

УДК 550.344

Численно-аналитическое моделирование волновых полей для сред сложного строения и структуры

Б.Г. Михайленко, А.Г. Фатьянов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mails: mikh@sscc.ru (Михайленко Б.Г.), fat@nmsf.sccc.ru (Фатьянов А.Г.)

Михайленко Б.Г., Фатьянов А.Г. Численно-аналитическое моделирование волновых полей для сред сложного строения и структуры // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 2. — С. 163–176.

В работе представлен аналитический метод моделирования сейсмических волновых полей для широкого круга геофизических сред (включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т.д.) на сверхдальние расстояния. Поскольку не используются конечно-разностные аппроксимации, не возникает сеточной дисперсии при расчетах волновых полей для произвольных моделей сред и баз наблюдений. Аналитическое представление решения в спектральной области позволяет проводить анализ полного поля по частям, в частности получать однократные волны. На основе созданной программы расчета волновых полей проведено моделирование водных волн и сейсмического “звона” на Луне. Объяснено явление монотонного смещения резонанса в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации, обнаруженное при экспериментальных работах с вибратором.

Ключевые слова: математическое моделирование, аналитическое решение, полные волновые поля, однократные волны, упругие, пористые, неупругие, анизотропно-неупругие, случайно-неоднородные среды.

Mikhailenko B.G., Fatyanov A.G. Numerical-analytical modeling of wave fields for complex subsurface geometries and structures // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 2. — P. 163–176.

In this paper we propose an analytical method of modeling seismic wave fields for a wide range of geophysical media: elastic, non-elastic, anisotropic, anisotropic-non-elastic, porous, random-inhomogeneous, etc. for super-remote (far) distances. As finite difference approximations are not used, there is no grid dispersion when computing wave fields for arbitrary media models and observation points. The analytical solution representation in the spectral domain makes possible to carry out the analysis of a wave field in parts, specifically, to obtain the primary waves. Based on the developed program of computing the wave fields, we have carried out the simulation of water waves and seismic “ringing” on the Moon. The monotone displacement resonant to the lower frequency area with increasing the recording distance has been explained. Such a displacement was detected in experiments with a seismic vibrator.

Key words: mathematical modeling, analytical solution, full wave fields, primary waves, elastic, non-elastic, anisotropic-non-elastic, porous, random-inhomogeneous media.

В настоящее время одним из эффективных инструментов исследования процессов распространения упругих волн в различных моделях упругих сред является математическое моделирование. Постоянное совершенствование измерительных инструментов приводит, с одной стороны, к повышению точности экспериментальных данных, с другой — к увеличению пространственно-временных масштабов. А это, в свою очередь, приводит к необходимости совершенствования вычислительных методов расчета волновых полей. В работе развит численно-аналитический метод моделирования, позволяющий

рассчитывать волновые поля для значительных пространственно-временных масштабов, характерных для экспериментальных данных.

Важное, а зачастую и определяющее, значение для сейсмических исследований имеет возможность анализа полного волнового поля по частям. В работе развит численно-аналитический алгоритм моделирования волновых полей для 3D плоскостойких сред, позволяющий рассчитывать динамику отдельно взятых волн (однократные, волны-спутники и т. п.) без известных ограничений лучевого метода. На основе созданной программы расчета волновых полей проведено сравнение с морскими экспериментальными данными. В результате проведенного моделирования показано, что учет поглощения в Земле дает хорошее совпадение модельных и наблюдаемых волновых полей.

Развитый численно-аналитический метод моделирования позволяет рассматривать разнообразные прикладные задачи. В настоящей статье проведено математическое моделирование волнового сейсмического поля для модели упругой Луны, в которой имеется приповерхностная зона малых скоростей (ЗМС) в случае значительных пространственно-временных масштабов (часовые записи экспериментальных данных). Моделирование проведено в рамках 3D плоскостойкой среды. Экспериментальные лунные сейсмограммы заметно отличаются от сейсмограмм, полученных на Земле. Наиболее характерная особенность лунных сейсмограмм — значительная длительность сейсмического сигнала, превосходящая часовые записи. Результаты моделирования показывают, что при наличии в среде ЗМС возникает сейсмический “звон”, что приводит к значительному увеличению длительности записи сейсмического сигнала. Длительность сейсмического “звона” на Луне в первом приближении можно объяснить резонансными явлениями, возникающими в волновом поле при наличии тонкого низкоскоростного слоя (реголита).

Аналитический метод моделирования развит для сред сложного строения и структуры, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. д. При анализе экспериментальных данных полевых работ в районе вулкана Шуго (Краснодарский край, Россия) была выяснена особенность волнового поля, связанная с появлением ряда резонансов в низкочастотном диапазоне частот. При этом резонанс монотонно смещается в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации, что не имеет наглядного физического объяснения. Это явление объяснено разномасштабными эффектами (кусковатостью) случайно-неоднородной среды.

1. Постановка задачи моделирования

Математическая постановка задачи моделирования волновых полей формулируется в декартовой системе координат следующим образом: определить компоненты вектора смещения для неупругой анизотропной среды, которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + F_x \cdot f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + F_y \cdot f(t), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + F_z \cdot f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями при $t = 0$:

$$u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} = u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

и граничными данными при $z = 0$:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций (а они с компонентами вектора смещения) известными соотношениями, в которых анизотропные коэффициенты c_{ij} по принципу Вольтерра заменяются интегральными операторами C_{ij} , учитывающими влияние упругого последдействия:

$$C_{ij}x \equiv c_{ij}x(t) - c'_{ij} \int_{-\infty}^t h_{ij}(t - \tau)x(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь c'_{ij} — величины, определяющие уровень поглощения. Функции последдействия $h_{ij}(\xi)$ определяют спектральный состав поглощения. F_x, F_y, F_z — компоненты вектора силы, описывающие сосредоточенные и распределенные источники различного типа.

