ЛИТЕРАТУРА

1. **Христианович С. А., Шемякин Е. И.** О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1969, № 9.
2. **Naghdi P. M., Rowley I. C.** An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity.— «J. Mech. Phys. Solids», 1954, vol. 3.
3. **Христианович С. А., Шемякин Е. И.** К теории идеальной пластичности.— «Инж. журнал. МТТ», 1967, № 4.
4. **Христианович С. А.** Деформация упрочняющегося пластического материала.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 2.

УДК 539.374

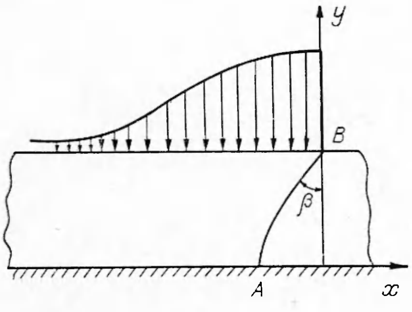
ПОДВИЖНАЯ НАГРУЗКА НА СЛОЕ ИДЕАЛЬНО УПЛОТНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

И. В. Симонов

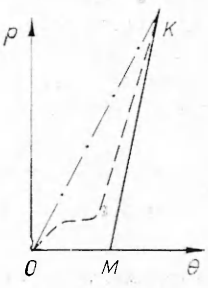
(*Москва*)

1. Физические допущения. По внешней поверхности слоя материала постоянной толщины h, лежащего без трения на жестком основании, движется с постоянной скоростью U_0 плоская нагрузка, форма и величина которой со временем не меняется. В системе координат (x, y) (фиг. 1), связанной с движущейся нагрузкой $P_0(x)$ $(P_0(x) = 0,\ x > 0,\ P_0(0) = P_{00})$, будем изучать плоское стационарное движение среды при условии существования ударной волны $U_0 > D_0$, где D_0 — волновая скорость, соответствующая давлению P_{00}. Перед фронтом среда невозмущена: $P = 0$, $\mathbf{U} = 0$, $\rho = \rho_0$ (P — давление, $\mathbf{U}$ — вектор массовой скорости в неподвижной системе координат, ρ, ρ_0 — текущая и начальная плотность).

Материал подчиняется баротропному уравнению состояния. Его P — θ-характеристика показана на фиг. 2 (сплошная линия). Уравнение прямой KM : $dP/d\rho = c^2 = \mathrm{const}$ при условии $P(\theta_0) = P_{00}$ $(\theta = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ — объемная деформация). Такая схема является идеализацией реального поведения материалов, содержащих пустоты или поры, заполненные легкосжимаемой средой (штриховая линия на фиг. 2). Начальным нелинейным участком нагружения иногда можно пренебречь в случаях, когда характерное давление выше давления, при котором поры практически захлопываются и дальнейшее приращение деформации происходит



Фиг. 1



Фиг. 2

за счет деформации матрицы (например, когда материал испытывает ударное нагружение значительной интенсивности). Для мягких металлов — это область от десятков до нескольких сотен килобар. При этом объемные деформации матрицы еще могут оставаться малыми. Для многих материалов пористость при разгрузке не восстанавливается и возможно допущение о том, что и при разгрузке деформирование протекает линейно-упруго. Поскольку уровень касательных напряжений (определяемый срелаксированной амплитудой упругого предвестника или пределом текучести) значительно ниже давления полной упаковки, сопротивлением сдвигу пренебрегается.

В зависимости от соотношения между U_0 и c будем иметь качественно различные режимы отражения косой ударной волны от жесткой стенки. При $U_0 > c$ возникает картина регулярного отражения с последовательностью чередующихся отраженных от внешней поверхности и жесткой стенки волн нагрузки и разгрузки. При этом в материале могут образовываться зоны с отрицательными давлениями.

В данной работе ограничимся исследованием режима $D_0 < U_0 < c$. В этом случае поверхности разрывов, аналогичные отраженным волнам, существовать не будут. Возмущения подобного типа, если они и существовали в качестве начального условия, догоняют передний фронт и в стационарном режиме отсутствуют. Математически это объясняется тем, что уравнения в возмущенной области становятся эллиптическими.

Переходный режим $U_0 \approx c$ исключим из рассмотрения. При $U_0 \to c - 0$ фронты отраженных волн становятся вертикальными, а их интенсивность стремится к бесконечности, если проводить расчеты в рамках принятой схемы. Для ликвидации этой особенности требуется учет нелинейных свойств материала и конвективных членов в уравнениях движения аналогично теории коротких волн.

Важным является вопрос о реальной величине интервала (D_0, c). Для сплошных материалов и слабых ударных волн эти величины близки друг к другу. Качественно величина D_0 определяется наклоном прямой OK (фиг. 2), а скорость звука — наклоном KM, и поэтому даже в случае слабо пористых тел они могут существенно различаться по величине. Например, при начальной пористости железа 0,26 и давлениях ≈ 40—45 кбар на фронте ударной волны (пористость практически обращается в нуль) $D \approx 1{,}65$—1,8 км/с, а скорость звука в уплотненном порошке железа равна 4,6 км/с [1] (данные для меньших значений пористости, к сожалению, отсутствуют).

