ПМТФ, № 1, 1961

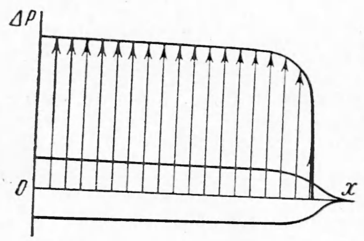
К ИЗУЧЕНИЮ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА. КРЕСТООБРАЗНАЯ ТРЕЩИНА

Г. В. Вронский, Л. Н. Карпенко

(Москва, Новосибирск)

Рассматривается совместное развитие простейшей системы двух крестообразных вертикальных трещин различной длины при гидравлическом разрыве. При этом авторы следуют, в основном, результатам работы [1], существенно используя сделанные допущения и принимая основную гипотезу о конечности напряжений в вершине трещин.

1. Для образования трещин (разрывов) в пласте в него закачивают под большим давлением нефть или специальную вязкую жидкость. Обозначим через p_∞ — давление жидкости в порах разрываемого пласта. При повышении давления p_0 на забое скважины расход жидкости Q связан вначале с избыточным давлением $\Delta p_0 = p_0 - p_\infty$ линейной зависимостью (закон Дарси), которая нарушается при образовании трещин, после чего давление Δp_0 быстро уменьшается, если расход Q сохранять неизменным. Этот факт характерен для появления вертикальной трещины. В то же время, как отмечено в [1], при образовании горизонтальной трещины давление при постоянном расходе почти не изменяется. Различие этих фактов позволяет по наблюдениям за давлением p_0 указать на преимущественное развитие вертикальной или горизонтальной трещины.



Фиг. 1

В работе [1] на основе анализа условий возникновения горизонтальных и вертикальных трещин сделан вывод о том, что развитие вертикальных трещин в пласте без естественной трещиноватости (или без начальной трещины) практически невозможно, так как требует значительных давлений разрывающей жидкости; раскрытие же начальной трещины, имевшейся до закачки жидкости, обеспечивается избыточным давлением Δp_0, лишь ненамного превышающим боковое давление q_∞. При этом принимается, что боковое равномерное сжатие скелета породы $q_\infty = \alpha q^*$, $0 < \alpha < 1$, где α зависит от пластичности породы пласта, а q^* — напряжение между зернами породы на площадках контакта зерен, $q^* = q - q_\infty$, где в свою очередь, q — горное давление на глубине H. Ниже будет рассматриваться задача о развитии вертикальных трещин, образующихся при закачке нефильтрующейся жидкости. При этом считается, что о развитии одиночной трещины нам известны следующие факты.

Пусть дана трещина (фиг. 1), нагруженная давлением жидкости $\Delta p(x) = p(x) - p_\infty$. Здесь $p = p(x)$ — давление жидкости в трещине, зависящее от относительного расстояния $x = x'/l$ до оси скважины 0 следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{3\eta l}{2h\delta^3} Q \tag{1.1}$$

где x' — размерная координата вдоль трещины, l — длина трещины,

δ — половина ее ширины, h — толщина разрываемого пласта, η — вязкость разрывающей жидкости.

Если обозначать $\delta = \delta_0 \Phi(x)$, $\Phi(0) = 1$, то из (1.1) получим

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_0} = 1 - \frac{3Q\eta l}{2h\delta_0^3 \Delta p_0} \int_0^x \frac{dx}{\Phi^3(x)} \tag{1.2}$$

Считается, что ширина трещины на большей части ее длины практически постоянна, но резко уменьшается к концу (вершине), и основное падение давления происходит в узкой области вблизи конца трещины; поэтому следует ожидать, что форма трещины мало изменится от замены реальной нагрузки $\Delta p(x)$ статически ей эквивалентной прямоугольной нагрузкой Δp_0°, приложенной на участке $[0, x_0^\circ]$; величина x_0° близка к длине x_0 участка, на который закачанная жидкость проникла в трещину, Δp_0° близко к Δp_0.

В результате приближенного решения задачи о развитии вертикальной трещины в пласте (влияние скважины приближенно учитывается фиктивной симметричной частью трещины) в работе [1] получена формула для ширины трещины

$$\delta = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\Delta p_0}{2\pi} l \left[\cos\vartheta \ln \frac{\sin|\vartheta - \vartheta_0|}{\sin(\vartheta + \vartheta_0)} + \cos\vartheta_0 \ln \frac{\operatorname{tg}{}^1\!/_2(\vartheta + \vartheta_0)}{\operatorname{tg}{}^1\!/_2\,|\vartheta - \vartheta_0|}\right] \tag{1.3}$$

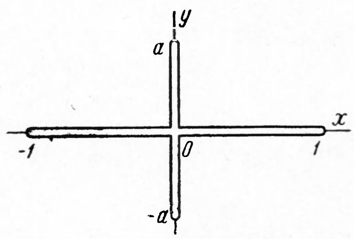
и выписано условие Христиановича конечности напряжений в вершине трещины

$$\frac{\Delta p_0}{q_\infty} = \frac{1}{1 - 2\vartheta/\pi} \qquad (x = \cos\vartheta,\ x_0^\circ = \cos\vartheta_0) \tag{1.4}$$

Здесь E — модуль упругости породы, ν — коэффициент Пуассона.