2. Аналитическое моделирование водных и однократных волн

Существует большое число численных методов расчета волновых полей в неоднородных средах. Отметим работу [1]. В [2] дан обзор численных методов вычисления сейсмических волновых полей в неоднородных упругих средах. Все эти методы могут рассчитывать только полное волновое поле без выделения из него отдельных типов волн. В то же время в задачах моделирования волновых полей в сложно построенных средах большое, а зачастую и определяющее, значение имеют алгоритмы, позволяющие рассчитывать динамику отдельно взятых волн. В слоисто-неоднородных средах единственным методом численного анализа волнового поля по частям является асимптотический лучевой метод. Его применение, однако, имеет известные ограничения. Ниже рассматривается аналитический метод расчета полного поля и отдельных типов волн (однократных, многократных волн-спутников и т. п.) для 3D плоскостойких сред с произвольным числом слоев на основе специальных разложений точных решений, не имеющих ограничений лучевого метода. При этом полученные в спектральной области явные формулы позволяют проводить расчеты на сверхдальние расстояния без каких-либо ограничений для 3D плоскостойких моделей сред.

Жидкая среда в работе рассматривается как частный случай упругой среды, в которой $\mu = 0$ и $v_s = 0$ [3]. Для описания состояния жидкости используются следующие характеристики упругой среды: вектор смещения \vec{u} и компонента тензора напряжения σ_{zz} . Переход к общепринятой характеристике жидкости (давлению p) осуществляется следующим известным способом: $p = -\sigma_{zz}$.

В дальнейшем для практических целей рассматривается источник с осевой симметрией типа “центра расширения”, моделирующий взрывное воздействие. В этом случае в цилиндрической системе координат (r, z) отличны от нуля только компоненты $u_r(r, z, t)$ и $u_z(r, z, t)$. Краевые условия на поверхности воды и на границе жидкость–земля выглядят следующим образом [3]:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

$$[u_z] = [\sigma_{zz}] = \tau_{rz}^-|_{z=h} = 0. \quad (5)$$

Здесь $z = 0$ — свободная поверхность жидкости, $z = h$ — глубина дна, скачок $[a] = a^- - a^+$, a^+ — значение величины a при $z = h$ со стороны жидкости, a^- — значение величины a при $z = h$ со стороны твердого тела.

В дальнейшем для построения решения применяются известные преобразования Фурье–Бесселя по переменным (r, t) , и в спектральной области (k, ω) осуществляется переход к потенциалам продольных и поперечных волн φ и ψ :

$$\begin{aligned} u_r &= -k \cdot \varphi - \frac{d\psi}{dz} = -k \cdot \varphi, & u_z &= \frac{d\varphi}{dz} + k \cdot \psi = \frac{d\varphi}{dz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda \frac{du_z}{dz} + k\lambda u_r = -\rho\omega^2\varphi = -p. \end{aligned} \quad (6)$$

Нахождение потенциала φ , а тем самым по (6) всех искомым компонент поля, осуществляется аналитическим методом [4, 5].

Опишем его основные этапы применительно к нахождению решения в жидком слое. С использованием аналитического метода получена функция α , удовлетворяющая при $z = h$ следующему условию:

$$\frac{d\varphi^+}{dz} = \alpha \cdot \varphi^+. \quad (7)$$

Далее с использованием (5), (6) получим, например, значение вертикальной компоненты смещения u_z для произвольного положения источника $d > 0$ и приемника z :

$$u_z(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \left\{ \frac{e^{-\nu|z-d|} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 + e^{-2\nu z}) \quad \text{при } z < d, \quad (8)$$

$$u_z(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \left(\frac{e^{-2\nu d} + q \cdot e^{-2\nu(h-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right) \quad \text{при } z = d,$$

$$u_z(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \left\{ \frac{-e^{-\nu(z-d)} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 - e^{-2\nu d}) \quad \text{при } z > d. \quad (9)$$

Здесь $\nu = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, c — скорость звука в жидкости, $q = (\nu - \alpha)/(\nu + \alpha)$ — спектральный коэффициент отражения, учитывающий свойства жидкости и твердой земли, $F(\omega)$ — спектр входного сигнала $f(t)$ из (1).

Выражение для давления p будет иметь следующий вид:

$$p(z, k, \omega) = \rho \cdot \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\nu} \left\{ \frac{e^{-\nu|z-d|} + q \cdot e^{-\nu(2h-z-d)}}{1 + q \cdot e^{-2\nu h}} \right\} (1 - e^{-2\nu z}). \quad (10)$$

Из формул (8), (9) видно, что для компоненты u_z не выполняется принцип взаимности. При этом для давления (10) принцип взаимности выполняется [6].

Применительно к экспериментальным данным (приемник находится на дне, $z = h$) проанализируем формулу (9). Слагаемое $-e^{-2\nu d}$ дает волну-спутник от источника. Знаменатель в (8)–(10) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{1 + qe^{-2\nu h}} = 1 - qe^{-2\nu h} + q^2e^{-4\nu h} + \dots + (-1)^n q^n e^{-2\nu hn} + \dots \quad (11)$$

Рассмотрение слагаемых в (11) с учетом известной формулы Зоммерфельда показывает, что они дают произвольные кратности в общем решении. И подстановка представления (11) в (8)–(10) дает разложение искомого решения по сумме волн в жидком слое произвольных кратностей.

