

УДК 534.222.2

РЕПТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИВОТНЫХ В ЖИДКОСТИ

В. М. Шаповалов

Волгоградский государственный технический университет, 400103 Волгоград

E-mail: vtm@volpi.ru

В длинноволновом приближении получено аналитическое решение плоской задачи рептационного движения биологического объекта в вязкой жидкости. Режим движения ламинарный. Получены расчетные выражения, а также асимптотические оценки для осевого и перерезывающего усилий, затрачиваемой энергии, траектории движения. Представлены результаты численного анализа решения.

Ключевые слова: рептационное движение, ламинарный режим, длинноволновое приближение.

Модель плавания водных животных угревидным способом была предложена академиком М. А. Лаврентьевым [1], впервые использовавшим для изучения этой проблемы метод плоских сечений. Тело животного рассматривалось как прямоугольная пластинка, способная изгибаться по любому закону, оставаясь при этом цилиндрической. Указаны деформации пластинки, обеспечивающие ее перемещение в жидкости. Развитием идей М. А. Лаврентьева являются работы [2, 3].

В работах [4–6] представлена теория движения стержня в потоке вязкой жидкости. Полученные уравнения динамики могут использоваться для описания движения биологических объектов (БО) в сплошной среде.

В длинноволновом приближении поставлена и решена задача плоского рептационного движения животных в вязкой жидкости. Определены энергосиловые и кинематические характеристики движения. Приведены результаты численного анализа.

1. Постановка задачи. Оценим силы инерции при движении БО. Для объектов малых размеров примем: $d = 10^{-3}$ м, $l \sim 10^{-2}$ м, $v = 10^{-3}$ м/с, $\rho = 10^3$ кг/м³, $\mu = 10^{-3}$ Па·с. При этом число Рейнольдса $Re = vd\rho/\mu = 1$ (μ , ρ — вязкость и плотность жидкости, d — диаметр тела, l — длина тела, v — скорость). Для крупных объектов $d = 0,05$ м, $v = 1$ м/с, $l \sim 1$ м, $Re = 5 \cdot 10^4$. Следовательно, ламинарный режим движения характерен для мелких объектов при малой скорости их движения. Для крупных объектов типичен турбулентный режим движения.

Наряду с преодолением сил вязкого трения животному необходимо затрачивать энергию на инерцию собственного тела. Оценим силы инерции, действующие на тело животного. Согласно [7] при $Re Sh = \rho d^2/(T\mu) \ll 1$ ($Sh = d/(vT)$ — число Струхала, $T \sim l/v$ — характерное время) движение допустимо считать квазистационарным и не учитывать силы инерции, обусловленные локальным ускорением. Принимаем среднюю плотность тела БО близкой к плотности окружающей жидкости ($\rho = 10^3$ кг/м³). Имеем для объектов малых размеров $Re Sh = 0,1$, для крупных $Re Sh = 2500$. Следовательно, силами инерции тела БО можно пренебречь.

Ограничим рассмотрение БО имеющими достаточно вытянутое тело (малых размеров рыбы типа угря в высыхающем водоеме, личинки некоторых насекомых, сперматозоиды, микроорганизмы), так что выполняется условие $l \gg d$ (l — длина тела в вытянутом

состоянии). Для направленного перемещения БО совершает плоское рептационное движение, например, в горизонтальной плоскости. В случае позвоночных животных упругая ось проходит вдоль позвоночника, который можно рассматривать как шарнирную систему стержней. Считаем количество позвонков бесконечным, а упругую ось монотонной гладкой кривой. Для беспозвоночных БО упругая ось проходит через центры поперечных сечений. В процессе движения упругая ось и действующие силы лежат в плоскости xOy .

Центральная нервная система посылает управляющие сигналы мышцам тела, так что формируется бегущая волна, близкая к синусоидальной. Количество управляющих нервных импульсов конечно и соответствует количеству рабочих мышц, равномерно расположенных по всей длине тела. Будем считать число мышц бесконечным, а управляющий сигнал монотонной непрерывной функцией.

