

Применив к (11) обратное преобразование Фурье (9), находим (12)

$$u(x, t) = \frac{c_0 x}{2 \sqrt{\pi D}} \exp \left[ - \int_0^t f(\lambda) d\lambda \right] \int_0^\infty \exp \left[ \frac{w^2 \lambda}{4D} + \int_0^\lambda f(\alpha) d\alpha - \frac{x^2}{4D(t-\lambda)} \right] \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}}$$

Далее, используя (12) и (6), получим

$$c(x, t) = \frac{c_0 x}{2 \sqrt{\pi D}} \exp \left[ - \int_0^t f(\lambda) d\lambda + \frac{wx}{2D} \right] \int_0^t \exp \left[ - \frac{w^2(t-\lambda)}{4D} - \frac{x^2}{4D(t-\lambda)} + \int_0^\lambda f(\alpha) d\alpha \right] \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/2}} \quad (13)$$

Произведем здесь замену переменной  $\xi = 1/2 x / \sqrt{D(t-\lambda)}$ ; получим

$$c(x, t) = \frac{2c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{Dt}}^\infty \exp \left[ - \int_{t-x^2/4D\xi^2}^t f(\lambda) d\lambda - \left( \xi - \frac{wx}{4D\xi} \right)^2 \right] d\xi \quad (14)$$

Это решение удовлетворяет начальным и граничным условиям (2). Решение (14) не учитывает влияния внешнего поля на диффузию в объеме кристалла, так как скорость переноса в объеме на несколько порядков ниже, чем в границе.

Сложность выражения (14) обусловлена общим видом функции  $f(t)$ , которая учитывает геометрию границы, диффузию из границы в объем и т. д. В частных случаях решение будет значительно упрощаться. Так, если рассмотреть влияние внешнего поля на диффузию в плоской границе, как это сделано в работе [2], то функция  $f(t) = \sqrt{D_v / y^2 t}$ , а решение (14) примет вид

$$c(x, t) = \frac{2c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{Dt}}^\infty \exp \left[ - \frac{2\sqrt{D_v t}}{\delta} + \frac{2}{\delta} \left( D_v t - \frac{x^2 D_v}{4D\xi^2} \right)^{1/2} - \left( \xi - \frac{wx}{4D\xi} \right)^2 \right] d\xi \quad (15)$$

Обычно величина коэффициента объемной диффузии  $D_v$  определяется независимо, поэтому для определения  $D$  и  $w$  можно воспользоваться методом «стандартных кривых», которые строятся на основании вычисления найденного решения на электронно-вычислительной машине.

Поступила 15 XII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fisher J. C. Calculation of diffusion penetration curves for surface and grain boundary diffusion. J. Appl. Phys., 1951, vol. 22, No 1.
2. Клоцман С. М., Тимофеев А. Н., Трахтенберг И. Ш. Межкристаллитная самодиффузия серебра в электрическом поле. Физ. тверд. тела, 1963, т. 5, вып. 11.
3. Эйнтштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение, ОНТИ, 1963.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.

#### ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ С СЕТОЧНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ ПРИ СЛАБОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

А. И. Болиславский, Е. И. Янтовский

(Харьков)

Рассматривается установившееся течение несжимаемой и невязкой электропроводной жидкости в трубе кругового сечения. Стенки трубы предполагаются изолированными. Оба электрода, установленные поперек трубы на расстоянии  $l$  друг от друга, выполнены в виде сетки (фиг. 1). Потенциалы на электродах считаются постоянными.

В данном случае уравнения магнитной гидродинамики имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mu \mathbf{H}) \quad (1)$$

Учитывая условия осевой симметрии

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{H} = (0, H_\theta, 0), \quad \mathbf{V} = (V_r, 0, V_z)$$

и введя потенциал электрического поля  $\varphi$  ( $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ ), получаем следующие пять уравнений для определения  $V_r, V_z, H, p, \varphi$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mu}{\rho} H \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \quad (2)$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} H \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( p + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

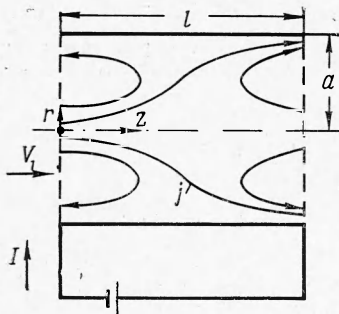
$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \sigma \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \mu H V_z \right) = j_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) = \sigma \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu H V_r \right) = j_z$$

Введем безразмерные величины и параметры ( $V_1$  — скорость втекающей жидкости,  $I$  — ток)

$$z^\circ = \frac{z}{a}, \quad r^\circ = \frac{r}{a}, \quad V^\circ = \frac{V}{V_1}, \quad H^\circ = \frac{H}{H_a}, \quad H_a = \frac{I}{2\pi a}$$

$$R_m = \mu \sigma V_1 a, \quad A^2 = \frac{\mu H_a^2}{\rho V_1^2}$$

Тогда уравнения (2) преобразуются к виду (значок безразмерности опущен)



Фиг. 1

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - A^2 H \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} - A^2 H \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = R_m \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + V_z H \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) = R_m \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + V_r H \right)$$

Рассматривается частный случай  $A^2 \ll 1$ , т. е. магнитное давление много меньше динамического.