Отметим, что для нестационарного и нерегулярного (маховского) отражения ударных волн характерно существование трех ударных волн, исходящих из одной точки («тришок»). В изучаемом процессе имеется только одна ударная волна: отраженная волна как бы вышла за пределы области.

2. Математическая постановка. В плоскости $\mathbf{x} = (x, y)$ рассмотрим область Ω, ограниченную прямыми $y = 0, h$ и неизвестной гладкой линией $x = s(y)$, $y \in [0, h]$. Искомые функции $P(\mathbf{x})$, $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U, V)$, $\rho(\mathbf{x})$ в области Ω должны удовлетворять уравнениям установившегося движения и неразрывности и определяющему соотношению

$$\rho(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)\nabla\mathbf{U} = \nabla P \qquad (\mathbf{U}_0 = (U_0, 0)),$$

$$\rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} = (\mathbf{U}_0 - \mathbf{U})\nabla\rho,\ dP/d\rho = c^2 \qquad (P(\theta_0) = P_{00}).$$

Граничные условия, которые соответствуют физическим условиям на внешней поверхности слоя, жесткой стенке и следуют из законов сохранения на фронте, имеют вид

$$P = P_0(x)\ (P_0(x) \to P_1 < \infty,\ x \to \infty) \text{ при } y = h,$$
$$V = 0 \qquad\qquad \text{при } y = 0,$$
$$P = \rho_0 |\mathbf{U}|^2/\theta, \quad \mathbf{U} = \theta U_0 (1 + s'^2)^{-1}(1, -s'),$$
$$dP/d\rho = c^2 \quad (P(\theta_0) = P_{00}) \text{ при } x = s(y).$$

Здесь при выводе второго условия на фронте было использовано кинематическое соотношение $\mathbf{D} = -U_0 \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|^2} \dfrac{\partial F}{\partial x}$, где $\mathbf{D}$ — волновая скорость; $F = x - s(y) \equiv 0$ — уравнение фронта в неявном виде; штрих означает дифференцирование по y. Неизвестная функция $s(y)$ должна удовлетворять краевым условиям, следующим из выбора системы координат и из совместности граничных условий

$$s'(0) = 0, \quad s = 0, \quad s' = (\rho_0\theta_0 U_0^2/P_{00} - 1)^{1/2} \quad (y = h).$$

В результате перехода к безразмерным переменным

$$P = \rho_0\theta_0 U_0^2 p, \quad \mathbf{U} = \theta_0 U_0 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (u, v), \quad \Delta = \theta/\theta_0$$

(x, s нормируем на h без изменения обозначений) и некоторых преобразований уравнения и условия задачи перепишутся в форме

$$(1 - \theta_0 u)u_x - \theta_0 v u_y = (1 - \theta)p_x, \tag{2.1}$$
$$(1 - \theta_0 u)v_x - \theta_0 v v_y = (1 - \theta)p_y,$$
$$u_x + v_y = (\varkappa^2 - 1)[(\theta_0 u - 1)p_x + \theta_0 v p_y],$$
$$d\Delta/dp = 1 - \varkappa^2 \quad (p(1) = p_{00}, \quad \varkappa^2 = 1 - U_0^2/c^2) \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$p = p_0(x)\ (p_0(x) \to p_1,\ x \to \infty) \text{ при } y = 1; \tag{2.2}$$

$$v = 0 \qquad \text{при } y = 0; \tag{2.3}$$

$$p = u = \Delta/(1 + s'^2) = p_*(y), \tag{2.4}$$
$$v = -s'p_*,\ d\Delta/dp = 1 - \varkappa^2\ (p(1) = p_{00}) \text{ при } x = s(y),$$
$$s'(0) = 0; \quad s = 0, \quad s' = \sqrt{p_{00}^{-1} - 1} = b \quad (y = 1).$$

Здесь буквенный индекс внизу означает частное дифференцирование.

Ограничимся рассмотрением случая $\theta \ll 1$ (и пористость и деформации матрицы малы). Пренебрегая в уравнениях (2.1) малыми членами, придем к системе уравнений вида

$$u_x = p_x, \ v_x = p_y, \ \varkappa^2 p_x = -v_y. \tag{2.5}$$

Из первого уравнения (2.5) и первого условия (2.4) вытекает $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$. Исключая $\mathbf{u}$ из системы (2.5), получим уравнение

$$\varkappa^2 p_{xx} + p_{yy} = 0. \tag{2.6}$$

Исключим u, v, Δ из граничных условий. Полагая $\Delta = 1 + \varepsilon$, уравнение состояния можно записать в форме

$$p = p_{00} + K\varepsilon \quad (K = (1 - \varkappa^2)^{-1}).$$

Исключая ε из условий (2.4), получим

$$p = p_*(y) = \frac{K - p_{00}}{K(1+s'^2)-1}.$$

Продифференцируем это соотношение и условие $v = -s'p_*$ вдоль фронта по y

$$p_y + s'p_x = p_*', \quad v_y + s'v_x = -(s''p_* + s'p_*').$$

Добавим к ним уравнения из системы (2.5), которые в пределе справедливы и на фронте, и полученную систему разрешим относительно p_x, p_y, v_x и v_y. Тем самым задача (2.1)—(2.4) сводится к определению гармонической в области $\Omega_1^+(x_1, y) = \Omega(\varkappa x_1, y)\left(x_1 = \frac{x}{\varkappa}\right)$ функции $p(\mathbf{x})$ и функции $s(y)$ по условиям