Архимедова сила отсутствует, поскольку плотность БО близка к плотности окружающей жидкости. Поперечное сечение тела постоянно по всей длине БО. Движение жидкости ламинарное.

Принципиальным отличием движения БО в жидкости от движения суспензии анизометрических частиц является распределение механической энергии. В суспензии механическая энергия поступает со стороны окружающей жидкости к частице, изменяя ее конфигурацию или положение. В случае БО источником энергии является сама “частица”. И если условно считать окружающую жидкость неподвижной, то рассеивание механической энергии (за счет вязкой диссипации) локализовано в области, соизмеримой с размерами БО, т. е. в области гидродинамического пограничного слоя.

Введем неподвижную в пространстве (или “вмороженную” в жидкость) систему координат (x, y, z) . Обозначим через x, y, z координаты точек упругой линии БО s . Векторную параметризацию кривой s выполняет вектор-функция $\mathbf{r}(s, t)$, $0 \leq s \leq l$ (t — время). Направлениям x, y, z соответствует правосторонне ориентированный триэдр $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Обозначим через \mathbf{l} ($\mathbf{l} = \mathbf{r}_s$, $|\mathbf{l}| = 1$) вектор касательной к упругой линии, $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{l}$ — вектор нормали, \mathbf{b} — вектор бинормали.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{F} \times \mathbf{l},$$

где \mathbf{M} — момент; $\mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = N\mathbf{l} + Q\mathbf{n}$ — сила; \mathbf{K} — линейная плотность внешних сил. Здесь и далее нижним индексом отмечены соответствующие производные.

При движении БО сила трения обусловлена разностью скоростей БО \mathbf{r}_t и жидкости \mathbf{V} , поэтому выражение для внешней силы трения \mathbf{K} имеет вид

$$\mathbf{K} = A\mathbf{l}((\mathbf{r}_t - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{l}) + B\mathbf{n}((\mathbf{r}_t - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}),$$

где \mathbf{V} — скорость жидкости; $A = 2\pi\mu/\ln(0,952/\sqrt{c})$ — коэффициент, характеризующий продольную составляющую силы трения; c — объемная концентрация БО в жидкости; $B = 4\pi\mu/\ln(7,4/\text{Re})$ — коэффициент, характеризующий поперечную составляющую силы трения; $\text{Re} = \langle v \rangle \rho d/\mu$ — число Рейнольдса; $\langle v \rangle$ — характерная скорость.

В скалярной форме имеем систему уравнений

$$N_s - Q\varphi_s = -A(\mathbf{r}_t - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{l}, \quad N\varphi_s + Q_s = -B(\mathbf{r}_t - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}.$$

Выполнив скалярные умножения в последних уравнениях с учетом соотношений $\mathbf{r}_t - \mathbf{V} = (x_t - v_x)\mathbf{i} + (y_t - v_y)\mathbf{j}$, $\mathbf{l} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$, $\mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$, получим

$$\begin{aligned} N_s - Q\varphi_s &= -A[(x_t - v_x) \cos \varphi + (y_t - v_y) \sin \varphi], \\ N\varphi_s + Q_s &= -B[-(x_t - v_x) \sin \varphi + (y_t - v_y) \cos \varphi], \quad M_s = -Q, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где N — осевая сила; Q — перерезывающая сила; M — изгибающий момент.

Соответственно, “улучшенные” уравнения [4, 5] (полученные в результате исключения функций x, y) для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_t + B^{-1}(N\varphi_s + Q_s)_s + A^{-1}\varphi_s(N_s - Q\varphi_s) &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin 2\varphi - \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin^2 \varphi + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cos^2 \varphi, \\ \varphi_s B^{-1}(N\varphi_s + Q_s) - A^{-1}(N_s - Q\varphi_s)_s &= -0,5 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sin 2\varphi - \frac{\partial v_x}{\partial x} \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1), (1.2) необходимо дополнить геометрическими соотношениями