Для наглядности рассмотрим в (11) только первое слагаемое (отсутствие кратных). В этом случае (9) примет следующий вид при $z = h$ (приемник на дне):

$$u_z(z, k, \omega) = -\frac{F(\omega)}{4\pi c^2} e^{-\nu(h-d)} + \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} \cdot q \cdot e^{-\nu(h-d)} + \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} (1-q) e^{-\nu(h+d)}. \quad (12)$$

Первое слагаемое в (12) представляет в спектральной области прямую волну от источника, второе — прямую волну с учетом ее взаимодействия с дном. Третье слагаемое — волна-спутник с учетом ее взаимодействия с дном.

Далее рассмотрим два члена ряда в разложении (11), т. е. представим знаменатель в (9) следующим образом:

$$\frac{1}{1 + qe^{-2\nu h}} = 1 - qe^{-2\nu h}. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (9) даст в этом случае следующее выражение для поля:

$$u_z^1(z, k, \omega) = \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} q(1-q) e^{-\nu(3h-d)} - \frac{F(\omega)}{4\pi c^2} q(1-q) e^{-\nu(3h+d)}. \quad (14)$$

В выражении (14) u_z^1 — однократная волна, которая состоит из однократной прямой волны от источника и однократной волны-спутника. Аналогично, с учетом разложения (11), получается представление решения в виде суммы кратных волн. Не трудно также выделить из решения волну произвольной кратности, убрать волны-спутники, отдельно рассмотреть взаимодействие прямой волны с дном и т. п.

Используя обратные преобразования Фурье–Бесселя, получим значения всех искомым компонент волнового поля в физической области (z, r, t) .

3. Аналитическое моделирование сейсмических волн

Рассматриваются источник с осевой симметрией типа “центра давления”, моделирующий взрыв, и вертикальная сила, моделирующая удар метеорита по свободной поверхности. В этом случае в цилиндрической системе координат (r, z) отличны от нуля только компоненты $u_r(r, z, t)$ и $u_z(r, z, t)$.

Для источника типа нормальной силы, приложенной к свободной поверхности $z = 0$, краевые условия будут выглядеть следующим образом:

$$\tau_{rz} \equiv \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = 0, \quad (15)$$

$$\sigma_z \equiv \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r} f(t). \quad (16)$$

Для построения решения применяются известные преобразования Фурье–Бесселя по переменным (r, t) , и в спектральной области (k, ω) осуществляется переход к потенциалам продольных и поперечных волн u_p и u_s в каждом слое:

$$u_r = -k \cdot u_p - \frac{du_s}{dz}, \quad u_z = \frac{du_p}{dz} + k \cdot u_s. \quad (17)$$

Уравнения для потенциалов в каждом слое имеют следующий известный вид:

$$\frac{d^2 u_p}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2} \right) u_p \equiv \nu_p^2 u_p, \quad \frac{d^2 u_s}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2} \right) u_s \equiv \nu_s^2 u_s. \quad (18)$$

Переход к потенциалам продольных и поперечных волн проясняет физическую суть явления и в данном алгоритме приводит к упрощению дифференциальных уравнений. Заметим, что в [7] говорят о нецелесообразности перехода к потенциалам из-за возникающих трудностей. В данном методе переход к потенциалам не только не усложняет задачу, но приводит к ее значительному упрощению. Отметим, что переход к потенциалам позволяет аналитически проводить анализ волнового поля по частям, например рассчитывать отдельно однократные продольные или поперечные волны.

Для нахождения решения (18) вводятся новые (вспомогательные) неизвестные функции a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} следующим образом:

$$\frac{du_p}{dz} = a_{11}u_p + a_{12}u_s, \quad \frac{du_s}{dz} = a_{21}u_p + a_{22}u_s. \quad (19)$$

Отметим, что в случае изотропной среды вспомогательных функций будет только 3. Из требования тождественного выполнения (18) получим следующую систему нелинейных уравнений для определения неизвестных функций a_{11} , a_{12} , a_{22} в изотропном случае:

$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{dz} + a_{11}^2 + a_{12}^2 &= \nu_p^2, \\ \frac{da_{22}}{dz} + a_{22}^2 + a_{12}^2 &= \nu_s^2, \\ \frac{da_{12}}{dz} + a_{12}(a_{11} + a_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, искомая задача в спектральной области сведена к решению уравнений (20), имеющих, вообще говоря, нелинейный вид. Это не приносит никаких трудностей, так как (20) допускает аналитическое решение [4].

Поскольку слой ЗМС очень тонкий, особое внимание уделялось точности расчетов. Отметим, что, например, в матричном методе и его модификациях при расчете волновых полей для высоких частот (тонких слоев) происходит потеря точности [3]. Сеточными методами также практически невозможен безартефактный расчет волновых полей в случае наличия тонкого слоя ЗМС. Моделирование волновых полей в этом случае, особенно на больших расстояниях, требует использования мелкого шага пространственной сетки, что приводит к колоссальному объему вычислительной работы.

На основе метода, развитого в работах [4, 8, 9], создана компьютерная программа, позволяющая проводить моделирование волновых полей для значительных пространственно-временных масштабов, характерных для лунных экспериментальных данных. Аналитический метод моделирования, который был применен в настоящей статье, разработан еще в 1981 г. Но тогда из-за малой мощности компьютеров моделирование проводилось для пространственно-временных масштабов порядка 50-ти длин волн. Здесь же расчеты проведены для десятков тысяч длин волн. Это потребовало модернизировать метод. Для возможности проведения расчетов для значительных пространственно-временных масштабов на “обычных” компьютерах алгоритм модифицирован с целью исключения промежуточных массивов большой размерности. Они насчитываются аналитически в процессе расчета. В алгоритм также введена повышенная точность расчетов, проведено дополнительное тестирование и т. п.