(2.7) $$p_y = 0 \ (y = 0), \ p = p_0(\varkappa x_1) \ (y = 1);$$

(2.8) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\varkappa(s''p_* + 2s'p_*')}{s'^2+\varkappa^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{(\varkappa^2 - s'^2)p_*' - s's''p_*}{s'^2+\varkappa^2} \ (x = s(y)),$$

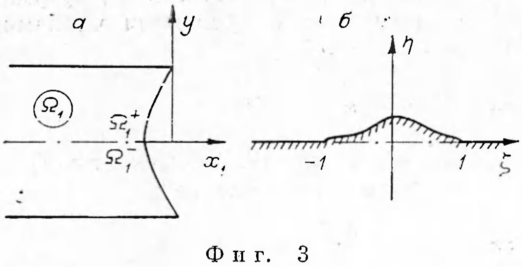
$$\left(p_*' = 2s's''\dot{p}_*, \ \dot{p}_* = dp_*/d(s'^2) = K(p_{00}-1)\left[K(1+s'^2)-1\right]^{-2}\right);$$

(2.9) $$s'(0) = 0; \quad s = 0, \quad s' = b, \quad s'' = \frac{a(b^2+\varkappa^2)}{p_{00}(1-4b^2K)} \ (y = 1).$$

Здесь $a = dp_0/dx|_{x=0}$, условие для $s''(1)$ следует из условия непрерывности $\partial p/\partial x_1$ в точке $x_1 = 0$, $y = 1$.

Таким образом, имеется по одному условию на известных и два условия на неизвестной частях границы области Ω_1^+. Отметим, что если уравнение (2.6) асимптотически точное по θ, то условия (2.7), (2.8) являются точными.

3. Функциональное уравнение задачи. Введем в рассмотрение комплексную переменную $z = x_1 + iy$ и функцию $\Phi(z) = \partial p/\partial x_1 - i\partial p/\partial y$, аналитическую в $\Omega_1 = \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-$, где Ω_1^- — область, симметричная области Ω_1^+ относительно оси x_1 (фиг. 3, a), и выполняется условие $\Phi(z) = \overline{\Phi}(\bar{z})$.



Фиг. 3

На криволинейном участке границы действительная и мнимая части функции $\Phi(z)$ связаны с уравнением этой границы нелинейными дифференциальными соотношениями (2.8). При $y = \pm 1$ задана ее действительная часть: $\partial p/\partial x_1 = \varkappa(dp_0/dx)_{x=\varkappa x_1}$.

Запишем условие, необходимое и достаточное для того, чтобы комплексно-значная функция точек границы была продолжима в глубь области. Одним из таких условий является обращение в нуль интеграла типа Коши в любой точке вне области [2]. Поскольку интеграл типа Коши — аналитическая функция, достаточным является обращение его в нуль на какой-нибудь дуге, целиком лежащей вне Ω_1, например на отрезке действительной оси $[X_1, X_2]$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\Phi_L dz}{z - x_0} = 0, \quad X_1 \leqslant x_0 \leqslant X_2 \quad (X_1 > s(0)/\varkappa),$$

где $L = L_1 \cup L_2$; $L_1 = \{x_1 < 0, \ y = +1\}$; $L_2 = \{x_1 = \varkappa^{-1}s(y), \ -1 \leqslant \leqslant y \leqslant 1\}$; Φ_L — граничное значение Φ.

Преобразуем интегралы по L_1 и L_2, используя формулы Коши — Римана, (2.7) и свойства симметрии. Окончательно получим

$$I[x_2; s(y)] = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_{L_1} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\varkappa^2 dp_0/dx + (\partial p/\partial y)_{y=1}}{(x - x_2)^2 + \varkappa^2} dx, \tag{3.1}$$

$$I_2 = \int\limits_{L_2} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{s''(s - x_2) p_* + [(s - x_2) s' - \varkappa^2 y] p'_*}{(s - x_2)^2 + \varkappa^2 y} dy$$

$$(X_3 \leqslant x_2 \leqslant X_4, \ s(0) < X_3 < X_4).$$

Уравнение (3.1) является основным функциональным уравнением задачи, служащим для определения $s(y)$. После того, как $s(y)$ найдена, поле производных p можно рассчитать при помощи интеграла Коши. Аналогичное условие было предложено использовать для приближенного решения линейных задач в [3] и реализовано в [4].