$$x_s = \cos \varphi, \quad y_s = \sin \varphi, \quad (1.3)$$

начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned} t = 0: \quad x &= x_0(s), \quad y = y_0(s); \\ t > 0, \quad s = 0: \quad N &= Q = 0; \quad s = l: \quad N = Q = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для удобства анализа разрешим уравнения (1.1) относительно функций x_t, y_t

$$\begin{aligned} x_t &= -A^{-1}(N_s - Q\varphi_s) \cos \varphi + B^{-1}(N\varphi_s + Q_s) \sin \varphi + v_x, \\ y_t &= -A^{-1}(N_s - Q\varphi_s) \sin \varphi - B^{-1}(N\varphi_s + Q_s) \cos \varphi + v_y. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Рассматривается случай неподвижной жидкости, т. е. полагаем $\mathbf{V} = 0$ ($v_x = 0, v_y = 0$). Лобовое сопротивление не учитываем. Уравнение, связывающее момент с углом изгиба через изгибную жесткость, в данной задаче лишено физического смысла (как и понятие упругого стержня), поэтому не используется.

2. Решение задачи. Перейдем к безразмерным параметрам и переменным, взяв в качестве масштаба силы наибольшее значение перерезывающего усилия Q ($Q_0 = |\max Q|$)

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{l}, \quad Y = \frac{y}{l}, \quad S = \frac{s}{l}, \quad e = \frac{A}{B}, \quad n = \frac{N}{Q_0}, \quad q = \frac{Q}{Q_0}, \\ \tau = \frac{Q_0 t}{Al^2}, \quad \Omega = \frac{\omega Al^2}{Q_0}, \quad K = kl, \quad w = \frac{AlW}{Q_0^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ω — частота колебаний.

С учетом (2.1) определяющие уравнения (1.2)–(1.5) примут вид

$$n\varphi_s + q_s = Z; \quad (2.2)$$

$$n_s - q\varphi_s = D; \quad (2.3)$$

$$\varphi_\tau + eZ_s + \varphi_s D = 0; \quad (2.4)$$

$$e\varphi_s Z - D_s = 0; \quad (2.5)$$

$$X_\tau = -D \cos \varphi + eZ \sin \varphi; \quad (2.6)$$

$$Y_\tau = -D \sin \varphi - eZ \cos \varphi; \quad (2.7)$$

$$X_s = \cos \varphi, \quad Y_s = \sin \varphi; \quad (2.8)$$

$$\tau = 0: \quad X = X_0(S), \quad Y = Y_0(S); \quad (2.9)$$

$$\tau > 0, \quad S = 0: \quad n = q = 0; \quad S = 1: \quad n = q = 0. \quad (2.10)$$

Для краткости записи и удобства последующего анализа введены две вспомогательные функции $D(S, \tau), Z(S, \tau)$, определенные уравнениями (2.2), (2.3). Момент в решении не используется, поэтому последнее уравнение из (1.1) опущено.

Нервные импульсы, поступающие к мышцам БО, формируют бегущую волну, обеспечивающую поступательное движение. В уравнениях (2.2)–(2.10) необходимо априорно задать вид одной из функций n , q или φ . Примем следующее выражение для плоской бегущей волны:

$$\varphi = \varepsilon \sin(KS - \Omega\tau), \quad (2.11)$$

где Ω — безразмерная частота; ε — безразмерный параметр ($|\varepsilon| \leq 1$); $K = 2\pi i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Согласно последнему равенству длина БО обеспечивает четное количество полуволн. При этом значительно упрощаются расчетные выражения.

Считаем, что функции D и Z зависят от φ . При этом уравнение (2.4) можно записать так:

$$\varphi_\tau + eZ_\varphi\varphi_s + D\varphi_s = 0,$$

где $Z_\varphi = \partial Z/\partial\varphi$. С учетом выражения (2.11) последнее уравнение примет вид

$$-\Omega + eKZ_\varphi + KD = 0. \quad (2.12)$$

Соответственно, уравнение (2.5) будет иметь вид

$$D_\varphi = eZ. \quad (2.13)$$

Продифференцировав уравнение (2.13) по φ и подставив в (2.12), получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$D_{\varphi\varphi} + D = \Omega/K.$$

Его решение имеет вид

$$D = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K, \quad (2.14)$$

где C_1, C_2 — неизвестные функции времени.