На основе формул (1.3) и (1.4), а также из условий статической эквивалентности истинной нагрузки и принятой в работе прямоугольной нагрузки можно найти все необходимые величины, характеризующие развитие трещины: ее размеры, объем закачанной жидкости и т. д.

2. Рассмотрим крестообразный разрез плоскости xy, имитирующий взаимно перпендикулярные трещины в породе (фиг. 2). Все размеры отнесены к половине длины трещины, расположенной вдоль оси Ox.



Фиг. 2

Математическая постановка задачи в точности совпадает с постановкой задачи в [1] для одиночной трещины. Сделано допущение о замене реальных распределений давления жидкости по длине трещин постоянными осредненными давлениями: Δp_1°, для трещины вдоль оси Ox на участке $[-x_0^\circ, x_0^\circ]$ и Δp_2° — для трещины вдоль Oy на участке $[-y_0^\circ, y_0^\circ]$. Полупространства по обе стороны осей Ox и Oy, по которым проходят вертикальные плоскости разрезов, имитирующих трещины, прижимаются один к другому действием бокового давления q_∞.

Отличие от постановки задачи в [1] состоит в том, что здесь рассматриваются симметричные относительно скважины трещины, в то время как авторы работы [1] вводят симметричную часть трещины только для приближенного учета влияния скважины на форму трещины. Изучение поля напряжений и смещений в пространстве с вертикальными разрезами выполнено методами теории функций комплексного переменного [2]. Можно выписать функцию, отображающую плоскость с разрезами (фиг. 2) на единичный круг. Но при этом возникают трудности: отображающая функция оказывается иррациональной, а приближенное ее представление рядом недопустимо по существу задачи, так как при этом искусственно искажается форма трещины в угловых точках, где по условию Христиановича стенки трещины смыкаются плавно ($d\delta/dx = 0$). Можно решать задачу методом последовательных приближений, рассматривая поочередно одиночную трещину в поле напряжений, вызванном в пласте перпендикулярной ей трещиной. Вообще говоря, остается открытым вопрос о сходимости метода, доказанный в [3] лишь для двусвязной области с разнесенными контурами; но в статье решение строится при помощи этого метода и проводится численное исследование без оценки сходимости метода в общем случае.

3. Следуя методу последовательных приближений, рассмотрим симметричную трещину вдоль оси Ox, нагруженную давлением жидкости. Длина трещины *2*, нагрузка на стенки трещины задана законом

$$p = \begin{cases} \Delta p_1^\circ, & |x| \leqslant x_0^\circ \\ 0, & |x| > x_0^\circ \end{cases} \tag{3.1}$$

По формулам (4.16), (4.20) — (4.22) из [1] найдем смещения на контуре щели

$$v = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\Delta p_1^\circ}{2\pi}\left[\cos\vartheta \ln \frac{\sin|\vartheta-\vartheta_0^{(1)}|}{\sin(\vartheta+\vartheta_0^{(1)})} + \right.$$

$$\left. + \cos\vartheta_0^{(1)} \ln\frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 (\vartheta+\vartheta_0^{(1)})}{\operatorname{tg} {}^1/_2 |\vartheta-\vartheta_0^{(1)}|} + (\pi - 2\vartheta_0^{(1)})\sin\vartheta\right] \tag{3.2}$$

напряжение на оси Oy

$$\sigma_{x1} = \frac{2\Delta p_1^\circ}{\pi}\left\{\frac{\sin 2\vartheta_0^{(1)}}{\rho^4 + 2\rho^2\cos 2\vartheta_0^{(1)} + 1}\,\frac{2\rho^2(\rho^2-1)}{\rho^2+1} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg}\frac{\sin 2\vartheta_0^{(1)}}{\rho^2 + \cos 2\vartheta_0^{(1)}} + \frac{\pi - 2\vartheta_0^{(1)}}{\rho^2+1}\left[\frac{2\rho^2(\rho^2-1)}{(\rho^2+1)^2} - 1\right]\right\} \tag{3.3}$$