В интеграл I_1 входит граничное значение функции p_y на L_1. Далее устанавливается связь между $p_y(x, 1)$ и $s(y)$. С этой целью совершим преобразование области Ω_1. Функция $\zeta = \xi + i\eta = -i \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} z$ переводит Ω_1 в верхнюю полуплоскость ζ с вырезанной «луночкой» (область Ω_2 на фиг. 3, *б*). При этом лучи $z = x_1 \pm i$ переходят в лучи $\zeta = \xi = \pm \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x_1$, а отрезок $\{x_1 = 0, \ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ в отрезок $\{-1 \leqslant \xi \leqslant 1, \ \eta = 0\}$.

На границе $\partial\Omega_2$ области Ω_2 справедливо интегральное соотношение

$$\Phi[z(\zeta_0)] = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\partial\Omega_2} \frac{\Phi d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \quad (\zeta_0 \in \partial\Omega_2).$$

Отсюда

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\zeta = \xi_0} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\partial\Omega_2} \operatorname{Re} \frac{\Phi i\zeta}{\zeta - \xi_0} \quad (\xi_0 > 1). \tag{3.2}$$

В правую часть (3.2) p_y при $\xi_0 > 1$ и $\xi_0 < -1$ явно не входит, поэтому (3.2) решает задачу об определении $p_y(x, 1)$ по заданной $s(y)$.

Интеграл по $\partial\Omega_2$ разобьем на части

$$\int\limits_{\partial\Omega_2} = J_1 + J_2, \quad J_1 = \int\limits_{-\infty}^{-1} + \int\limits_1^{\infty}, \quad J_2 = \int\limits_{-1}^{1}.$$

Перейдем к интегрированию в плоскости Ω. В результате преобразований, связанных, в частности, с выделением особенности подынтегральной функции и заменой $x = 1 - t^{-1}$ в J_1, получим для J_1 и J_2 окончательные выражения, удобные для вычислений

$$p_y(x, 1) = J_1 + J_2,$$

$$J_1[t(x)] = \xi(t)\left\{\int_0^1 \frac{G(t, t_0) - G_0(t)}{t - t_0}\,dt_0 - G_0(t)\ln\frac{1-t}{t}\right\}, \tag{3.3}$$

$$G = \left.\frac{dp_0}{dx}\right|_{x=x(t_0)} \frac{(t_0 - t)\,\mathrm{sh}\,[\pi x(t_0)/2\varkappa]}{\xi^2(t_0) - \xi^2(t)}, \quad G_0 = \left.\frac{dp_0}{dx}\right|_{x=x(t)} \frac{\varkappa}{\pi\xi(t)},$$

$$\xi(t) = \mathrm{ch}\,[\pi x(t)/2\varkappa], \quad x(t) = 1 - t^{-1},$$

$$J_2[\xi(x)] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{Ap'_* + Bg}{|\zeta_0 - \xi|} + \frac{(A_1 - A_2)\,p'_* + (B_2 - B_1)\,g}{|\zeta_0 + \xi|}\right\} dy,$$

$$A = A_1 + A_2, \quad B = B_1 + B_2, \quad \eta_0 = -\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi s}{2\varkappa}\cos\frac{\pi}{2}\,y,$$

$$A_1 = -\,\xi_0\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi s}{2\varkappa}\sin\frac{\pi}{2}\,y, \quad A_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi s}{\varkappa},$$

$$B_1 = -\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi s}{2\varkappa}\cos\frac{\pi}{2}\,y, \quad B_2 = \frac{1}{2}\sin\pi y,$$

$$|\zeta_0 \pm \xi| = (\xi_0 \pm \xi)^2 + \eta_0^2, \quad \xi_0 = \mathrm{ch}\,\frac{\pi s}{2\varkappa}\sin\frac{\pi}{2}\,y,$$

$$\xi = \mathrm{ch}\,\frac{\pi x}{2\varkappa}, \quad g = \varkappa^{-1}\left(s''p_* + s'p'_*\right).$$

4. Метод численного решения основного уравнения задачи и результаты расчетов. Запишем функционал

$$H(s) = \int_{X_3}^{X_4} |I(x_2; s)|\,dx_2,$$

определенный на множестве функций S, дважды непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих на концах отрезка [0, 1] условиям (2.9).

На функциях-решениях $H(s)$ достигает минимума, равного нулю (проведенные численные расчеты свидетельствуют в пользу единственности решения).

Будем искать минимум $H(s)$ методом подбора на подмножествах функций $S_n \subset S$, где S_n — множества кубических сплайн-функций [5], n — число разбиений отрезка [0, 1]. В качестве первого приближения возьмем $n = 2$ и ограничимся случаем $n = 3$ для численного решения задачи с приемлемой точностью. Для каждого приближения $s_n \in S_n$ значения I будем вычислять по формулам (3.1), а значения $p_y(x, 1)$ — по формулам (3.3), которые получены в предположении, что s — истинное решение. Предполагается сходимость вычисленной таким образом $p_y(x, 1)$ к точному решению при $s_n \to s$ (равномерно).