Подставив выражение (2.14) в (2.13), найдем функцию Z :

$$Z = e^{-1}(C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi). \quad (2.15)$$

Используя уравнения (2.2), (2.3), найдем функции n и q , также считая, что они зависят от φ . С учетом (2.14), (2.15) имеем

$$n + q_\varphi = Z\varphi_s^{-1}; \quad (2.16)$$

$$n_\varphi - q = D\varphi_s^{-1}. \quad (2.17)$$

Продифференцировав обе части уравнения (2.17) по φ и сложив с (2.16), получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для функции n

$$n_{\varphi\varphi} + n = Z\varphi_s^{-1} + (D\varphi_s^{-1})_\varphi.$$

Его решение имеет вид

$$n = C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi - \cos \varphi \int [Z\varphi_s^{-1} + (D\varphi_s^{-1})_\varphi] \sin \varphi d\varphi + \\ + \sin \varphi \int [Z\varphi_s^{-1} + (D\varphi_s^{-1})_\varphi] \cos \varphi d\varphi$$

или после интегрирования по частям и несложных преобразований

$$\begin{aligned}
 n &= C_3 \sin \varphi + C_4 \cos \varphi - \\
 &- \cos \varphi \left[\int_0^S e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \sin \varphi dS - \int_0^S (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \cos \varphi dS \right] + \\
 &+ \sin \varphi \left[\int_0^S e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \cos \varphi dS + \int_0^S (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \sin \varphi dS \right]. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Подставив выражение (2.18) в уравнение (2.17), найдем перерезывающее усилие:

$$\begin{aligned}
 q &= C_3 \cos \varphi - C_4 \sin \varphi + \\
 &+ \sin \varphi \left[\int_0^S e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \sin \varphi dS - \int_0^S (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \cos \varphi dS \right] + \\
 &+ \cos \varphi \left[\int_0^S e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \cos \varphi dS + \int_0^S (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \sin \varphi dS \right]. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Неизвестные C_3, C_4 найдем, используя условие из (2.10) $\tau > 0, S = 0: n = q = 0$, для (2.18), (2.19) оно приводит к системе уравнений

$$C_3 \sin \varphi_0 + C_4 \cos \varphi_0 = 0, \quad C_3 \cos \varphi_0 - C_4 \sin \varphi_0 = 0,$$

где $\varphi_0 = \varphi|_{s=0}$. Решение этой системы имеет вид $C_3 = 0, C_4 = 0$.

Неизвестные коэффициенты C_1, C_2 найдем, используя условие из (2.10) $\tau > 0, S = 1: n = q = 0$. При этом выражения (2.18), (2.19) приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
 &- \cos \varphi_0 \left[\int_0^1 e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \sin \varphi dS - \int_0^1 (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \cos \varphi dS \right] + \\
 &+ \sin \varphi_0 \left[\int_0^1 e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \cos \varphi dS + \int_0^1 (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \sin \varphi dS \right] = 0, \\
 &\sin \varphi_0 \left[\int_0^1 e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \sin \varphi dS - \int_0^1 (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \cos \varphi dS \right] + \\
 &+ \cos \varphi_0 \left[\int_0^1 e^{-1} (C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi) \cos \varphi dS + \int_0^1 (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \Omega/K) \sin \varphi dS \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь учитывалось равенство $\varphi_0 = \varphi|_{s=0} = \varphi|_{s=1}$, которое следует из условия $K = 2\pi i, i = 1, 2, \dots$