Полученные в спектральной области явные формулы позволяют проводить расчеты на сверхдальние расстояния без каких-либо существенных ограничений на параметры моделей сред, частоты и базы наблюдений. Используя обратные преобразования Фурье–Бесселя, получим значения всех искомых компонент волнового поля в физической области (z, r, t) . В итоге, аналитический (не использующий сеток) подход позволил провести моделирование сейсмического “звона” на Луне без использования технологии высокопроизводительных вычислений на “обычных” компьютерах.

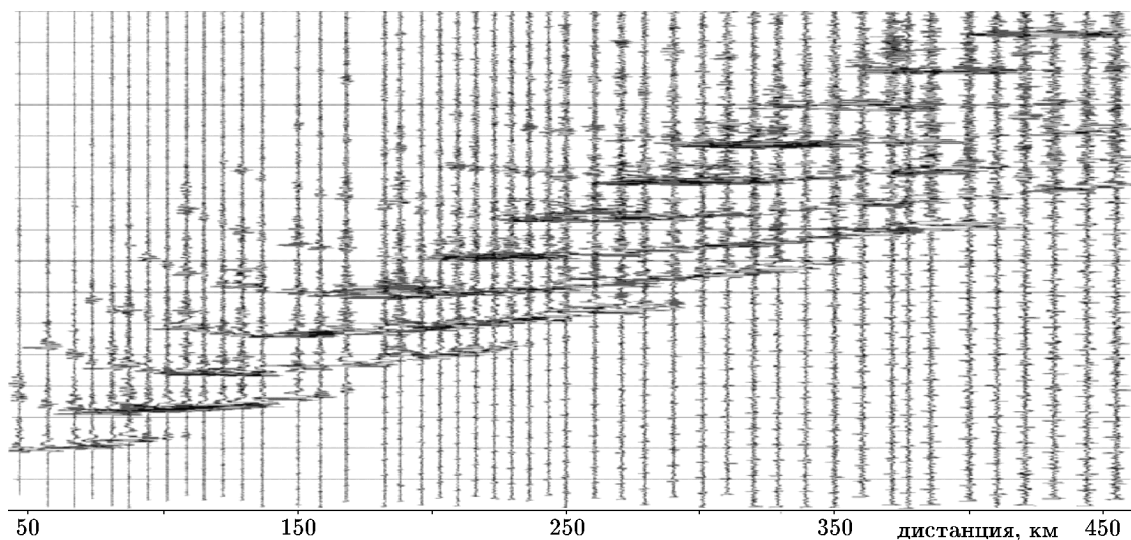


Рис. 1. Результат морского эксперимента, u_z -компонента

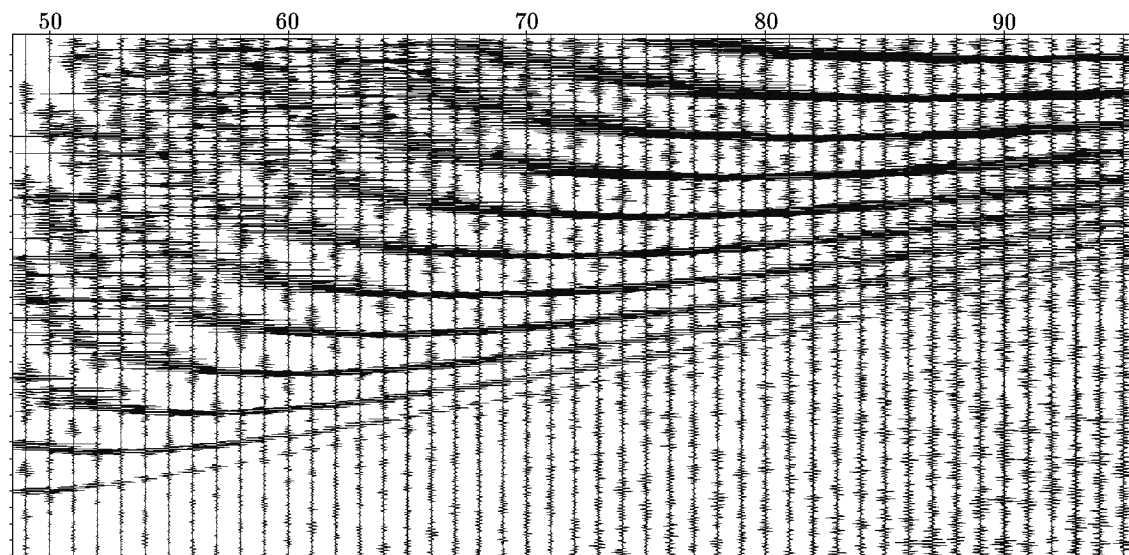


Рис. 2. Результат расчета u_z -компоненты при отсутствии поглощения в земле

Схема численного эксперимента для водных волн была взята из натурального эксперимента, проводившегося в Атлантическом океане [10]. Модель среды взята из данных глубинного сейсмического зондирования. На рис. 1 приведен результат морского эксперимента в редукции 1.6 км/с. Выдана u_z -компонента полного реального волнового поля.

На рис. 2 приведен результат расчета u_z при отсутствии поглощения в редукции 1.6 км/с.

Для более полного учета основных факторов, влияющих на формирование волнового поля, рассмотрена модель среды с учетом поглощения в твердой среде. Физические параметры поглощения (декременты поглощения или добротности продольных и поперечных волн) определяются по величинам c'_{ij} в (3) [11].

На рис. 3 приведено волновое поле для вертикальной компоненты смещения в случае наличия поглощения в твердой среде в редукции 1.6 км/с. Сравнение рисунков 1 и 3 показывает хорошее совпадение реальных и модельных данных в этом случае. Таким образом, результаты численного моделирования показывают, что учет поглощения в Земле существенно приближает модельные данные к реальным. На реальных данных (рис. 1) четко прослеживается тенденция разрастания амплитуд кратных волн, что на первый взгляд противоречит закону сохранения энергии. В работе [11] подробно исследовано и объяснено это явление.