Фактически вычислительная процедура заключается в отыскании минимума функции $n - 1$ переменного, каковыми являются моменты $M_i = s''_n(y_i)$ в промежуточных узлах. Расчет на сетке M_2, M_3 ($n = 3$) с малым шагом показал, что поверхность H (M_2, M_3) относится к «овражному» типу, причем направление «дна оврага» приблизительно совпадает с направлением прямой $M_2 + M_3 = \mathrm{const}$. Соответственно в программе используется модифицированный метод поиска минимума функции «овражного» типа [6].

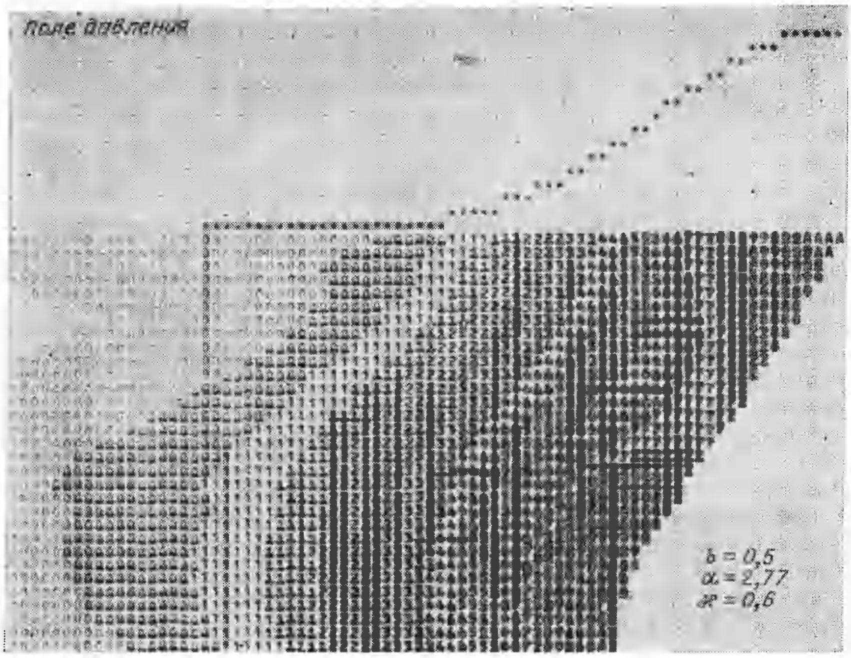
Обратим теперь внимание на математическую природу задачи и основного уравнения, к которому она сведена. Задачи с неизвестной границей относятся к классу обратных задач, обычные методы решения которых нередко приводят к неустойчивости. То же самое можно сказать и про уравнение (3.1), поскольку оно является абстрактным уравнением Фредгольма первого рода. Задачу можно свести к решению операторного уравнения второго рода, но численная реализация решения (3.1) вызывала меньше сомнений. В отличие от [7], где аналогичный метод привел к практически устойчивому вычислительному алгоритму, условия в приведенной краевой задаче здесь не являются однотипными. Вычисления показали, что в некоторых вариантах значения функционала выходят на побочный минимум, а решение не удовлетворяет условию непрерывности $p_y(x, 1)$ в точке $x = 0$: вариация δs_3 вызывает вариацию δp_y по формулам (3.2), которая компенсирует влияние δs_3 на интеграл I. С целью регуляризации к функционалу добавляется слагаемое, представляющее собой невязку в выполнении краевого условия для $p_y(x, 1)$ [8]. Отметим, что с этой же целью уравнение $I = 0$ записано через Φ (как и в [7]), а не через аналитическую функцию $p - iv/\varkappa$ (это было бы несколько проще). Можно ожидать, что функционал H в данном варианте более чувствителен к $s(y)$.

Погрешность решения оценивалась величиной $\delta = (H_m/H_1)\cdot 100\%$, где H_m — достигнутое значение минимума H, $H_1 = \int\limits_{X_5}^{X_6} |I|\, dx_2$, а $[X_5, X_6]$ — отрезок оси x, симметричный отрезку $[X_3, X_4]$ относительно точки A, на котором $I = \Phi = \partial p/\partial x_1$. Она образовалась вот из каких соображений. Поскольку решение в области определяется при помощи интеграла Коши, уравнениям внутри области оно удовлетворяет точно. Из формулы Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши $\Phi - \Phi^- = \Phi_L$, где Φ^- — предельное значение интеграла типа Коши вне области Ω_1, следует, что величина $\delta_0 = |\Phi^-/\Phi_L|\cdot 100\%$ характеризует невязку в выполнении краевых условий, так как в точном решении $\Phi^- = 0$. Точку A можно взять, как наиболее представительную, поскольку решение в окрестности ножки фронта сильно меняется. При практических расчетах для оценки удобнее взять величину δ, характеризующую отношение не предельных, а средних значений $|\Phi|$ справа и слева от ножки фронта. Интуитивно ясно, что значения δ должны быть близки к δ_0.

