — безразмерная температура). Температуры пластин поддерживаются постоянными и равными соответственно Θ_1 и Θ_2 . Перенос тепла внутри слоя осуществляется излучением и молекулярной теплопроводностью. Расчет проводился при различных оптических толщинах и температурах внешнего источника, остальные параметры имели следующие значения: $\Theta_1 = 0,7$; $\Theta_2 = 1,0$; $\varepsilon = 0,5$; $n = 1$; $\beta = 0$; $r = 0$; $I_w = \sigma T_c^3 l / \lambda = 10$ (I_w — критерий Иванова, λ — коэффициент теплопроводности). Распределение температур внутри слоя в стационарном тепловом режиме рассчитывалось на ЭВМ с помощью программы, любезно предоставленной авторами работы [11]. Для определения коэффициентов A , m_1 , m_2 использовались следующие соотношения:

$$(4) \quad A = \frac{-B_1 K_3(\tau) + B_2 K_3(\tau_0 - \tau) + \int_0^{\tau_0} F(t) K_2 |\tau - t| dt}{B_1 K_1(\tau) + B_2 K_1(\tau_0 - \tau) + \int_0^{\tau_0} F(t) K_0 |\tau - t| dt},$$

$$F(t) = \begin{cases} -\Theta^4(t), & t \leq \tau, \\ \Theta^4(t), & t > \tau; \end{cases}$$

$$(5) \quad m_1 = \frac{2(B_1 + B_2 K_2(\tau_0)) + \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_1(t) dt}{B_1 + 2B_2 K_3(\tau_0) + 2 \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_2(t) dt};$$

$$(6) \quad m_2 = \frac{2(B_2 + B_1 K_2(\tau_0)) + \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_1(\tau_0 - t) dt}{B_2 + 2B_1 K_3(\tau_0) + 2 \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_2(\tau_0 - t) dt},$$

где

$$K_i(t) = \int_0^1 \mu^{i-\varepsilon} e^{-t/\mu} d\mu, B_2 = \Theta_0^i,$$

$$B_1 = \varepsilon \Theta_1^i + 2(1 - \varepsilon)(B_2 K_3(\tau_0) + \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_2(t) dt).$$

Входящие в выражения (4)–(6) интегралы

$$\int_0^{\tau_0} F(t) K_0|\tau - t| dt, \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_1(t) dt, \int_0^{\tau_0} \Theta^4(t) K_1(\tau_0 - t) dt$$

являются несобственными интегралами второго рода, зависящими от параметра. Сходимость этих интегралов доказывается с помощью критерия Коши.

Для вычисления точных значений безразмерных потоков излучения использовалось соотношение

τ_0	τ	$\Theta_0=1,3$					$\Theta_0=1,6$				
		A	q_1	q	m_1	m_2	A	q_1	q	m_1	m_2
0,1	0		1,172	1,183				2,836	2,909		
	0,005	0,25	1,204	1,218			0,23	2,914	2,996		
	0,035	0,15	1,327	1,362	1,90	1,99	0,15	3,181	3,317	1,89	1,99
	0,065	0,16	1,377	1,427			0,18	3,258	3,435		
	0,095	0,12	1,445	1,508			0,12	3,455	3,666		
	0,100		1,466	1,529				3,524	3,740		
0,4	0		0,9593	0,9586	1,84	2,02		2,338	2,344	1,84	2,00
	0,02	0,28	1,054	1,066			0,25	2,570	2,607		
	0,14	0,21	1,269	1,338			0,21	2,987	3,151		
	0,26	0,26	1,290	1,383			0,28	3,002	3,220		
	0,38	0,17	1,412	1,515			0,17	3,332	3,588		
	0,40		1,486	1,589				3,580	3,841		
0,8	0		0,7686	0,7580	1,82	2,01		1,886	1,865	1,81	2,00
	0,04	0,25	0,9102	0,9204			0,22	2,235	2,263		
	0,28	0,25	1,141	1,220			0,26	2,665	2,837		
	0,52	0,30	1,153	1,245			0,31	2,675	2,876		
	0,76	0,23	1,301	1,399			0,25	3,044	3,279		
	0,80		1,439	1,537				3,501	3,746		
1,0	0		0,6950	0,6827	1,82	2,01		1,709	1,685	1,81	2,00
	0,05	0,24	0,8507	0,8621			0,22	2,096	2,126		
	0,35	0,27	1,078	1,158			0,28	2,515	2,688		
	0,65	0,31	1,091	1,175			0,32	2,529	2,709		
	0,95	0,25	1,245	1,334			0,29	2,904	3,117		
	1,00		1,413	1,504				3,455	3,683		
3,0	0		0,3124	0,2988	1,82	1,98		0,7776	0,7508	1,77	1,97
	0,15	0,24	0,4886	0,5037			0,23	1,223	1,264		
	1,05	0,32	0,6444	0,6723			0,33	1,509	1,567		
	1,95	0,34	0,6724	0,6719			0,34	1,563	1,550		
	2,85	0,45	0,8429	0,8648			0,72	1,915	1,944		
	3,00		1,253	1,303				3,188	3,314		
5,0	0		0,1754	0,1649	1,81	1,97		0,4398	0,4157	1,78	1,95
	0,25	0,25	0,3208	0,3362			0,25	0,8084	0,8495		
	1,75	0,33	0,4276	0,4362			0,33	1,010	1,030		
	3,25	0,34	0,4671	0,4563			0,34	1,110	1,089		
	4,75	0,57	0,6443	0,6473			1,07	1,419	1,381		
	5,00		1,218	1,287				3,142	3,328		

