УДК 539. 319+373

О МЕХАНИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ

М. С. Чирко

(Воронеж)

На основе модели многокомпонентной среды получена система уравнений, описывающая поведение предварительно напряженных армированных стеклопластиков. Рассмотрена конкретная задача о концентрации остаточных напряжений в пластине из этого материала.

Для описания предварительно напряженных стеклопластиков будем исходить из модели многокомпонентной среды [1].

Пусть имеем некоторый объем V, ограниченный поверхностью S. Через σ_{ij}, u_i, e_{ij} будем обозначать напряжения, распространенные на единичную площадку, перемещения и деформации в заполнителе; а через π_{ij}, v_i, ε_{ij} — напряжения, распространенные на единичную площадку, перемещения и деформации в арматуре. Предположим, что на поверхности S действуют только поверхностные силы F_i, и в объеме V отсутствуют массовые силы и моменты. Разложим F на две составляющие

$$F_i = F_i^{(1)} + F_i^{(2)} \tag{1}$$

где $F_i^{(1)}$ — поверхностное усилие, действующее на заполнитель, а $F_i^{(2)}$ — на арматуру. Тогда для поверхностных сил получим

$$F_i^{(1)} = \sigma_{ji}\nu_j, \qquad F_i^{(2)} = \pi_{ji}\nu_j \tag{2}$$

где ν_j — единичный вектор нормали к S. Условия равновесия объема V имеют вид

$$\int\limits_S F_i ds = 0, \qquad \int\limits_S \varepsilon_{ijk} x_j F_k ds = 0 \tag{3}$$

где ε_{ijk} — аксиальный тензор Леви — Чевита, x_j — j-я компонента декартовой системы координат. Из первого уравнения (3) и (2) следует:

$$\sigma_{ij,j} + \pi_{ij,j} = 0 \tag{4}$$

Если ввести величину π_i

$$\pi_i = \sigma_{ij,j} \tag{5}$$

то получим из (4)

$$\sigma_{ij,j} - \pi_i = 0, \qquad \pi_{ij,j} + \pi_i = 0 \tag{6}$$

что представляет собой отдельные уравнения равновесия для заполнителя и арматуры, а из вида этих уравнений можно заключить, что π_i — вектор силы, характеризующий взаимодействие заполнителя и арматуры, отнесенный к единице объема.

Из второго уравнения (3) следует:

$$\varepsilon_{ijk}(\sigma_{ji} + \pi_{ji}) = 0 \tag{7}$$

Из (7) видно, что тензоры напряжений в общем случае не симметричны. Аналогично (5) можно ввести

$$\Sigma_k = \varepsilon_{ijk}\sigma_{ji} \tag{8}$$

где Σ_k — моментное взаимодействие, отнесенное к единице объема.

Если обозначить через $\sigma_{(ij)}$, $\pi_{(ij)}$ симметричные части тензоров напряжения, то для них уравнения равновесия (6) — (8) примут вид [2]

$$\sigma_{(mn),m} + {}^1/_2\varepsilon_{imn}\Sigma_{i,m} - \pi_n = 0 \tag{9}$$

$$\pi_{(mn),m} - {}^1/_2\varepsilon_{imn}\Sigma_{i,m} + \pi_n = 0 \tag{10}$$

Конкретизируем теперь свойства заполнителя и арматуры. Выше использовались σ_{ij}, π_{ij} — тензоры напряжений, распространенные на единичную площадку. Очевидно, в реологические уравнения должны входить истинные напряжения, действующие в средах. Будем обозначать их σ_{ij}^* и π_{ij}^*.

Пусть α — доля площади, занятой заполнителем на единичной площадке. Легко видеть, что α не зависит от ориентации площадки, но в общем случае может быть функцией координат (например, в случае армирования материала по радиусам полярной системы координат нитями постоянной толщины). Тогда имеем

$$\sigma_{ij} = \alpha\sigma_{ij}^*, \qquad \pi_{ij} = (1-\alpha)\,\pi_{ij}^* \tag{11}$$