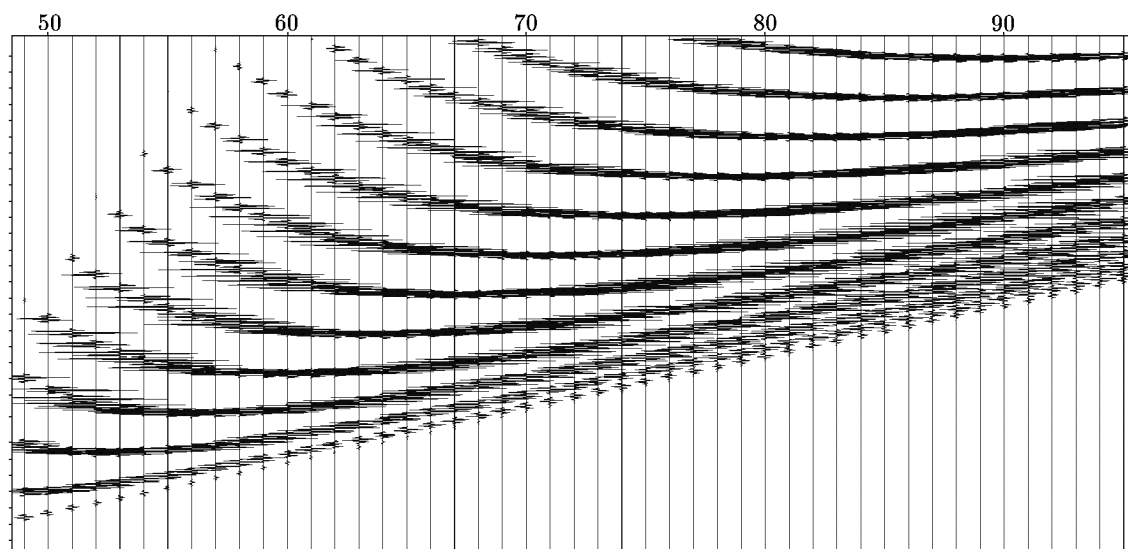


Рис. 3. Результат расчета u_z -компоненты с поглощением в земле

Схема численного эксперимента для лунных сейсмограмм основывается на известных моделях Луны [12, 13]. Первая из используемых моделей — модель приповерхностной части Луны, в которой выделяется несколько маломощных слоев с низкими скоростями. Верхний слой в первой модели — ЗМС с мощностью в 10 м. Скорость продольных волн в ЗМС равна 100 м/с, поперечных — 40 м/с [12]. Вторая модель — глубинная модель, достигающая центра Луны и сложенная многокилометровыми высокоскоростными слоями [13]. В дальнейшем эти модели будут называться моделями 1 и 2 соответственно. Используемая в расчетах модель 3 получена объединением данных моделей 1 и 2 путем замены первого слоя модели 2 слоями модели 1. Ниже приведены результаты моделирования для источника типа нормальной силы, расположенного на дневной поверхности, с доминирующей частотой входного сигнала в 1 Гц. Этот источник в первом приближении соответствует удару метеорита.

Лунные сейсмограммы заметно отличаются от сейсмограмм, полученных на Земле. Наиболее характерная особенность лунных сейсмограмм — значительная длительность сейсмического сигнала, превосходящая часовые записи [12]. В работе [14] дается объяснение этой особенности лунных сейсмограмм. Предполагается, что “сейсмический звон”

возникает за счет высокой степени неоднородности среды, приводящей к интенсивному рассеянию при очень низком поглощении сейсмической энергии в приповерхностном слое. Однако численного моделирования волнового поля в такой рассеивающей среде не проводилось.

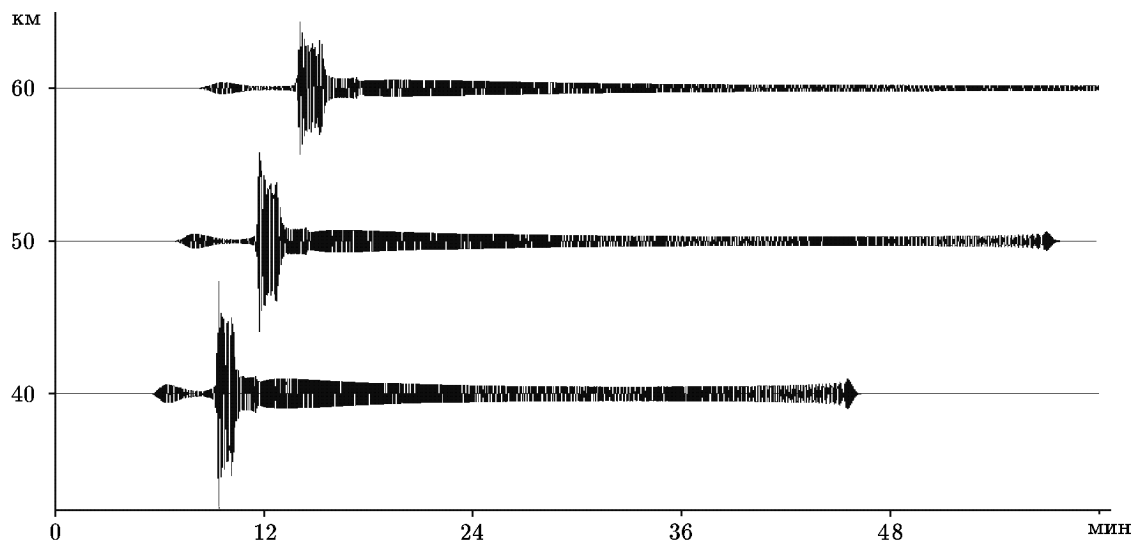


Рис. 4. Расчет часовой записи компоненты u_z для одного верхнего слоя в модели 1. Приемники расположены на расстоянии 40, 50 и 60 км от источника