После несложных преобразований приходим к системе уравнений

$$C_1(e^{-1} - 1) \int_0^1 \cos \varphi \sin \varphi dS + C_2 \left[(1 - e^{-1}) \int_0^1 \sin^2 \varphi dS - 1 \right] = \frac{\Omega}{K} \int_0^1 \cos \varphi dS,$$

$$C_1 \left[e^{-1} + (1 - e^{-1}) \int_0^1 \sin^2 \varphi dS \right] + C_2 (1 - e^{-1}) \int_0^1 \cos \varphi \sin \varphi dS = -\frac{\Omega}{K} \int_0^1 \sin \varphi dS.$$

С учетом равенств

$$\int_0^1 \cos \varphi \sin \varphi dS = 0, \quad \int_0^1 \sin \varphi dS = 0$$

находим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{\Omega}{K} \int_0^1 \cos \varphi dS / \left[(1 - e^{-1}) \int_0^1 \sin^2 \varphi dS - 1 \right].$$

Полагая в (2.11) $|\varepsilon| \ll 1$ и разлагая подынтегральные функции последнего выражения в ряд, после интегрирования получим

$$C_2 = \frac{\Omega}{K} \frac{1 - \varepsilon^2/4 + \varepsilon^4/64 + \dots}{(1 - 1/e)(\varepsilon^2/2 - \varepsilon^4/8 + \dots) - 1}. \quad (2.20)$$

Определим траекторию движения БО. Уравнения (2.6), (2.7) с учетом выражений (2.14), (2.15), (2.20) примут вид

$$X_\tau = -(\Omega/K) \cos \varphi - C_2, \quad Y_\tau = -(\Omega/K) \sin \varphi.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$X = -\frac{\Omega}{K} \int_0^\tau \cos \varphi d\tau - C_2 \tau + X_0(S), \quad Y = -\frac{\Omega}{K} \int_0^\tau \sin \varphi d\tau + Y_0(S), \quad (2.21)$$

где $X_0(S)$, $Y_0(S)$ — неизвестные функции.

Интегрируя геометрические соотношения (2.8), можем записать

$$X = C_5(\tau) + \int_0^S \cos \varphi dS, \quad Y = C_6(\tau) + \int_0^S \sin \varphi dS. \quad (2.22)$$

Любая точка упругой оси БО описывает одну и ту же траекторию. Значению $S = 0$ отвечает “траектория головы” БО. Приравнявая выражения (2.21) и (2.22) при $S = 0$, получим равенства

$$X|_{S=0} = -\frac{\Omega}{K} \int_0^\tau \cos \varphi_0 d\tau - C_2 \tau + X_0|_{S=0} = C_5(\tau),$$

$$Y|_{S=0} = -\frac{\Omega}{K} \int_0^\tau \sin \varphi_0 d\tau + Y_0|_{S=0} = C_6(\tau). \quad (2.23)$$

Начальное условие (2.9) сводит первое равенство к соотношению $X = X_0|_{S=0} = C_5(\tau) = 0$ при $\tau = 0$. Кроме того, сопоставляя выражения для X в (2.21) и (2.22) для момента $\tau = 0$, можем записать равенство

$$X|_{S=0} = X_0|_{S=0} = \int_0^S \cos \varphi|_{\tau=0} dS.$$

Следовательно, выражение (2.21) для X примет вид

$$X = -\frac{\Omega}{K} \int_0^{\tau} \cos \varphi d\tau - C_2\tau + \int_0^S \cos \varphi|_{\tau=0} dS. \quad (2.24)$$

Второе равенство в (2.23) для начального момента времени дает соотношение $Y|_{S=0, \tau=0} = Y_0|_{S=0} = C_6|_{\tau=0}$. Кроме того, из вторых выражений в (2.21), (2.22) следует равенство

$$Y|_{\tau=0} = Y_0(S) = C_6|_{\tau=0} + \int_0^S \sin \varphi|_{\tau=0} dS.$$

С учетом последних соотношений расчетная формула (2.21) для Y примет вид

$$Y = Y_0|_{S=0} + \int_0^S \sin \varphi|_{\tau=0} dS - \frac{\Omega}{K} \int_0^{\tau} \sin \varphi d\tau. \quad (2.25)$$