Заполнитель будем считать полимеризующейся средой, подчиняющейся уравнению [3]

$$\begin{gathered}\sigma_{(ij)}^* = \Big\{E_1(\eta)\,e_{kk} - \int_0^t e_{kk}\varphi_1(\eta, t-\tau)\,d\tau - \int_1^\eta e_{kk}(\eta)\,dE_1(\eta) + \\ + \int_1^\eta e_{kk} d\Big[\int_0^t \varphi_1(\eta, t-\tau)\,d\tau\Big]\Big\}\delta_{ij} + E_2(\eta)\,e_{ij} - \int_0^t e_{ij}\,\varphi_2(\eta, t-\tau)\,d\tau - \\ - \int_1^\eta e_{ij}(\eta)\,dE_2(\eta) + \int_0^\eta e_{ij} d\Big[\int_0^t \varphi_2(\eta, t-\tau)\,d\tau\Big] + C(\eta)\,\delta_{ij}\end{gathered} \tag{12}$$

где η — степень полимеризации, считающейся известной из химической кинетики функцией времени; $C(\eta)$ — величина, характеризующая усадку материала во время полимеризации; E_1, E_2 — модули упругости; φ_1, φ_2 — функции памяти; δ_{ij} — символ Кронекера.

После окончания полимеризации $\eta = \eta_{\max}$ уравнение (12) перейдет в обычное уравнение вязко-упругости, а некоторые постоянные добавки будут характеризовать остаточные напряжения, возникающие в процессе полимеризации.

Примем, что арматура представляет собой или абсолютно гибкие нити, которые выдерживают только растягивающие усилия, направленные параллельно оси x_1, или стеклоткань, которая расположена слоями, параллельными плоскости x_1x_2, также выдерживающую только растягивающие усилия вдоль нитей ткани. Для первого случая имеем

$$\pi_{11}^* = E\varepsilon_{11}, \qquad \pi_{22}^* = \pi_{33}^* = 0, \qquad \pi_{(ij)}^* = 0 \quad \text{при } i \neq j \tag{13}$$

для второго случая

$$\pi_{11}^* = E\varepsilon_{11}, \qquad \pi_{22}^* = E_3\varepsilon_{22}, \qquad \pi_{33}^* = 0, \qquad \pi_{(ij)}^* = 0 \quad \text{при } i \neq j \tag{14}$$

т. е. коэффициент Пуассона для волокон равен нулю.

Будем считать, что при изготовлении стеклопластов волокна арматуры сначала растягиваются, а потом заливаются полимеризующейся массой. По мере полимеризации возрастает степень склейки заполнителя и арматуры и при деформировании одной из сред возникнут взаимодействия π_i, Σ_i, зависящие от взаимного смещения сред, прошедшего после склейки, а также от степени полимеризации, а для релаксирующих связей — от скоростей смещений

$$\pi_i = K_{ij}\,[u_j - (v_j - v_j^{(0)}), \eta, t] \tag{15}$$

$$\Sigma_i = L_{ij}\left[\varepsilon_{jmn}\left(u_{m,n} - v_{m,n} + v_{m,n}^{(0)}\right), \eta, t\right] \tag{16}$$

где $v_j^{(0)}$ — первоначальные перемещения арматуры до снятия предварительного растяжения, K_{ij}, L_{ij} — операторы. Для упругой связи, т. е. явно не зависящей от времени, разлагая (15) и (16) в ряды Тейлора по перемещениям и ограничиваясь малыми первого порядка, получим

$$\pi_i = K_1(\eta)\,[u_i - (v_i - v_i^{(0)})] + K_2(\eta)\,[u_1 - (v_1 - v_1^{(0)})]\,\delta_{i1} \tag{17}$$

$$\Sigma_i = L_1(\eta)\,\varepsilon_{imn}\left(u_{m,n} - v_{m,n} + v_{m,n}^{(0)}\right) + L_2(\eta)\,\varepsilon_{1mn}\left(u_{m,n} - v_{m,n} + v_{m,n}^{(0)}\right)\delta_{i1} \tag{18}$$

для случая армирования волокнами в направлении x_1. Во втором случае (армирование тканью) получим

$$\begin{gathered}\pi_i = K_3(\eta)\left[u_i - \left(v_i - v_i^{(0)}\right)\right] + K_4(\eta)\,\delta_{i1}\left[u_1 - \left(v_1 - v_1^{(0)}\right)\right] + \\ + K_5(\eta)\,\delta_{i2}\left[u_2 - \left(v_2 - v_2^{(0)}\right)\right]\end{gathered} \tag{19}$$

$$\Sigma_i = L_3(\eta)\,\varepsilon_{imn}\left(u_{m,n} - v_{m,n} + v_{m,n}^{(0)}\right) + L_4(\eta)\,\varepsilon_{1mn}\left(u_{m,n} - v_{m,n} + v_{m,n}^{(0)}\right)\delta_{i1} + \\ + L_5(\eta)\,\varepsilon_{2mn}\left(u_{m,n} - v_{m,n} + v_{m,n}^{(0)}\right)\delta_{i2} \tag{20}$$

где $K_i(\eta)$ и $L_i(\eta)$ — функции от степени полимеризации.