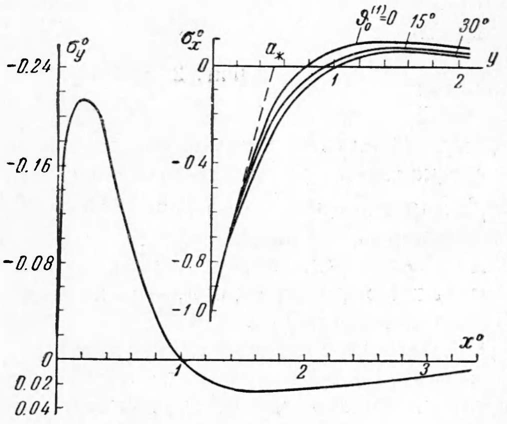
Здесь

$$\rho = y + \sqrt{1+y^2}, \quad x = \cos\vartheta, \quad x_0^\circ = \cos\vartheta_0^{(1)}$$

Далее рассмотрим трещину длиной $2a$, расположенную вдоль оси Oy и нагруженную на участке $[-y_0^\circ, y_0^\circ]$ давлением Δp_2^0 и на участке $[-a, a]$ — нагрузкой, равной напряжениям σ_{x1} из (3.3). От нагрузки Δp_2° смещения u на контуре щели и напряжения σ_{y2} на оси Ox определяются формулами (3.2) и (3.3) соответственно, в которых вместо индексов 1 следует поставить индекс 2 и полагать

$$\rho = \frac{x}{a} + \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$$

$$y = a\cos\vartheta, \quad y_0^\circ = a\cos\vartheta_0^{(2)}$$



Фиг. 3

Далее на эти смещения и напряжения нужно наложить смещения и напряжения, полученные от нагрузки, равной напряжениям σ_{x1}, определяемым формулой (3.3). Из фиг. 3 (где $\sigma_x^\circ = \sigma_{x1}/\Delta p_1^\circ$) видно, что эти напряжения слабо зависят от $\vartheta_0^{(1)}$ при $\vartheta_0^{(1)}$ малом. Если и a мало, то можно считать (фиг. 3)

$$\sigma_{x1} \approx -\Delta p_1^\circ \left(1 - \frac{y}{a_*}\right), \quad y \geqslant 0 \quad (a_* \approx 0.52) \tag{3.4}$$

Итак, добавочная нагрузка, обусловленная тем, что малая трещина находится в поле напряжений первой трещины, равна

$$p_\Delta = \begin{cases} -\Delta p_1^\circ \left(1 - \dfrac{y}{a_*}\right) & (0 \leqslant y \leqslant a) \\ -\Delta p_1^\circ \left(1 + \dfrac{y}{a_*}\right) & (-a \leqslant y \leqslant 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

Согласно методу решения плоской задачи теории упругости ([2], гл. 5) находим равнодействующую нагрузки

$$f = \int_0^y p_\Delta \, dy + \mathrm{const} = \begin{cases} -\Delta p_1^\circ \left(y + \dfrac{y^2}{2a_*}\right) & (y \leqslant 0) \\ -\Delta p_1^\circ \left(y - \dfrac{y^2}{2a_*}\right) & (y \geqslant 0) \end{cases} \tag{3.6}$$

Внешность нашей щели отображается конформно на внешность круга единичного радиуса в плоскости комплексной переменной $\xi = \rho e^{i\vartheta}$ функцией

$$y + ix = z = \omega(\xi) = \frac{a}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$$

Так как функция $f(z)$ на контуре щели вещественна, то формулы для напряжений и смещений выглядят так:

$$2\mu(v + iu) = \chi\varphi + \overline{\varphi} \tag{3.7}$$

$$\vartheta\vartheta = \mathrm{Re}\left[2\frac{\varphi'}{\omega'} + \frac{2\xi^2}{\rho^2}\frac{\omega - \overline{\omega}}{\omega'\overline{\omega}'}\left(\frac{\omega''}{\omega'}\varphi' - \varphi''\right)\right], \qquad \varphi(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f}{\sigma - \xi}\, d\sigma$$

Здесь u и v — смещения в направлении осей x и y соответственно. Из (3.6) и (3.7) находим

$$-\frac{2\pi i}{a\Delta p_1^\circ}\varphi_\Delta(\xi) = -\frac{\pi i}{\xi} + \frac{a}{8a_*}\left[-4i\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 \ln \frac{(\exp {}^3/_2\, \pi i - \xi)^2}{(\exp {}^1/_2\, \pi i - \xi)(\exp {}^5/_2\, \pi i - \xi)}\right] \tag{3.8}$$

Смещение контура щели в поперечном направлении

$$u_\Delta = \frac{1 - \nu^2}{E}\frac{a\Delta p_1^\circ}{2\pi}\left[-\pi\sin\vartheta + \frac{a}{a_*}\left(\sin\vartheta + \cos^2\vartheta \ln\frac{\cos\vartheta}{1 - \sin\vartheta}\right)\right] \tag{3.9}$$

