

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА
В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Ю. А. Садов

(Москва)

§ 1. Исходные уравнения. Уравнения установившегося квазидвижения проводящего газа в скрещенных электрическом и магнитном полях при отсутствии вязкости, теплопроводности и теплообмена со стенками в случае канала постоянного сечения имеют вид [1]:

$$\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = \sigma \frac{H}{c} \left(E - u \frac{H}{c} \right), \quad \rho u c_p \frac{dT}{dx} + \rho u^2 \frac{du}{dx} = \sigma E \left(E - u \frac{H}{c} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho u = g, \quad p = \rho R T$$

Здесь u , ρ , p , T — соответственно скорость, плотность, давление и температура потока; E и H — напряженности электрического и магнитного полей; σ — проводимость газа, которая зависит от параметров потока и магнитного поля; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; R — газовая постоянная; c — скорость света; g — массовый расход на единицу площади поперечного сечения.

При данной записи этих уравнений под H понимается некоторое среднее значение компоненты магнитного поля, перпендикулярной к направлению течения, и влиянием других компонент на продольное движение газа пренебрегается. Поэтому H не определяется токами, протекающими в газе, и рассматривается как некоторая функция x , от которой зависит характер течения. Предполагается, что требуемая зависимость $H(x)$ обеспечивается соответствующей профилировкой внешнего магнитного поля. Электрическое поле E предполагается постоянным по длине.

Некоторые решения системы уравнений (1.1) исследованы в работах [1-4]. В них приведены решения для $H = \text{const}$, $T = \text{const}$, а также решение, описывающее течения с максимальным локальным ускорением. Ниже приведены некоторые новые виды решений, описывающие политропические движения и оптимальные режимы ускорения потока.

§ 2. Политропические движения. Введем безразмерные величины

$$v = \frac{u^2}{U_0^2}, \quad s = \frac{RT}{u^2} - \frac{1}{\gamma M^2}, \quad q = \frac{uH}{cE}, \quad dy = \frac{\sigma E^2}{g U_0^2} dx \quad (2.1)$$

где U_0 — некоторая масштабная скорость, γ — отношение удельных теплоемкостей. Уравнения (1.1) приводятся к системе уравнений

$$\frac{1}{2} (1 + s) \frac{dv}{dy} + v \frac{ds}{dy} = q (1 - q) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{2} (1 + 2\alpha s) \frac{dv}{dy} + \alpha v \frac{ds}{dy} = 1 - q \quad \left(\alpha = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \quad (2.3)$$

Сделаем предположение, что $s = av^n$. Тогда из (2.2) и (2.3) можно получить

$$\frac{dv}{dy} = \frac{2 [2\alpha - 1 + 2n(\alpha - 1)] av^n}{[1 + 2\alpha(n + 1) av^n]^2} \quad (2.4)$$

Выполняя интегрирование и заменяя av^n на s , имеем

$$y = \frac{v}{2[2\alpha - 1 + 2n(\alpha - 1)]} \left[4\alpha^2(1+n)s + 4\alpha(1+n) + \frac{1}{(1-n)s} \right] + C \quad (n \neq 1)$$

$$y = \frac{v}{2(4\alpha - 3)} \left(8\alpha^2 s + 8\alpha + \frac{\ln s}{s} \right) + C \quad (n = 1) \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.3), (2.4) находим

$$q = \frac{1 + (2n + 1)s}{1 + 2\alpha(n + 1)s} \quad (2.6)$$

Соотношения (2.5), (2.6) вместе с выражением, связывающим v и s , дают решение задачи, выраженное в параметрическом виде.

Для того чтобы выяснить физический смысл полученного решения, заметим, что в принятых обозначениях $v \sim u^2$, $s \sim Tu^{-2}$, поэтому условие $s \sim v^n$ дает связь между скоростью и температурой потока

$$T \sim u^{2n+2} \quad (2.7)$$

Таким образом, полученное решение позволяет находить течения, которые при заданных начальных значениях u_0 и T_0 имеют заданные конечные значения u_1 и T_1 .

При этом n определяется по формуле

$$n = \frac{1}{2} \frac{\lg(T_1/T_0)}{\lg(u_1/u_0)} - 1$$

и соотношения (2.5) и (2.6) дают распределение скорости, температуры и магнитного поля по длине.