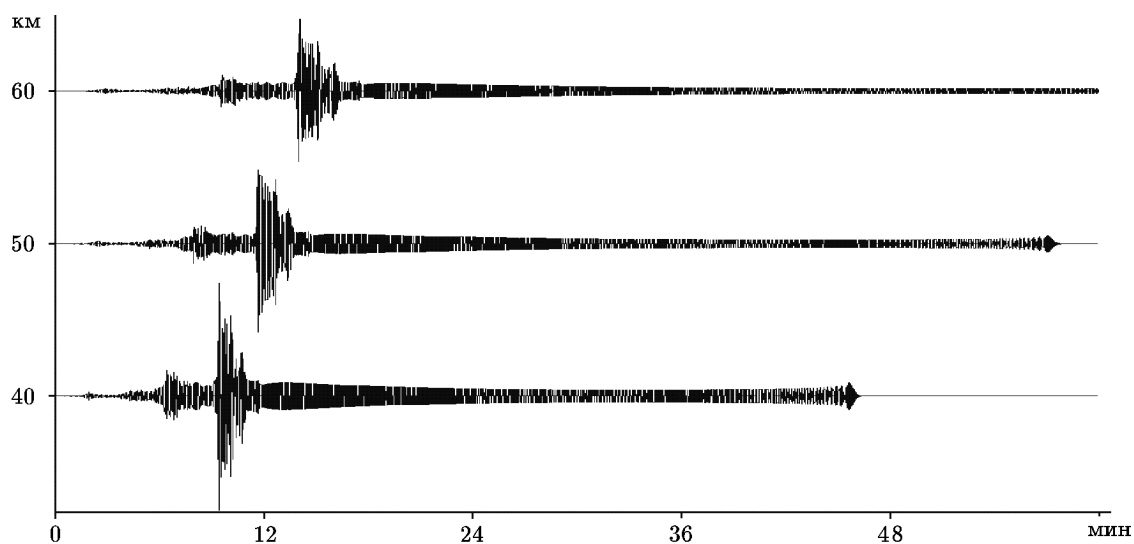


Рис. 5. Расчет часовой записи компоненты u_z для модели 3. Приемники расположены на расстоянии 40, 50 и 60 км от источника

Из результатов моделирования следует, что для модели 2 в течение одной минуты колебания затухают полностью, “звона” в этом случае нет.

На рис. 4 приведен пример синтетического часового расчета для одного верхнего слоя в модели 1, а на рис. 5 — для модели 3. Как видно, “звон” на этих рисунках имеет значительную длительность, на больших удалениях превосходящую часовой интервал.

Таким образом, приведенные результаты моделирования показывают существенную зависимость длительности “звона” от наличия тонкого низкоскоростного слоя (ЗМС). Значительная длительность “звона” наблюдается при наличии ЗМС и в модели верхней части глубинного разреза Луны [12], и в ее общей модели [13]. Если же брать модель Луны без ЗМС (модель 2), то волновое поле имеет длительность меньше минуты, “звона” не наблюдается. Результаты моделирования позволяют сделать следующий вывод. В первом приближении “сейсмический звон” на Луне может быть объяснен резонансными свойствами тонкого слоя без привлечения эффектов рассеяния, обусловленных высокой степенью неоднородности среды.

4. Аналитическое моделирование волновых полей в средах сложной структуры

Важное значение в задачах разведочной геофизики имеет численное моделирование распространения упругих волн в слоистых средах с пластами пористых, насыщенных вязкой жидкостью пород. Для описания волновых процессов в таких средах часто используются уравнения теории Френкеля–Био в том или ином виде [15, 16]. Отметим, что характер изменения скорости волны второго рода для модели Био совпадает с соответствующими зависимостями в нелинейной модели [17]. Аналитический метод моделирования волновых полей для пористой среды Френкеля–Био разработан в [18].

Неоднородная среда часто устроена так, что ее характерные размеры, например по глубине, меняются в широких пределах. Известно [7], что в этом случае практически невозможно рассматривать такую задачу в рамках детерминированного подхода. В любом случае использование детерминированных подходов требует значительных вычислительных затрат.

Для построения модели разномасштабной неоднородности используется телеграфный случайный процесс [19]:

$$\xi(z) = a(-1)^{n(0,z)}, \quad \xi(0) = a, \quad \xi^2(z) = a^2.$$

Здесь $n(z_1, z_2)$ — случайная последовательность целых чисел, описывающая количество скачков на интервале (z_1, z_2) . Вероятность выпадения n точек на интервале (z_1, z_2) определяется формулой Пуассона:

$$P_{n(z_1, z_2)=n} = \frac{\langle n(z_1, z_2) \rangle^n}{n!} e^{-\langle n(z_1, z_2) \rangle}.$$

Здесь $\langle n(z_1, z_2) \rangle$ — среднее значение точек на интервале (z_1, z_2) :

$$\langle n(z_1, z_2) \rangle = \nu |z_2 - z_1|, \quad (21)$$

где ν — среднее число точек, приходящихся на единицу расстояния. Длина интервала между соседними скачками при этом имеет экспоненциальное распределение.