Напряжения на оси Ox

$$\sigma_{y\Delta} = \vartheta\vartheta(i\rho) = \frac{2\Delta p_1^\circ}{\pi}\left\{-\frac{\pi(\rho^4 - 4\rho^2 - 1)}{(\rho^2 + 1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho^2 - 1}{\pi}\frac{a}{a_*}\left[\frac{2(\rho^4 + 4\rho^2 + 1)}{(\rho^2 + 1)^3} - \frac{1}{\rho}\ln\frac{\rho + 1}{\rho - 1}\right]\right\} \tag{3.10}$$

Чтобы получить полные напряжения и смещения, соответствующие первому приближению, к этим решениям нужно прибавить решения от нагрузки Δp_2°. Итак

$$u_1 = \frac{1 - \nu^2}{E}\frac{a\Delta p_2^\circ}{2\pi}\left[\cos\vartheta \ln\frac{\sin(\vartheta - \vartheta_0^{(2)})}{\sin(\vartheta + \vartheta_0^{(2)})} + \cos\vartheta_0^{(2)} \ln\frac{\mathrm{tg}\, {}^1/_2(\vartheta + \vartheta_0^{(2)})}{\mathrm{tg}\, {}^1/_2(\vartheta - \vartheta_0^{(2)})} + \right.$$
$$\left. + (\pi - 2\vartheta_0^{(2)})\sin\vartheta\right] + \frac{1 - \nu^2}{E}\frac{a\Delta p_1^\circ}{2\pi}\left[-\pi\sin\vartheta + \right. \tag{3.11}$$
$$\left. + \frac{a}{a_*}\left(\sin\vartheta + \cos^2\vartheta \ln\frac{\cos\vartheta}{1 - \sin\vartheta}\right)\right]$$

$$\sigma_{y1} = \frac{2\Delta p_2^\circ}{\pi}\left\{\frac{\sin 2\vartheta_0^{(2)}}{\rho^4+2\rho^2\cos^2\vartheta_0^{(2)}+1}\,\frac{2\rho^2(\rho^2-1)}{\rho^2+1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin 2\vartheta_0^{(2)}}{\rho^2+\cos 2\vartheta_0^{(2)}} + \right.$$
$$\left. + (\pi - 2\vartheta_0^{(2)})\frac{\rho^4-4\rho^2-1}{(\rho^2+1)^3}\right\} + \frac{2\Delta p_1^\circ}{\pi}\left\{-\frac{\pi(\rho^4-4\rho^2-1)}{(\rho^2+1)^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho^2-1}{\pi}\frac{a}{a_*}\left[\frac{2(\rho^4+4\rho^2+1)}{(\rho^2+1)^3} - \frac{1}{\rho}\ln\frac{\rho+1}{\rho-1}\right]\right\} \qquad (3.12)$$

На этом закончено первое приближение. Далее нужно рассмотреть вновь первую трещину, нагруженную давлением, равным σ_{y_1}, и т. д.

Исходя из первоначального предположения, что Δp_1° и Δp_2° мало отличаются от Δp_0, на фиг. 3 была построена кривая $\sigma_y^\circ = a_* \sigma_{y_1}/a\Delta p^\circ$ от $x^\circ = x/a$ (от $\vartheta_0^{(2)}$ напряжение σ_y° зависит слабо).

Как видно, напряжение достигает лишь 0.22 $(a/a_*)\,\Delta p^\circ$ и действует оно на длине порядка $(a < a_*)$ на небольшой части длины первой трещины, так как a, по крайней мере, в 2—3 раза меньше единицы. Очевидно, влияние столь незначительной по сравнению с Δp° нагрузки на длинную трещину и, тем более, обратное влияние на короткую — будут невелики, поэтому процесс последовательных приближений был прерван после первого шага.

Осталось на полученные решения для смещений наложить смещения от сжатия q_∞. Эта задача — частный случай уже решенной ($\Delta p_1^\circ = \Delta p_2^\circ = -q_\infty$, $\vartheta_0^{(1)} = \vartheta_0^{(2)} = 0$). Получим следующие формулы для смещений горизонтальной и вертикальной щелей:

$$v = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\Delta p_0}{2\pi}\left[\cos\vartheta\ln\frac{\sin(\vartheta-\vartheta_0^{(1)})}{\sin(\vartheta+\vartheta_0^{(1)})} + \cos\vartheta_0^{(1)}\ln\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0^{(1)})}{\operatorname{tg}{}^1/_2|\vartheta-\vartheta_0^{(1)}|} + \right.$$
$$\left. + (\pi - 2\vartheta_0^{(1)})\sin\vartheta\right] - \frac{1-\nu^2}{E}\frac{q_\infty}{2}\sin\vartheta \qquad (3.13)$$