Постоянную $Y_0|_{S=0}$ найдем из условия симметричного отклонения БО от оси X :

$$\int_0^1 Y|_{\tau=0} dS = 0.$$

Имеем

$$Y_0|_{S=0} = - \int_0^1 \int_0^S \sin \varphi|_{\tau=0} ds ds.$$

Учитывая, что $\varphi|_{\tau=0} = \varepsilon \sin KS$, в первом приближении получим $Y_0|_{S=0} \simeq -\varepsilon/K$. Выражение для Y в (2.25) с точностью до членов порядка ε^3 имеет вид

$$Y = -(\varepsilon/K) \cos(KS - \Omega\tau) + O(\varepsilon^3). \quad (2.26)$$

Выполнив разложения подынтегральных функций в ряды и интегрируя (2.24), получим приближенное выражение для функции X :

$$X = (1 - e^{-1}) \frac{\varepsilon^2 \Omega \tau}{2K} + S \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{\varepsilon^2}{8K} \sin(2KS - 2\Omega\tau) + O(\varepsilon^4). \quad (2.27)$$

Механическая энергия мышц БО в конечном счете превращается в тепло за счет диссипации механической энергии окружающей жидкостью. Найдем энергию, затрачиваемую БО на движение.

Согласно результатам [4] энергию W , затрачиваемую на перемещение частицы в вязкой жидкости, можно определить интегралом

$$W = \int_0^l (\mathbf{r}_t - \mathbf{V}) \mathbf{K} ds.$$

Из соотношений п. 1 следуют равенства $\mathbf{r}_t - \mathbf{V} = -B^{-1}(N\varphi_s + Q_s)\mathbf{n} - A^{-1}(N_s - Q\varphi_s)\mathbf{l}$, $\mathbf{K} = -[(N\varphi_s + Q_s)\mathbf{n} + (N_s - Q\varphi_s)\mathbf{l}]$. При этом расчетная формула примет вид

$$W = \int_0^l [B^{-1}(N\varphi_s + Q_s)^2 + A^{-1}(N_s - Q\varphi_s)^2] ds.$$

Учитывая (2.1)–(2.3), запишем это выражение в безразмерном виде

$$w = \int_0^1 (eZ^2 + D^2) dS.$$

С учетом (2.14), (2.15), (2.20) можем записать

$$w = C_2^2(e^{-1} - 1) \int_0^1 \sin^2 \varphi dS + C_2^2 + \frac{\Omega^2}{K^2} + 2C_2 \frac{\Omega}{K} \int_0^1 \cos \varphi dS. \quad (2.28)$$

Выполнив интегрирование первых членов разложения подынтегральных функций, получим асимптотическую оценку

$$w = \Omega^2 \varepsilon^2 / (2eK^2) + O(\varepsilon^4).$$

Используя соотношения (2.1), а также $A = 2\pi\mu / \ln(0,952/\sqrt{c})$, $y_m/l = \varepsilon/K$, запишем расчетную формулу для энергии в размерном виде

$$W = 2\pi\mu l \omega^2 y_m^2 / \ln(7,4/\text{Re}) + O(\varepsilon^4), \quad (2.29)$$

где y_m — амплитуда отклонения упругой оси от оси x .

Выражение для безразмерного осевого усилия (2.18) с учетом результатов (2.20) примет вид

$$\begin{aligned} n = C_2 \left\{ \cos \varphi \left[(e^{-1} - 1) \int_0^S \sin^2 \varphi dS + S \right] + \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) \sin \varphi \int_0^S \sin 2\varphi dS \right\} + \\ + \frac{\Omega}{K} \left[\sin \varphi \int_0^S \sin \varphi dS + \cos \varphi \int_0^S \cos \varphi dS \right]. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Соответственно, формулу (2.19) можно записать так:

$$\begin{aligned} q = C_2 \left\{ \frac{1}{2} \cos \varphi (1 - e^{-1}) \int_0^S \sin 2\varphi dS - \sin \varphi \left[(e^{-1} - 1) \int_0^S \sin^2 \varphi dS + S \right] \right\} + \\ + \frac{\Omega}{K} \left[\cos \varphi \int_0^S \sin \varphi dS - \sin \varphi \int_0^S \cos \varphi dS \right]. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Формулы (2.30), (2.31) малоприспособны для анализа, поэтому, используя разложения тригонометрических функций, запишем асимптотические оценки для функций n и q :