О достигнутой точности свидетельствуют также: а) выход ветви функции $p_y(x, 1)$ на краевое значение при $x = 0$; б) выход значений p на асимптотику $p \to p_1$ при $x \to -\infty$ в результате интегрирования поля $\partial p/\partial x$ от фронта в глубь области. Расчеты показали, что точность «а», «б» соответствует оценке δ. Достигнутые значения δ составляют $\approx 0{,}5\%$, а выход на асимптотику «б» осуществляется с относительной точностью, не превышающей 2,5%.

Для интерполяции $s(y)$ во втором приближении использовалась сплайн-функция $s_3(y)$ на неравномерной сетке. Для большинства вариантов длины интервалов подбирались с целью улучшить оценку δ от нескольких процентов до $\approx 0{,}5\%$. В процессе отладки программы были подобраны оптимальные значения внутренних параметров задачи (числа точек, шаги итераций и т. д.).

На фиг. 4 приведен пример численного расчета поля давлений (составляющей вектора массовой скорости u), нормированного на p_{00} в физической плоскости и в символической форме записи. Число разбиений по



Фиг. 4

толщине слоя равно 30. Переход к следующему символу означает изменение p/p_{00} на 0,05. Цифрами 0, $\underline{0}$, 1, $\underline{1}$, 2, $\underline{2}$, . . . отмечены зоны пониженных, а буквами А, $\underline{\text{А}}$, Б, $\underline{\text{Б}}$, В, $\underline{\text{В}}$, . . . — повышенных давлений, так что символ А соответствует $p/p_{00} = 1+\varepsilon_0$, $\underline{\text{А}}$ — $1{,}05\pm\varepsilon_0$, В — $1{,}1\pm\varepsilon_0$, . . ., $\underline{9} = 0{,}95+\varepsilon_0$, $9 = 0{,}9+\varepsilon_0$, . . . $0 = \pm\varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = 0{,}025$).

Звездочками изображен график нагрузки. Первая строка символов сверху также относится к нагрузке. Давление на поверхности задавалось в виде

$$p_0(x) = p_{00} \exp\left[(-1)^{j+1}\alpha x^j\right] \quad (j = 1,\, 2).$$

Таким образом, варьировались четыре внешних параметра задачи: α, j-характеристики длины и формы импульса, $b = s'(1) = \left(U_0^2/D_0^2 - 1\right)^{1/2} = \operatorname{tg}\beta$ — его интенсивности или угла наклона фронта в точке B (см. фиг. 1) и $\varkappa = \left(1 - U_0^2/c^2\right)^{1/2}$. При выборе b и $\varkappa$ учитывались следующие обстоятельства. Во-первых, $p_{\max}$ — максимальное давление, достигаемое в точке A, не должно быть велико (иначе могут нарушиться принятые допущения). Можно вычислить

$$p_{\max}/p_{00} = (b^2 + \varkappa^2)/\varkappa^2,$$

и полагалось $p_{\max}/p_{00} < 5$. Во-вторых, знаменатель в выражении для $s''(1)$ в (2.9) при $\varkappa^2 = 3b^2$ обращается в нуль, а при $\varkappa^2 > 3b^2$ знак $s''(1)$ оказывается неестественным: спадающей нагрузке отвечает рост интенсивности ударной волны по направлению в глубь области. В [8] для выяснения этой ситуации проведено исследование на примере задачи о малых стационарных возмущениях косой ударной волны, распространяющейся в полупространстве. Установлено, что при $\varkappa^2 \geqslant 3b^2$ решение имеет интегрируемую особенность в точке B (косвенное указание на неустойчивость решения). При $\varkappa^2 < 3b^2$ оно всюду непрерывно в $\Omega \cup L$. Физически условие $\varkappa^2 < 3b^2$ означает, что изобары подходят сверху, $\varkappa^2 = 3b^2$ — горизонтально, $\varkappa^2 > 3b^2$ — снизу к фронту косой ударной волны. При условии $D_0 < U_0 < c$ существуют области (не нулевой меры) параметров, удовлетворяющих неравенству того и другого смысла. Видно, что неравенству $\varkappa^2 \geqslant 3b^2$ соответствуют малые углы β $(0 \leqslant \operatorname{tg} \beta \leqslant \varkappa/\sqrt{3})$.

Расчеты проводились для значений $b = 1{,}0;\ 0{,}5;\ 0{,}25$ и $\varkappa = 0{,}9;\ 0{,}6$ $(b = 1)$, $\varkappa = 0{,}6;\ 0{,}3$ $(b = 0{,}5)$, $\varkappa = 0{,}3$ $(b = 0{,}25)$. При этом $\varkappa = 0{,}9$ соответствует $U_0 \approx 0{,}45c$, $\varkappa = 0{,}6$ — $U_0 \approx 0{,}8c$, $\varkappa = 0{,}3$ — $U_0 \approx \approx 0{,}954c$.

Примем за характерную длину импульса величину $l = -x_0$ (x_0 — координата, где интенсивность нагрузки падает вдвое). В расчетах принималось $l = \infty,\ 1{,}5;\ 1{,}0;\ 0{,}5;\ 0{,}25$ $(j = 2)$; $l = 1{,}0;\ 0{,}5;\ 0{,}25$ $(j = 1)$ (соответственно $\alpha = 0;\ 0{,}31;\ 0{,}7;\ 2{,}77;\ 11{,}4$ $(j = 2)$; $\alpha = 0{,}7;\ 1{,}39;\ 2{,}77$ $(j = 1)$).