$$u = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{a\Delta p_2^\circ}{2\pi}\left[\cos\vartheta\ln\frac{\sin(\vartheta-\vartheta_0^{(2)})}{\sin(\vartheta+\vartheta_0^{(2)})} + \cos\vartheta_0^{(2)}\ln\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0^{(2)})}{\operatorname{tg}{}^1/_2|\vartheta-\vartheta_0^{(2)}|} + \right.$$
$$\left. + (\pi - 2\vartheta_0^{(2)})\sin\vartheta\right] - \frac{1-\nu^2}{E}\frac{a(\Delta p_1^\circ - q_\infty)}{2\pi} \times$$
$$\times \left[-\pi\sin\vartheta + \frac{a}{a_*}\left(\sin\vartheta + \cos^2\vartheta\ln\frac{\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)\right] \qquad (3.14)$$

Потребуем конечность напряжения на контуре крестообразной трещины или, что равносильно, плавность смыкания берегов разрезов у вершин. Для этого должны выполняться следующие соотношения:

$$\vartheta_0^{(1)} = \frac{\Delta p_1^\circ - q_\infty}{\Delta p_1^\circ}\frac{\pi}{2}, \qquad \vartheta_0^{(2)} = \frac{a}{a_*}\frac{\Delta p_1^\circ - q_\infty}{\Delta p_2^\circ} - \frac{\pi}{2}\frac{\Delta p_1^\circ - \Delta p_2^\circ}{\Delta p_2^\circ} \qquad (3.15)$$

Введем их в (3.13) и (3.14). Смещение контура длинной щели будем отмечать индексом v_1, а короткой — v_2.

$$v_1 = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\Delta p_1^\circ}{2\pi}\left[\cos\vartheta\ln\frac{\sin|\vartheta-\vartheta^{\circ(1)}|}{\sin(\vartheta+\vartheta_0^{(1)})} + \cos\vartheta_0^{(1)}\ln\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0^{(1)})}{\operatorname{tg}{}^1/_2(\vartheta-\vartheta_0^{(1)})}\right] \qquad (3.16)$$

$$v_2 = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{a\Delta p_2^\circ}{2\pi}\left[\cos\vartheta\ln\frac{\sin(\vartheta-\vartheta_0^{(2)})}{\sin(\vartheta+\vartheta_0^{(2)})} + \cos\vartheta_0^{(2)}\ln\frac{\operatorname{tg}{}^1/_2(\vartheta+\vartheta_0^{(2)})}{\operatorname{tg}{}^1/_2|\vartheta-\vartheta_0^{(1)}|}\right] +$$
$$+ \frac{1-\nu^2}{E}a\,\frac{\Delta p_2^\circ\vartheta_0^{(2)} + {}^1/_2\pi(\Delta p_1^\circ - \Delta p_2^\circ)}{2\pi}\left[-\sin\vartheta + \cos^2\vartheta\ln\frac{\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right] \qquad (3.17)$$

Формула (3.16) повторяет (1.3), что совершенно естественно.

4. Выведем некоторые вспомогательные соотношения. Имеем уравнение, связывающее давление разрывающей жидкости и форму трещины

$$Q = -\frac{4}{3}\frac{\delta^3 h}{\eta l}\frac{dp}{dx} \qquad (4.1)$$

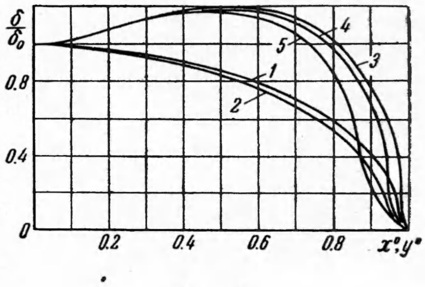
Обозначения те же, что и в п. 1. Это уравнение верно для обеих трещин, только для второй дифференцировать следует по y.