При этом можно пренебречь последними членами во втором и третьем уравнениях (3). Относительно величины  $R_m$  делается единственное предположение  $R_m \ll 1/A^2$ , поэтому, если  $A^2$  достаточно мало, то  $R_m$  может быть велико.

Следовательно, предполагается, что параметр взаимодействия  $A^2 R_m$  очень мал, и поперечные силы не оказывают влияния на течение, поэтому решение для скорости жидкости имеет вид  $V_z = \pm 1, V_r = 0$ , т. е. жидкость движется как твердый стержень вдоль своей оси.

Исключив из двух последних уравнений (3) потенциал  $\varphi$ , получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно магнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) \right] + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = V_z R_m \frac{\partial H}{\partial z} \quad (4)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решения уравнения (4), удовлетворяющего граничным условиям

$$H = 1 \quad \text{при } r = 1, \quad 0 \leq z \leq l$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = V_z R_m H \quad \text{при } z = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = V_z R_m H \quad \text{при } z = l \quad (5)$$

$$H = 0 \quad \text{при } r = 0$$

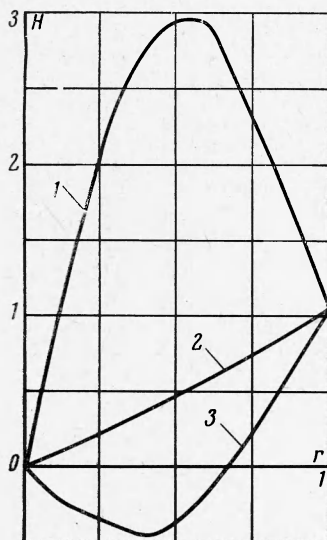
Это решение имеет вид

$$H = 2V_z R_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta l} - 1) \alpha e^{\alpha z} + (e^{\alpha l} - 1) \beta e^{-\beta z}}{(e^{\alpha l} - e^{-\beta l}) \lambda_k^3 J_0(\lambda_k)} J_1(\lambda_k r) + r \quad (6)$$

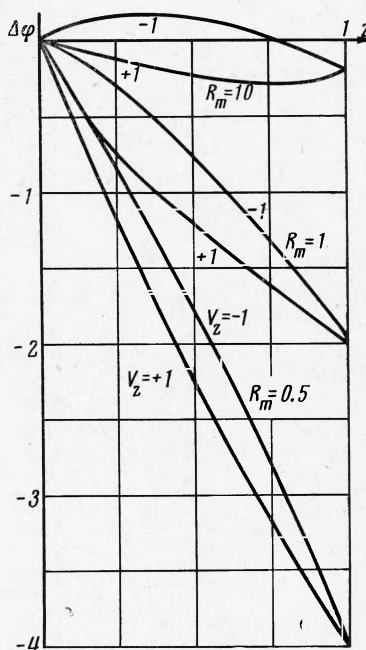
Здесь  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка;  $J_1$  — функция Бесселя первого порядка;  $\lambda_k$  — корень уравнения  $J_1(\lambda) = 0$ ;

$$\alpha = 1/2 V_z R_m + \sqrt{1/4 R_m^2 + \lambda_k^2}, \quad \beta = -1/2 V_z R_m + \sqrt{1/4 R_m^2 + \lambda_k^2} \quad (7)$$

На фиг. 2<sub>а</sub> показано рассчитанное по формуле (6) распределение магнитного поля внутри трубы; на фигуре кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $z = 0, 0.5l, 1.0l$ . Видно, что магнитное поле возле одного электрода внутри трубы имеет максимум и может быть больше поля, созданного на ее поверхности током внешней цепи, а возле



Фиг. 2



Фиг. 3

другого электрода магнитное поле имеет минимум. Это свидетельствует о появлении замкнутых токов внутри жидкости, не проходящих через внешнюю цепь.

Картина распределения токов внутри жидкости, построенная по графикам для магнитного поля (фиг. 2), приведена на фиг. 1. Такое распределение токов устанавливается в жидкости при достаточно большом  $R_m$ . Если же  $R_m$  мало, то имеет место тривиальное распределение — ток течет по прямым линиям от одной сетки к другой.

Определим также безразмерную разность потенциалов при  $r = 1$

$$\Delta\varphi(z) = - \int_0^z \frac{1}{R_m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH) dz =$$

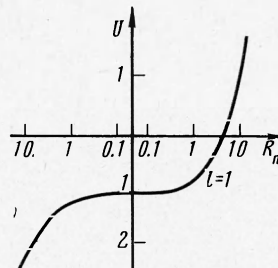
$$= 2V_z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta l} - 1)(1 - e^{\alpha z}) - (e^{\alpha l} - 1)(1 - e^{-\beta z})}{(e^{\alpha l} - e^{\beta l}) \lambda_k^2} - \frac{2z}{R_m}$$

Если  $z = l$ , то

$$\Delta\varphi = \varphi(l) - \varphi(0) = - \frac{2l}{R_m}$$

На фиг. 3 построены графики для разности потенциалов как функции от  $z$  при  $R_m = 0.5, 1, 10$ , а на фиг. 4 приведена зависимость  $U = \Delta\varphi R_m$  как функции от  $R_m$  при  $z = 0.5$ .

Видно, что разность потенциалов между электродами прямо пропорциональна длине канала, обратно пропорциональна  $R_m$  и всегда отрицательна. Внутри канала при достаточно большом  $R_m$  величина  $\Delta\varphi(z)$  может стать положительной.



Фиг. 4