Изобары концентрируются около точки A и для длинных импульсов нагрузки («ступеньки», в частности) имеют форму вытянутых кверху дуг овалов. С уменьшением параметра $\varkappa$ картина как бы сжимается вдоль оси x, хотя изменение положения фронта относительно мало. Наклоны изобар, подходящих к фронту, находятся в полном согласии с результатами линейной теории [8].

В частицах после прохождения ударной волны и порою на значительном по толщине участке фронта происходит догружение и может составлять десятки процентов от давления на фронте. Априори была мысль о разгрузке за фронтом.

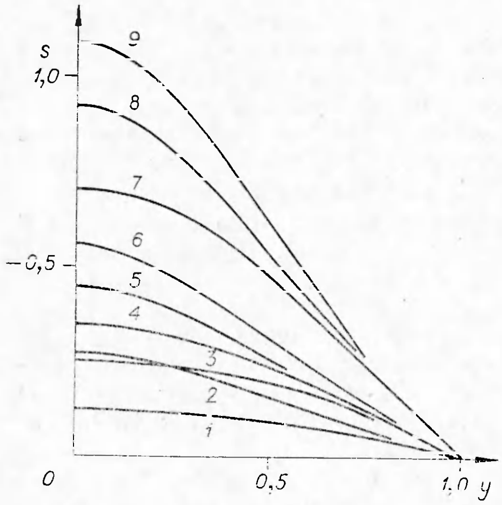
При $l \sim 1$ картина изобар усложняется влиянием разгрузки на внешней поверхности. На фронте появляется область пониженного давления. Кривизна фронта при наличии затухания меняет знак.

Будем характеризовать затухание величиной $e = 1 - p_{\min}/p_{00}$

$$\left(p_{\min} = \min_{0 \leqslant y \leqslant 1} p_*(y)\right).$$

С уменьшением угла β эффект затухания существенно снижается. Одна и та же величина e при переходе от $b = 0{,}5$ к $b = 0{,}25$ $(\varkappa = 0{,}3)$ достигается уменьшением длины импульса примерно вдвое. Это можно объяснить тем, что при $\beta \to 0$ фронт и изобары становятся почти вертикальными, а волна — плоской.

Номер фигуры	Номер кривой	b	$\varkappa$	l	j	e	$s(o)$
5	*1*	0,25	0,30	∞			0,13
	2	0,25	0,30	0,25	2	0,25	0,27
	3	0,50	0,60	∞			0,26
	4	0,50	0,30	∞			0,36
	5	0,50	0,60	0,50	2	0,28	0,56
	6	0,50	0,30	0,50	2	0,10	0,45
	7	1,00	0,60	∞			0,70
	8	1,00	0,60	1,00	1	0,22	0,93
	9	1,00	0,90	1,00	1	0,39	1,10
6	*1*	0,50	0,60	∞			0,26
	2	0,25	0,30	∞			0,13
	3	0,50	0,60	0,50	1	0,53	0,53
	4	0,25	0,30	0,50	1	0,20	0,20
	5	0,25	0,30	0,25	1	0,29	0,29