Обозначим, следуя [1]

$$A = \frac{3}{4}\frac{Q\eta l}{\delta_0 \Delta p_0 h}, \qquad \delta_1 = \delta_0^{(1)}\Phi_1(x)$$

$$\delta_2 = \delta_0^{(2)}\Phi_2\left(\frac{y}{a}\right) \qquad (4.2)$$

и, интегрируя (4.1), найдем формулы для распределения давления по длине трещин



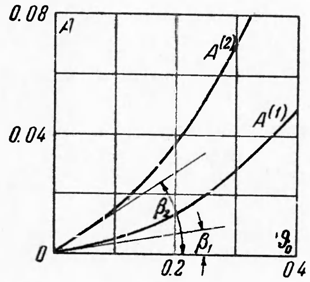
Фиг. 4

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_0} = 1 - A_1\int_0^x \frac{dx}{\Phi_1^3(x)}, \qquad \frac{\Delta p_2}{\Delta p_0} = 1 - A_2\int_0^{y/a}\frac{d(y/a)}{\Phi_2^3(y/a)} \qquad (4.3)$$

Через x_0 обозначим координату, где $\Delta p_1 = 0$, аналогично $\Delta p_2(y_0) = 0$

$$\int_0^{x_0}\frac{dx}{\Phi_1^3(x)} = \frac{1}{A_1}, \qquad \int_0^{y_0/a}\frac{d(y/a)}{\Phi_2^3(y/a)} = \frac{1}{A_2} \qquad (4.4)$$

Выпишем еще условия статической эквивалентности реальных нагрузок на трещины нагрузкам $\Delta p_1°$ и $\Delta p_2°$



Фиг. 5

$$\frac{\Delta p_1°}{\Delta p_0}x_0° = x_0 - A_1\int_0^{x_0}\int_0^{\beta}\frac{d\alpha}{\Phi_1^3(\alpha)}d\beta$$

$$\frac{\Delta p_1°}{\Delta p_0}\frac{(x_0°)^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} - A\int_0^{x_0}\beta\int_0^{\beta}\frac{d\alpha}{\Phi_1^3(\alpha)}d\beta \qquad (4.5)$$

$$\frac{\Delta p_2°}{\Delta p_0}\frac{y_0°}{a} = \frac{y_0}{a} - A_2\int_0^{y_0/a}\int_0^{\beta}\frac{d\alpha}{\Phi_2^3(\alpha)}d\beta$$

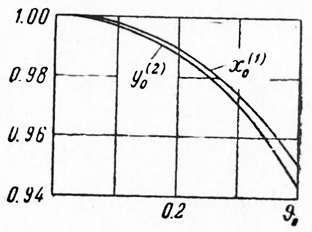
$$\frac{\Delta p_2°}{\Delta p_0}\frac{(y_0°)^2}{2a^2} = \left(\frac{y_0}{a}\right)^2 - A_2\int_0^{y_0/a}\int_0^{\beta}\frac{dx}{\Phi_2^3(\alpha)}d\beta$$

На фиг. 4 кривые *1* и *2* представляют $\Phi_1(x)$ при $\vartheta_0^{(1)} = 10$ и $20°$, кривые *3*, *4*, *5* представляют $\Phi_2(y/a)$ при $\vartheta_0^{(2)} = 10, 20, 30°$ соответственно. Результаты численного решения двух систем (4.4) и (4.5) представлены на фиг. 5—8, где введены следующие обозначения:

$$y_0^{(2)} = \frac{y_{02}}{a}, \qquad \Delta°p = \frac{\Delta p°}{\Delta p_0}, \qquad \Delta°p_\infty = \frac{\Delta p_0}{q_\infty}$$

Объем жидкости в трещине

$$V = 4\delta_0 hl\tau, \quad \tau_1 = \int_0^{x_0}\Phi_1(x)\,dx, \quad \tau_2 = \int_0^{y_0/a}\Phi_2(x)\,dx \qquad (4.6)$$

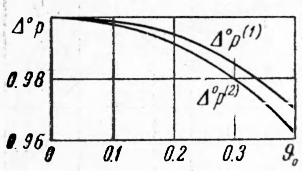


Фиг. 6

Значения $\tau_1(\vartheta_0^{(1)})$ и $\tau_2(\vartheta_0^{(2)})$ даны на фиг. 9. Можно считать $\tau_1 \approx {}^1/_4\pi$, $\tau_2 \approx 1$.

Теперь можно вывести формулы, связывающие основные характеристики крестообразной трещины,— расход жидкости, ее давление, объем, размеры трещины со временем. Сделаем это следующим образом.

В области малых $\vartheta_0^{(1)}$ и $\vartheta_0^{(2)}$ можно считать A_1 и A_2 пропорциональными $\vartheta_0^{(1)}$ и $\vartheta_0^{(2)}$ соответственно. Это оправдано, так как для образования вертикальной трещины нужно лишь небольшое превышение давления Δp_0 над q_∞, а в этом случае $\vartheta_0^{(1)}$ и $\vartheta_0^{(2)}$ будут малыми (это видно из (3.15). Итак, $A_1 = \beta_1\vartheta_0^{(1)}$, $A_2 = \beta_2\vartheta_0^{(2)}$, $\beta_1 = 0.03$, $\beta_2 = 0{,}13$, что приближенно верно для обоих углов при $\vartheta_0 < 0.15$.