Построение уравнения для разномасштабной среды для наглядности иллюстрируется на примере волнового уравнения продольных волн в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (22)$$

После преобразования Фурье–Бесселя уравнение (22) будет выглядеть следующим известным образом (несущественные индексы опущены):

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 \cdot u - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot u = \nu_p^2 \cdot u. \quad (23)$$

Для рассмотрения разномасштабной среды в (23) используем телеграфный случайный процесс $\xi(z)$ таким образом:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = k^2 \cdot u - \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \xi(z)] \cdot u. \quad (24)$$

При этом решение уравнения (24), как некий функционал от $\xi(z)$, имеет случайный характер. Применительно к практическим приложениям рассмотрим среднее значение флуктуирующего поля $\langle u \rangle$. В работе [20] получено точное замкнутое уравнение для среднего значения поля

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \langle u \rangle}{dz^4} + 4\nu \frac{d^3 \langle u \rangle}{dz^3} + \left(4\nu^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \nu_p^2 \right) \frac{d^2 \langle u \rangle}{dz^2} - \\ 4\nu\nu_p^2 \frac{d \langle u \rangle}{dz} - \left(\frac{\omega^4}{c^4} a^4 + 4\nu^2 \nu_p^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \nu_p^2 \right) \langle u \rangle = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, вместо “обычного” волнового уравнения второго порядка (23) в случае случайно-неоднородной среды будет уравнение четвертого порядка для среднего значения поля. К уравнению (25) добавляются соответствующие краевые условия для среднего значения поля [21]. В (25) параметр a определяет величину разномасштабности неоднородности, а $r_0 = 1/2\nu$ — характерный размер неоднородности (кусковатости) среды. Отметим, что параметры a и r_0 могут быть произвольными величинами. В работе [21] разработан аналитический метод решения (25).

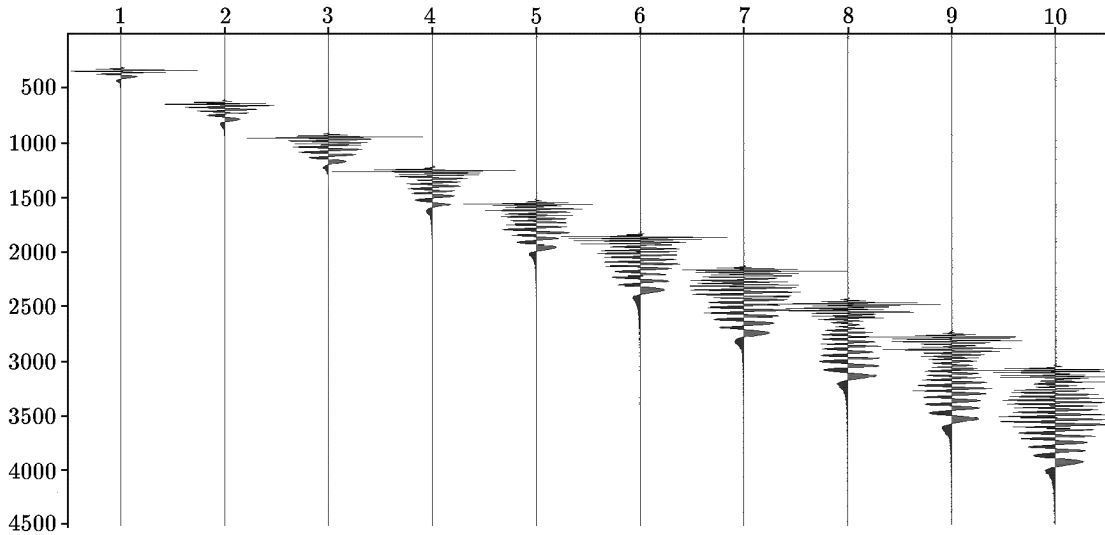


Рис. 6. Среднее значение волнового поля на дневной поверхности для случайно-неоднородной среды. Характерный размер неоднородности $\lambda/4$

На рис. 6 приведены волновые поля для среднего значения поля в случае значительного удаления системы источник–приемник с большой разномасштабностью неоднородности. Выдача производится на свободной поверхности. Характерный размер неоднородности $r_0 = \lambda/4$ (λ — длина волны). Первый приемник расположен на расстоянии 30λ от

источника, последний — 300λ (по горизонтальной координате). По вертикальной координате выдается время. Как видно из рис. 6, на малых расстояниях эффекты разномасштабности значительно меньше, чем на больших. С удалением приемника от источника волновая картина существенно изменяется. Энергия существенно перераспределяется в область низких частот.

При анализе экспериментальных данных полевых работ в районе вулкана Шуго (Краснодарский край, Россия) была выяснена особенность волнового поля, связанная с появлением ряда резонансов в низкочастотном диапазоне частот. При этом резонанс монотонно смещается в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации [22], что не имеет наглядного физического объяснения. Это явление может быть просто объяснено разномасштабными эффектами (кусковатостью) среды. Как видно из рис. 6, частота разномасштабной волны монотонно убывает с ростом расстояния. Это полностью объясняет эффект монотонного уменьшения частоты с ростом расстояния, обнаруженный при практических наблюдениях.

Аналитический метод моделирования разработан для широкого круга геофизических сред, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. д. Источники могут быть сосредоточенными и распределенными, описывая сейсмические, сейсмологические и вибрационные процессы [23]. Поскольку решение дается аналитическими выражениями, расчеты на сверхдальние расстояния можно проводить на “обычных” компьютерах без использования технологии высокопроизводительных вычислений.

Кроме того, аналитический метод может служить для количественного контроля точности конечно-разностных методов. В работе [24] проведено сравнение аналитического и сеточного методов. Там выяснено, что в сеточных методах для проведения безартефактных расчетов нужно брать не просто маленький шаг разностной схемы, но он еще должен пропорционально уменьшаться с ростом времени записи (увеличением пространственно-временных масштабов).