$$(7) \quad q_1 = 2(B_1 K_3(\tau) - B_2 K_3(\tau_0 - \tau) - \int_0^{\tau_0} F(t) K_2|\tau - t| dt).$$

Все интегралы, входящие в выражения (4) — (7), вычислялись с помощью квадратурной формулы Гаусса. Уравнения (1) — (3) (при $A = 1/3$, $m_1 = m_2 = 2$) решались методом конечных разностей. Некоторые результаты расчетов представлены в таблице (приводятся абсолютные значения величин лучистых потоков).

Из анализа полученных данных следует, что изменение оптической толщины слоя незначительно влияет на величину коэффициентов m_1 , m_2 и более резко — на коэффициент A . В области малых оптических толщин значения коэффициента A почти в три раза отклоняются от осредненного значения, однако различие между точным и приближенным решениями невелико (не превышает 9%). Объясняется это следующим образом. При $\beta = 0$ второй член в уравнении (1) имеет порядок $O(\tau_0^2)$, третий — $O(\tau_0)$. При $\tau_0 \ll 1$ второй член становится пренебрежимо мал, и неточное задание коэффициента A не приводит к значительной ошибке в величине лучистого потока. Применимость дифференциального приближения в области малых оптических толщин отмечена также в работах [7, 12, 13]. С увеличением оптической толщины слоя значение A приближается к $1/3$. При $\tau_0 > 1$ точное и приближенное решения внутри слоя практически совпадают, и лишь вблизи границ, где анизотропия излучения более существенна, погрешность несколько возрастает (до 7%). В исследованном диапазоне оптических толщин изменение температуры внешнего источника не оказывает заметного влияния на величину погрешности. Результаты расчетов показывают, что увеличение значений коэффициентов A и m_2 в уравнениях (1) — (3) приводит к росту абсолютной величины лучистого потока, увеличение коэффициента m_1 снижает значение $|q|$.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что дифференциальное приближение справедливо в широком диапазоне оптических толщин и может успешно применяться при расчетах радиационного и сложного теплообмена.