Фиг. 7

При малых $\vartheta_0^{(1)}$, $\vartheta_0^{(2)}$ запишем

$$v_1 = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\Delta p_1^\circ}{2\pi}2\vartheta_0^{(1)} \quad \left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$$

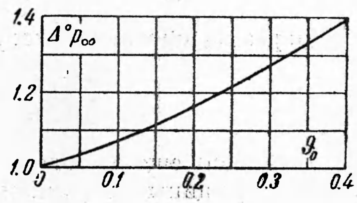
$$v_2 = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{a\Delta p_2^\circ}{2\pi}\left[\vartheta_0^{(2)} + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\Delta p_1^\circ}{\Delta p_2^\circ}\right)\right] \tag{4.7}$$

Имея в виду, что $\delta_0^{(1)} = l_1 v_1(\pi/2)$, $\delta_0^{(2)} = l_2 v_2(\pi/2)$, полагая $\Delta p_1^\circ = \Delta p_2^\circ = \Delta p_0$, что допустимо (фиг. 7), где $\Delta^\circ p = \Delta p^\circ / \Delta p_0$), и обозначив $\varepsilon = \Delta^\circ p_\infty - 1$, $\Delta^\circ p_\infty = \Delta p_0 / q_\infty$ из (4.2), (4.7), (3.15), найдем

$$\varepsilon^4 = \frac{B}{\beta_1}\frac{Q_1}{l_1^2} \qquad \left(B = \frac{12}{\pi}\frac{\eta}{hq^4_\infty[(1-\nu^2)/E]^3}\right) \tag{4.8}$$

Аналогичным образом найдем

$$\varepsilon^4 = \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{a_*}{a}\right)^4\frac{B}{\beta_2}\frac{Q_2}{l_2^2} \tag{4.9}$$

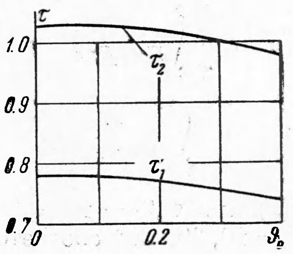


Фиг. 8

Из (4.6) получаем

$$V_1 = C\tau_1 l_1^2\varepsilon, \qquad V_2 = \frac{a}{\pi a_*}C\tau_2 l_2^2\varepsilon, \qquad C = \frac{1-\nu^2}{E}2hq_\infty \tag{4.10}$$

Соотношения (4.8), (4.10) дают связь между расходом и объемом жидкости в длинной трещине (жидкость считается нефильтрующейся)



Фиг. 9

$$Q_1 = \frac{dV_1}{dt} = \alpha_1\varepsilon^3 V_1 \qquad \left(\alpha_1 = \frac{\beta_1}{BC\tau_1}\right) \tag{4.11}$$

Рассмотрим два простых режима закачки жидкости.

а) На забое скважины давление постоянно $\varepsilon = \mathrm{const}$. Решением уравнения (4.11) будет

$$V_1 = V_0^{(1)}\exp[\alpha_1\varepsilon^3(t-t_0)], \quad V_0^{(1)} = V_1(t_0) \tag{4.12}$$

Из (4.10) находится следующее выражение для длины длинной трещины

$$l_1 = \sqrt{\frac{V_0^{(1)}}{C\tau_1\varepsilon}}\exp\left(\frac{\alpha_1\varepsilon^3}{2}(t-t_0)\right) \tag{4.13}$$

Вспомнив, что $l_2 = al_1$, из (4.9), (4.10), (4.13) получим уравнение для V_2

$$Q_2 = \frac{dV_2}{dt} = \frac{2\alpha_2}{\pi^2 a_*^2}\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{\varepsilon^3}{V_{01}}V_2^2\exp[-\alpha_1\varepsilon^3(t-t_0)] \qquad \left(\alpha_2 = \frac{\beta_2}{BC\tau_2}\right)$$

и его решение

$$V_2 = \frac{V_0^{(2)}}{1 - DV_0^{(2)}/V_0^{(1)}\{1-\exp[-\alpha_1\varepsilon^3(t-t_0)]\}}, \qquad D = \frac{2}{\pi^2 a_*^2}\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \tag{4.14}$$

Q_1 и Q_2 находятся дифференцированием (4.12) и (4.14). Найдем еще отношение длин трещин a

$$a^3 = \frac{l_2^2}{l_1^2} = \pi a_* \frac{\tau_1}{V_0^{(1)2}\tau_2\,(V_0^{(1)}\,/\,V_0^{(2)} - D)\,(\exp\,[\alpha_1\varepsilon^3\,(t - t_0)] - 1)} \qquad (4.15)$$

Со временем a стремится к нулю и $l_2 \to \mathrm{const}$.