Таким образом, добавив к уравнениям (9) — (13), (17), (18) или (14), (19), (20) соотношения Коши, для тензоров e_{ij} и ε_{ij} получим замкнутую систему уравнений, описывающую поведение полимеризующихся стеклопластиков.

Рассмотрим задачу об определении остаточных напряжений, возникающих в стеклопластике при его изготовлении. Пусть бесконечная в направлении x_2 пластина стеклопластика имеет ширину $2d$ $(-d \leqslant x_1 \leqslant d)$ и армирование в ней произведено волокнами в направлении x_1. Волокна предварительно растянуты ($v_1^{(0)} = \varkappa x_1$).

Полимеризация происходит в замкнутом объеме, т. е. перемещений в заполнителе нет ($u_i = 0$). После затвердевания снимаем связи на арматуру и заполнитель, т. е. получаем свободные поверхности $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \pi_{11} = 0$ при $x_1 = \pm d$.

Как уже говорилось, после затвердевания заполнитель представляет собой вязко-упругую среду, которую можно рассматривать как упругую, применив к ней принцип Вольтера, т. е.

$$\sigma_{(ij)}^{*} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} + C(\eta_{\max})\,\delta_{ij} \tag{21}$$

где λ и μ — интегральные операторы. Решение системы (9), (10), (13), (17), (21) для рассматриваемых граничных условий имеет вид

$$u_1 = A \operatorname{sh}\gamma x_1, \qquad u_2 = 0$$

$$v_1 = -\frac{\lambda' + 2\mu'}{E'} A \operatorname{sh}\gamma x_1, \qquad \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{22} = \lambda'\left[A\gamma \operatorname{ch}\gamma x_1 - \frac{C - E'\varkappa}{E' + \lambda' + 2\mu'}\right] + C$$

$$\sigma_{11} = (\lambda' + 2\mu')\,A\gamma \operatorname{ch}\gamma x_1 + B, \qquad \pi_{11} = -(\lambda' + 2\mu')\,A\gamma \operatorname{ch}\gamma x_1 - B$$

где

$$B = \frac{E'\left[(\lambda' + 2\mu')(\lambda' + 2\mu' - E')\varkappa + (\lambda' + 2\mu' + E')\,C\right]}{(\lambda' + 2\mu' + E')^2}$$

$$A = -\frac{B}{(\lambda' + 2\mu')\,\gamma \operatorname{ch}\gamma d}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{E' + \lambda' + 2\mu'}{E'(\lambda' + 2\mu')}(K_1 + K_2)} \tag{22}$$

$$E' = (1 - \alpha)\,E, \qquad \lambda' = \alpha\lambda, \qquad \mu' = \alpha\mu$$

Из (22) видно, что в стеклопластике будут присутствовать остаточные напряжения, которые для упругого стеклопластика (λ и μ — константы, а не операторы) можно сделать равными нулю, подобрав предварительное натяжение в виде

$$\varkappa = -\frac{\lambda' + 2\mu' + E'}{(\lambda' + 2\mu')(\lambda' + 2\mu' - E')}\,C(\eta_{\max}) \tag{23}$$

так как заполнители уменьшают свой объем при затвердевании, т. е. $C(\eta)$ отрицательно.

Поступила 15 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Green A. E., Naghdi P. M. A dynamical theory of interacting continua. Internat J. Engng Sci., 1965, vol. 3, No. 2.
2. Koiter W. T. Couple stresses in the theory of elasticity. Proc. Koninklijke Nederl. Akaad. van Wetensch., 1964, Bd 67, Nr 1.
3. Быковцев Г. И., Чирко М. С. О напряженном состоянии в полимеризующихся средах. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.