Поступила 3 XI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Адрианов В. Н. Дифференциальные методы расчета теплообмена излучением.— В кн.: Теплообмен, гидродинамика и теплофизические свойства вещества. М., «Наука», 1968.
2. Goulard B. The transition from black body to Rosseland formulations in optically thick flow.— «Int. J. Heat Mass Trans.», 1963, vol. 6, N 10.
3. Висканта, Грош. Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающей среде.— «Теплопередача», 1962, т. 84, № 1.
4. Traugott S. C., Wang K. C. On differential methods for radiant transfer.— «Int. J. Heat Mass Trans.», 1964, vol. 7, N 2.
5. Детков С. П. К диффузионному приближению в расчетах переноса лучистой энергии.— «Инж.-физ. журн.», 1967, т. 13, № 5.
6. Рекин А. Д. Дифференциальные уравнения для исследования лучистого теплообмена в поглощающе-излучающей среде.— «Инж.-физ. журн.», 1967, т. 1, № 4.
7. Олф. Модификация дифференциального приближения уравнения лучистого переноса.— «Ракетн. техн. и космонавтика», 1967, т. 5, № 4.
8. Ветлужкий В. Н., Севастьяненко В. Г. Исследование теплообмена с учетом излучения при течении газа в трубе.— ПМТФ, 1968, № 5.
9. Рубцов Н. А., Шварцбург А. М. Теплообмен между селективно излучающей жидкостью и ламинарным газовым потоком при наличии внешнего источника излучения.— ПМТФ, 1976, № 3.

10. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
11. Бурка А. Л., Рубцов Н. А. Нестационарный радиационно-кондуктивный перенос тепла в плоском слое серой поглощающей среды.— ПМТФ, 1971, № 1.
12. Троггт. Потенциал радиационного теплового потока для несерого газа.— «Ракетн. техн. и космонавтика», 1966, № 3.
13. Спэрроу Э. М., Сесс Р. Д. Теплообмен излучением Л., «Энергия», 1971.

УДК 621.375.82

**ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ
В УДАРНОМ СЛОЕ
ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ
СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С ИНВЕРСНОЙ НАСЕЛЕННОСТЬЮ**

Б. В. Егоров, В. Н. Комаров, Г. Н. Саяпин

(Москва)

При моделировании обтекания тел сверхзвуковым потоком релаксирующего газа возникает необходимость детального физико-химического анализа внутренней структуры течения. В качестве рабочего газа, с помощью которого моделируется реальный поток, широко используются газообразные смеси, получающиеся в результате сгорания углеводородных топлив и содержащие молекулы CO_2 , N_2 , O_2 , H_2O . Особый интерес в задачах моделирования представляет обтекание тел неравновесным потоком с инверсной населенностью колебательных уровней молекул CO_2 . В работе [1] приведены результаты расчета коэффициента усиления для перехода $(00^01)-(10^00)$ молекулы CO_2 при возникновении косых скачков уплотнения в инверсной среде и отмечалось уменьшение коэффициента усиления для колебательно-вращательного перехода $P(20)$ в области давлений, где наибольший вклад в уширение спектральных линий обусловлен столкновительным механизмом. В работе [2] отмечено уменьшение или увеличение коэффициента усиления в зависимости от интенсивности ударной волны и вращательного квантового числа.

В данной работе исследуется изменение коэффициента усиления при обтекании затупленных тел как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой областях ударного слоя при изменении угла наклона ударной волны по отношению к направлению набегающего потока от 90° до угла Маха; изучается влияние на коэффициент усиления слабых возмущений, распространяющихся по инверсной среде.

1. Известно [3], что коэффициент усиления слабого сигнала для колебательно-вращательного перехода $(00^01)-(10^00)$ можно представить в виде

$$(1.1) \quad G = (\lambda^2 A_{nm}/8\pi\sqrt{\pi c})[N_n - (g_n/g_m)N_m](a/\Delta_c)H(a, 0),$$

где λ — длина волны перехода; A_{nm} — коэффициент Эйнштейна для спонтанного перехода $n \rightarrow m$; c — скорость света; параметр $a = (\Delta_c/\Delta_D) \times \sqrt{\ln 2}$; Δ_c — полуширина линии за счет столкновений; Δ_D — доплеровская полуширина; N_n , N_m , g_n , g_m — населенности и статистические веса верхнего и нижнего уровней соответственно; $H(a, 0)$ — значение функции Фойгта в центре линии. Зависимость ударной полуширины от температуры принималась пропорциональной $T^{-1/2}$.

Рассмотрим осесимметричное обтекание цилиндра со сферическим закруглением невязким сверхзвуковым однородным потоком релаксирующей смеси газа с инверсной населенностью в набегающем потоке между уров-