$$\begin{aligned} n = (\Omega \varepsilon^2 / (4K^2)) \{ (1/e - 1/2) [\sin(2KS - 2\Omega\tau) + \sin 2\Omega\tau] - \\ - (4/e) \sin(KS - \Omega\tau) [\cos(KS - \Omega\tau) - \cos \Omega\tau] \} + O(\varepsilon^4); \quad (2.32) \end{aligned}$$

$$q = -(\Omega \varepsilon / (K^2 e)) [\cos(KS - \Omega\tau) + \cos \Omega\tau] + O(\varepsilon^3). \quad (2.33)$$

Таким образом, получено точное аналитическое решение задачи. Определены основные параметры движения БО: осевое усилие описывается выражением (2.29), асимптотическая оценка (2.32); поперечная сила — выражением (2.30), асимптотическая оценка (2.33); затрачиваемая энергия — (2.28) и (2.29); выражение для траектории движения

в параметрической форме: точные — (2.24), (2.25), приближенные — (2.26), (2.27). Для определения момента можно использовать последнее уравнение в (1.1) $M_s = -Q$.

3. Анализ решения. Коэффициент при τ в первом слагаемом в (2.27) $(1 - e^{-1})\varepsilon^2\Omega/(2K)$ характеризует среднюю безразмерную скорость поступательного движения БО вдоль оси X . С учетом (2.1) эту скорость можно записать в размерном виде так: $y_m^2 k \omega$, где $y_m = \varepsilon/k$ — амплитуда колебаний (см. (2.26)). Следовательно, скорость поступательного движения БО пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, “извитости” тела БО k и частоте сокращения мышц ω .

Согласно выражению (2.32) осевая нагрузка, воспринимаемая позвоночником, имеет циклический характер. Амплитуда нагрузки $N/Q_0 \simeq \omega A y_m^2 / Q_0$ пропорциональна частоте сокращения мышц ω , квадрату отклонения y_m^2 и осевой силе трения A . Отметим, что сила лобового сопротивления не учитывалась.

Перерезывающая сила (2.33), воспринимаемая межпозвоночными дисками, также имеет циклический характер. Амплитуда силы $Q/Q_0 \simeq \omega B y_m / (Q_0 k)$ пропорциональна частоте сокращения мышц ω , отклонению y_m , поперечной силе трения B и обратно пропорциональна частоте изгибов тела k .

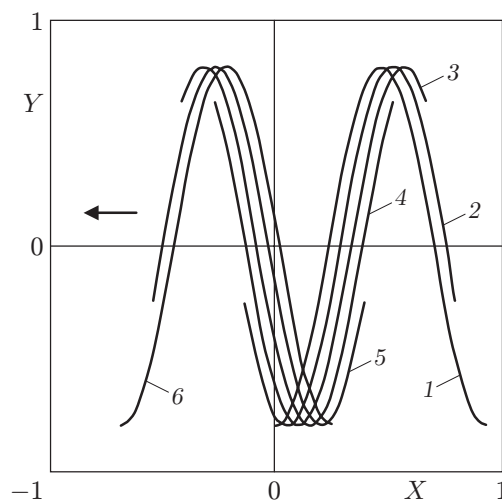
Согласно выражению (2.29) энергия, затрачиваемая на движение W , пропорциональна длине тела БО l , квадрату частоты сокращения мышц ω^2 и квадрату отклонения y_m^2 .

На рисунке представлены конфигурации упругой оси БО в различные моменты времени. Расчеты выполнены по формулам (2.26), (2.27) для условий: $\varepsilon = 0,5$, $\Omega = 2\pi$, $K = 2\pi$, $e = 2/3$. Шаг по времени τ составлял 2,2. Кривой 1 соответствует момент времени $\tau = 0$, кривой 6 — $\tau = 2,2 \cdot 5 = 11$. Объект перемещается влево вдоль оси X . Стрелкой показано направление перемещения.