Расход жидкости во вторую трещину исчезает, объем жидкости в ней имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} V_2 = \frac{V_0^{(2)}}{1 - D\,(V_0^{(2)}\,/\,V_0^{(1)})} \quad (\delta_0^2 \to 0).$$

Размеры и объем большей трещины растут.

б) Более интересен случай постоянного расхода жидкости в трещину; обычно он и осуществляется на практике $Q = Q_1 + Q_2 = \mathrm{const}$. В этом случае

$$V = V_1 + V_2 = V_0 + Q\,(t - t_0), \qquad V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} \qquad (4.16)$$

Из соотношений (4.8)—(4.10) получаем

$$\frac{Q_2\,/\,V_2^2}{Q_1\,/\,V_1^2} = D$$

и, используя (4.16), имеем

$$Q = \frac{dV_1}{dt} = \frac{Q}{1 + D\,\{[V_0 + Q\,(t - t_0)]\,/\,V_1 - 1\}} \qquad (4.17)$$

Из этого уравнения находим

$$V_1\left[1 + \frac{1}{D + (V_0^{(1)}\,/\,V_0^{(2)})\,(V_0^{(1)}\,/\,V_0^{(2)} - D)}\right] - V_0 - Q\,(t - t_0) = 0 \qquad (4.18)$$

Величина ε связана с V_1 формулой (4.11), а для l имеем из (4.8), используя (4.17)

$$l_1^6 = \left(\frac{V_1}{C\tau_1}\right)^4 \frac{\beta_1}{B}\,\frac{1}{Q_1} \qquad (4.19)$$

$$a^3 = \pi a_* \frac{\tau_1}{\tau_2}\left[D + \frac{V_1}{V_0^{(1)}}\left(\frac{V_0^{(1)}}{V_0^{(2)}} - D\right)\right]^{-1} \qquad (4.20)$$

Из (4.18) видно, что при $t \to \infty$ либо $V_1 \to \infty$, либо знаменатель стремится к нулю, но в последнем случае a растет неограниченно согласно (4.20). Однако выше предполагалось, что $a < a_*$; поэтому следует принять, что $V_1 \to \infty$ при $t \to \infty$ и

$$V_2 \to \frac{V_0^{(2)}}{1 - DV_0^{(2)}\,/\,V_0^{(1)}}, \qquad Q_2 \to 0$$

Отношение длин трещин a уменьшается до нуля, но $l_2^2\,/\,l_1 \to \mathrm{const}$, $\varepsilon \to 0$, т. е. давление жидкости падает до q_∞, и обычно настолько быстро, что появляется возможность измерить боковое горное давление [4].

Следует заметить, что предположение о малости углов $\vartheta_0^{(1)}$, $\vartheta_0^{(2)}$ оправдано, так как в наиболее практически важном режиме постоянного расхода $\vartheta_0^{(1)}$ и $\vartheta_0^{(2)}$ уменьшаются вместе с ε.

5. Полученные формулы позволяют оценить развитие крестообразной трещины в случае постоянного давления на забое скважины, а также в случае постоянного расхода разрывающей жидкости. В обоих этих случаях развитие одной из трещин подавляется, и практически только большая из них имеет значение для увеличения дебита скважины. Можно предположить, что и при образовании большого числа трещин одна из

них является как бы привилегированной и значительно опережает в развитии все остальные.

Полученные формулы показывают, что весьма скоро исследованная система трещин достигает состояния, когда практически вся закачиваемая жидкость поступает в более длинную трещину, объем которой становится в десятки раз больше объема другой.

Пример. Если при $Q = 20$ *л/сек* $= 1700$ *м*^{3}/сутки в какой-то момент длина малой трещины составляла половину длины большей, а объем жидкости в них отмечался в десять раз, то через час длины их будут отличаться уже в пять раз, а объемы — в сто раз. Давление жидкости за это время упадет от $1.35\ q_\infty$ до $1.15\ q_\infty$. При большом расходе отставание малой трещины будет еще более резким.

Следует заметить, что формулы, связывающие параметры трещин со временем, имеют скорее качественный, чем количественный характер, ввиду многочисленных упрощений в постановке и решении задачи, самое существенное из которых — прямолинейность трещин в плане.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность С. А. Христиановичу и И. Г. Баренблатту, предложившим тему исследования и сделавшим ценные замечания при выполнении настоящей работы.

Поступила 25 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
3. Михлин С. Г. Метод последовательных приближений в бигармонической проблеме. Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, 1934, № 39.
4. Христианович С. А., Желтов Ю. П., Баренблатт Г. И. О механизме гидравлического разрыва пласта. Нефтяное хозяйство, 1957, № 1