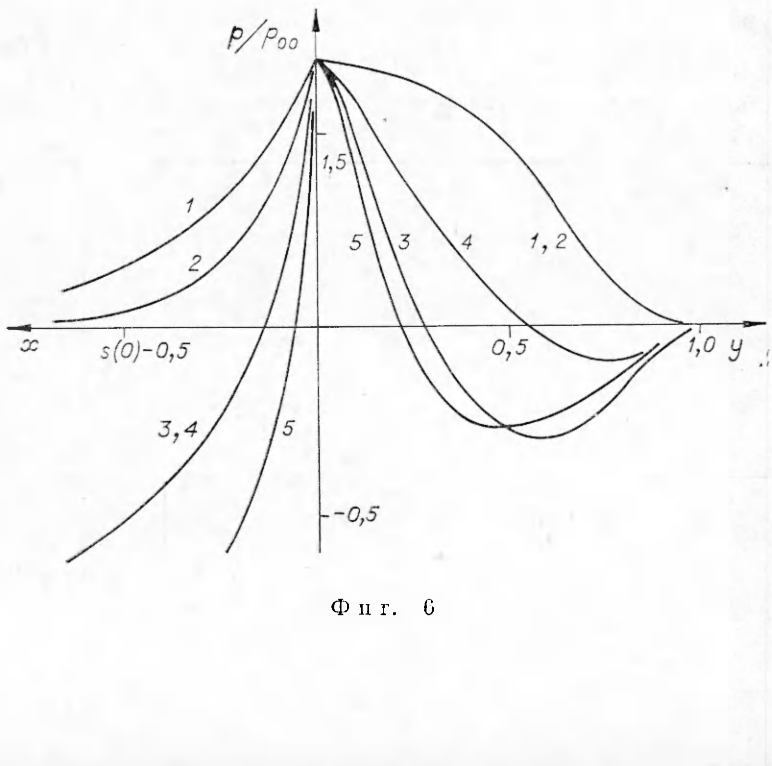
Фиг. 5

Форма импульса меньше влияет на решение, чем его длина. Уменьшение l вдвое приводит к удвоению величины e. Сравнивая результаты для различных форм импульса ($j = 1{,}2$) в двух случаях: $b = 0{,}5$, $\varkappa = 0{,}6$, $l = 0{,}5$ и $b = 0{,}25$, $\varkappa = 0{,}3$, $l = 0{,}25$, получим приблизительно одинаковую величину затухания (около 0,27). При других значениях b, $\varkappa$ влияние формы заметнее: $e \approx 0{,}39$ ($b = 1$, $j = 1$, $\varkappa = 0{,}9$), $e \approx 0{,}18$ ($b = 1$, $j = 2$, $\varkappa = 0{,}9$).

С ростом скорости звука (увеличением $\varkappa$) величина e растет существенно. Сравнивая решения при $b = 1$, $l = 1$, $j = 1$ и разных $\varkappa$, получим $e \approx 0{,}39$ ($\varkappa = 0{,}9$), $e \approx 0{,}22$ ($\varkappa = 0{,}6$). При $b = 0{,}5$ и разных $\varkappa$ наблюдается такое же соответствие.

На фиг. 5, 6 показаны линии фронтов и распределения давлений вдоль фронта и жесткой стенки. Соответствие параметров номерам фигур дано в таблице, где также приведены значения e и s (0).

Кривые *1*, *2* (фиг. 6) для $p_*(y)/p_{00}$ совпадают, что свидетельствует, во-первых, о частичном подобии (в тех же случаях кривые $p(x, 0)/p_{00}$ расходятся) в случае ступенчатой нагрузки и одинаковых значениях $p_{\max}/p_{00} = (b^2 + \varkappa^2)/\varkappa^2$; во-вторых, косвенно о достигнутой точности: оценка относительной разности $p_*(y)$ (относительно $p_{\max}$) в равномерной метрике не превышает 2%. Если импульс не «ступенька», то подобия не наблюдается (сравним кривые *3*, *4* на фиг. 6).



Фиг. 6

При коротких импульсах нагрузки ($l = 0{,}25$) в окрестности точки A формируется короткая волна: очень большие градиенты ($\partial p/\partial x \sim 10^2$) при максимальных значениях самих функций. Проанализируем влияние отброшенных членов в системе (2.1). Непосредственные вычисления по данным из расчетов показывают, что слагаемые $\theta_0 v u_y$ и $\theta_0 v v_y$ вплоть до $\theta_0 \approx 0{,}3$ остаются на порядок меньше $|\nabla p|$. Кроме того, коэффициенты $(1 - \theta_0 u)/(1 - \theta) \approx 1 - (1 - p_{00})\theta_0$ в первых двух и $(1 - u\theta_0)$ в третьем уравнениях (2.1) заменены на единицу. Наибольшую погрешность может внести последнее. Однако значения функций в точке A здесь вычисляются точно, а окрестность, где $u = p$ может существенно превышать единицу, мала, поэтому следует ожидать, что учет конвективных членов при $\theta < 0{,}2$ окажет малое влияние на решение в целом в отличие от [9], где ситуация принципиально другая.

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Херман В.** Определяющее уравнение для динамического сжатия пластических пористых материалов.— Сб. пер. Механика, 1970, № 5.
2. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. **Купрадзе В. Д.** О приближенном решении задач математической физики.— УМН, 1967, т. 22, № 2.
4. **Верюжский Ю. В., Вусатюк А. И., Савицкий В. В.** Численная реализация метода академика В. Д. Купрадзе при решении некоторых статических задач теории упругости.— Сопротивление материалов и теория сооружений. Респ. межвед. науч.-техн. сб. Киев, «Будівельник», 1975, вып. 25.
5. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М., «Наука», 1976.
6. **Первозванский А. А.** Поиск. М., «Наука», 1970.
7. **Симонов И. В.** Дифракция плоской ударной волны на углах в идеальной уплотняющейся среде.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1978, № 1.
8. **Симонов И. В.** Численно-аналитическое исследование задачи о нагрузке, бегущей по слою идеально уплотняющегося материала. Препринт Ин-та проблем механики АН СССР, 1978, № 115.
9. **Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.** Теория коротких волн.— ПМТФ, 1960, № 1.

УДК 539.3+539.4

О ДИНАМИКЕ РАЗРУШЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

М. В. Степаненко

(Новосибирск)

Рассмотрена динамическая задача о концентрации напряжений и последующем распространении трещины отслаивания в однонаправленном стеклопластике. Исследуется плоская деформация, материал стеклопластика соответствует модели [1], т. е. предполагается, что армирующие волокна находятся в одноосном напряженном состоянии (растяжение — сжатие), а заполнитель (связующее) испытывает только напряжения сдвига.