Численный анализ (2.26), (2.27) показал, что для обеспечения правильного направления движения (соответствия движения тела и направления его перемещения вдоль оси X) должно выполняться условие $e < 1$. Параметр e характеризует соотношение продольной и поперечной сил трения и определяется формулой

$$e = \ln(7,4/\text{Re}) / (2 \ln(0,952/\sqrt{c})).$$

Следовательно, число Рейнольдса должно находиться в пределах $8,167c < \text{Re} < 7,4$. Полученная математическая модель применима для описания движения БО малого размера и с малой скоростью.



Следует отметить, что поверхность тела некоторых БО выделяет секрет, вследствие чего гидродинамический пограничный слой приобретает неньютоновские свойства. Продольное трение снижается, поскольку уменьшается параметр e . В этом случае точное определение параметра e весьма проблематично.

Согласно (2.26) параметр ε характеризует безразмерную амплитуду (размах) колебаний БО. Согласно (2.27) скорость осевого движения пропорциональна квадрату размаха колебаний ε^2 . Параметр K характеризует извитость БО, а именно число полуволн изогнутого тела. Так, при $K = 2\pi$ тело имеет две полуволны, при $K = 4\pi$ — четыре и т. д. Если организовать движение БО без трения в стеклянной трубке синусоидальной формы $Y = \varepsilon \sin KS$, то он имел бы предельно возможную скорость перемещения, равную скорости бегущей волны Ω/K [3]. Но поскольку БО приходится преодолевать силы вязкого трения, он имеет меньшую скорость, т. е. отстает от указанной бегущей волны (см. рисунок). Поэтому параметры ε и e должны удовлетворять условию $0,5(e^{-1} - 1)\varepsilon^2 \leq 1$.

Функция φ (см. выражение (2.11)), являясь аргументом тригонометрических функций, должна удовлетворять условию $\varphi < \pi/2$, откуда следует соотношение $\varepsilon < \pi/2$. Нарушение последнего условия приведет к искажению формы упругой оси высокочастотными гармониками.

Закон движения БО был задан априорно. Возможно, управляющее уравнение (2.11) не является оптимальным, т. е. обеспечивающим минимальные затраты энергии на перемещение. Но этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Как видно из рисунка, ориентация головы БО изменяется по периодическому закону, что обусловлено принятой формой “управляющего” уравнения (2.11). Для некоторых БО характерно сохранение осевой (вдоль оси X) ориентации головы в процессе движения. В этом случае необходимо принять другое “управляющее” уравнение, которое должно удовлетворять краевому условию $t > 0, s = 0, \varphi = 0$. Кроме того, если в правую часть уравнения (2.11) ввести дополнительное слагаемое (постоянную или функцию времени), то можно изменять направление движения БО: вправо, влево, по кругу, по спирали и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. Модель движения рыб, ужей // ПМТФ. 1973. № 2. С. 164–165.
2. Кузнецов В. М., Луговцов Б. А., Шер Е. Н. О механизме движения рыб и ужей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1969. Вып. 2. С. 207–233.
3. Шер Е. Н. О механизме движения ужей и рыб // Некоторые проблемы математики и механики. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1970. С. 267–276.
4. Шаповалов В. М., Лапшина С. В. Движение стержня в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 56–62.
5. Шаповалов В. М., Лапшина С. В. Уравнения динамики изогнутого стержня в потоке вязкой жидкости // Тр. XXXII Уральского семинара. Екатеринбург: Уральское отд-ние РАН, 2002. С. 119–122.
6. Шаповалов В. М., Лапшина С. В. Пространственное движение стержня в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 1. С. 56–65.
7. Попов Д. Н. Нестационарные гидромеханические процессы. М.: Машиностроение, 1982.

*Поступила в редакцию 25/V 2004 г.,
в окончательном варианте — 3/II 2005 г.*