Заключение

В работе развит аналитический метод моделирования сейсмических волновых полей для широкого круга геофизических сред, включая упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые и т. д. Поскольку решение дается аналитическими выражениями, расчеты можно проводить на “обычных” компьютерах на сверхдальние расстояния без использования технологии высокопроизводительных вычислений. Аналитический подход позволяет рассчитывать как полные волновые поля для значительных пространственно-временных масштабов, так и проводить анализ волнового поля по частям. Проанализированы морские экспериментальные данные. Показано, что учет поглощения существенно приближает модельные данные к реальным. Проведено моделирование лунных сейсмограмм, характеризующихся значительной длительностью сейсмического сигнала (“звона”). На основе созданной программы расчета волновых полей проведено моделирование сейсмического “звона” на Луне. Результаты расчетов показывают, что при наличии в среде зоны малых скоростей возникает сейсмический “звон”, что приводит к значительному увеличению длительности записи сейсмического сигнала. Результаты моделирования позволяют сделать следующий вывод. В первом приближении значительная длительность сейсмического “звона” на Луне может быть объяснена резонансными свойствами тонкого слоя без привлечения эффектов рассеяния за счет высокой степени неоднородности среды.

Аналитический метод моделирования развит для сред сложного строения и структуры, включающих упругие, неупругие, анизотропные, анизотропно-неупругие, пористые, случайно-неоднородные и т. д. Источники могут быть сосредоточенными и распределенными, включая тензор сейсмического момента, что позволяет рассматривать сейсмические, сейсмологические и вибрационные процессы.

Объяснено явление монотонного смещения резонанса в область более низких частот с увеличением расстояния регистрации, обнаруженное при экспериментальных работах с вибратором.

Литература

1. **Коновалов А.Н.** Численное решение задач теории упругости в напряжениях: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979.
2. **Михайленко Б.Г.** Моделирование распространения сейсмических волн в неоднородных средах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2003. — Т. 6, № 4. — С. 415–429.
3. **Молотков Л.А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. — Л.: Наука, 1984.
4. **Фатьянов А.Г.** Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // ДАН. — 1990. — Т. 310, № 2. — С. 323–327.
5. **Фатьянов А.Г.** Математическое моделирование волновых полей в средах с криволинейными границами // ДАН. — 2005. — Т. 401, № 4. — С. 529–532.
6. **Бреховских Л.М., Гордин О.А.** Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989.
7. **Аки К., Ричардс П.** Количественная сейсмология. — М.: Мир, 1983.
8. **Михайленко Б.Г., Фатьянов А.Г.** Полуаналитический метод расчета нестационарных волновых полей для слоисто-однородных моделей сред // Математические методы решения прямых и обратных задач геофизики. — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1981. — С. 92–104.
9. **Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г.** Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // ДАН. — 1988. — Т. 301, № 4. — С. 834–839.
10. Глубинное сейсмическое зондирование литосферы на Анголо-Бразильском геотраверсе / С.М. Зверев, И.П. Косминская, Ю.В. Тулина. — М.: Изд-во НГК РАН, 1996.
11. **Бурмин В.Ю., Фатьянов А.Г.** Аналитическое моделирование волновых полей на сверхдальние расстояния и экспериментальные исследования водных волн // Физика Земли. — 2009. — № 4. — С. 43–55.
12. **Галкин И.Н., Шварев В.В.** Строение Луны. — М.: Знание, 1977.
13. **Nakamura Y., Dorman J., Duennebier F., Lammlein D., and Latham G.** Shallow lunar structure determined from the passive seismic experiment // The Moon. — 1975. — Vol. 13. — P. 57–66.
14. **Latham G., Ewing M., Press F., Sutton G., Dorman J., Nakamura Y., Toksoz N., Wiggins R., Derr J., and Duennebier F.** Apollo 11 passive seismic experiment // Geochim. Cosmochim. Acta. — 1970. — Vol. 34, suppl. 1. — P. 2309–2320.
15. **Biot M.A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid // J. Acoustical Soc. America. — 1956. — Vol. 28, № 2. — P. 168–191.
16. **Френкель Я.И.** К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Известия АН СССР. Сер. Географическая и геофизическая. — 1944. — Т. 8, № 4. — С. 133–150.

17. **Блохин А.М., Доровский В.Н.** Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1994.
18. **Мирошников В.В., Фатьянов А.Г.** Полуаналитический метод расчета волновых полей в слоистых пористых средах // Тр. ИВМиМГ СО РАН. Серия: Математическое моделирование в геофизике. — Новосибирск, 1993. — Вып. 1. — С. 27–58.
19. **Кляцкин В.И.** Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001.
20. **Шапиро В.Е., Логинов В.М.** Динамические системы при случайных воздействиях. — Новосибирск: Наука, 1983.
21. **Алексеев А.С., Глинский Б.М., Ковалевский В.В., Фатьянов А.Г. и др.** Методы решения прямых и обратных задач сейсмологии, электромагнетизма и экспериментальные исследования в проблемах изучения геодинамических процессов в коре и верхней мантии Земли / Б.Г. Михайленко, М.И. Эпов. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2010.
22. **Глинский Б.М., Собисевич А.Л., Фатьянов А.Г., Хайретдинов М.С.** Математическое моделирование и экспериментальные исследования грязевого вулкана Шуго // Вулканология и сейсмология. — 2008. — № 5. — С. 69–77.
23. **Фатьянов А.Г.** Прямые и обратные задачи для тензора сейсмического момента в слоистых средах // ДАН. — 1991. — Т. 317, № 6. — С. 1357–1361.
24. **Fatyanov Alexey G., Terekhov Andrew V.** High-performance modeling acoustic and elastic waves using the Parallel Dichotomy Algorithm // J. of Computational Physics. — 2011. — Vol. 230. — P. 1992–2003.

*Поступила в редакцию 19 ноября 2013 г.,
в окончательном варианте 25 ноября 2013 г.*