Из соотношений (1.1) и (2.7) получаем

$$p \sim \rho^{-2n-1} \quad (2.8)$$

Это выражение показывает, что полученное решение определяет политропические течения с показателем политропы $k = -2n - 1$ и поэтому включает в себя в качестве частных случаев изотермические течения ($n = -1$), течения с постоянным давлением ($n = -0.5$) и т. д.

Заметим, что согласно (2.6) для всех политропических течений при $M = 1$, т. е. $s = (\alpha - 1)/\alpha$, q принимает значение $1/\alpha$, т. е. автоматически выполняется условие перехода через скорость звука для ускоряющихся течений, полученное в работе [1].

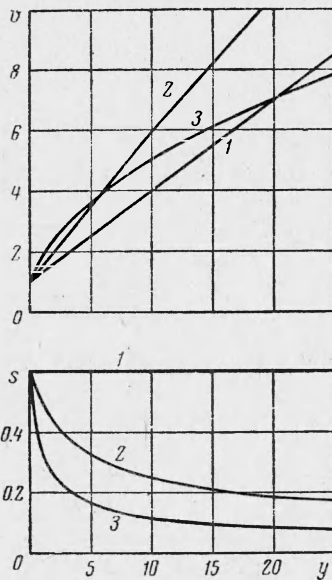
В зависимости от показателя n политропические течения могут быть как ускоряющимися, так и замедляющимися. Из уравнения (2.4) следует, что ускоряющиеся течения получаются при

$$(2\alpha - 1) + 2n(\alpha - 1) > 0, \quad \text{или} \quad k < \gamma$$

где k — показатель политропы.

Этот результат является необходимым следствием возрастания энтропии потока, которое вызывается выделением джоулева тепла.

На кривых 1, 2, 3 фиг. 1 представлена зависимость безразмерных параметров v и s от y для значений $n = 0, -0.5, -1$ соответственно. Все расчеты проводились для $\alpha = 2.5$, что соответствует $\gamma = 5/3$. Параметры кривых выбраны так, чтобы $s = 0.6$ и $y = 0$ при $v = 1$. Из фиг. 1 видно, что полученное решение дает достаточно разнообразные течения. Однако при некоторых условиях длина участка ускорения оказывается слишком большой, и тогда встает задача получить течение с той же скоростью на выходе на меньшей длине. При помощи политропических



Фиг. 1

течений можно проследить зависимость длины ускорения от конечной температуры T_1 (или от конечного числа Маха M_1). Для этого при данных начальных параметрах u_0 , M_0 и заданной конечной скорости u_1 рассчитываем для различных n число Маха на выходе и длину ускорения L . Из полученной таким образом кривой $L(M_1)$ можно определить приемлемые условия ускорения. Подобная кривая для зависимости конечного числа M от безразмерной длины участка ускорения y представлена на фиг. 2 (кривая 1). При этом принималось, что $v_0 = 1$, $M_0 = 1$ и $v_1 = 100$, т. е. на данной длине скорость увеличивается в 10 раз.

Наличие минимума на кривой $y(M_1)$ можно объяснить следующим образом. При увеличении числа M_1 ток, протекающий через канал, уменьшается. При этом, с одной стороны, уменьшается ponderomotorная ускоряющая сила, но, с другой стороны, уменьшается и положительный градиент давления, тормозящий поток. В зависимости от соотношения этих двух факторов длина канала при увеличении числа Маха на выходе может либо уменьшаться, либо увеличиваться, причем уменьшение длины происходит в области больших положительных градиентов давления, т. е. при сильном нагреве газа и при больших плотностях тока. В области малых плотностей тока и больших чисел M на выходе при увеличении M_1 длина канала увеличивается. Ясно, что эта вторая область имеет большее значение для ускорения, так как здесь при одинаковой степени ускорения и равной длине коэффициент полезного действия, определяемый как отношение приращения кинетической энергии струи к приращению ее полной энтальпии, выше.

Однако для значительного увеличения скорости при сохранении не слишком высокой температуры на выходе и в этом случае требуется сравнительно большая длина участка ускорения. Так, для увеличения скорости в 10 раз при изменении числа M от 1 до 20 необходимая безразмерная длина y составляет $2.43 \cdot 10^5$. Принимая $\sigma = 1 \text{ (ом см)}^{-1}$, $U_0 = 10^5 \text{ см сек}^{-1}$, $g = 10^{-3} \text{ г см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$, $E = 30 \text{ в см}^{-1}$, получаем, что длина x участка, на котором происходит ускорение, равна 2.7 м.

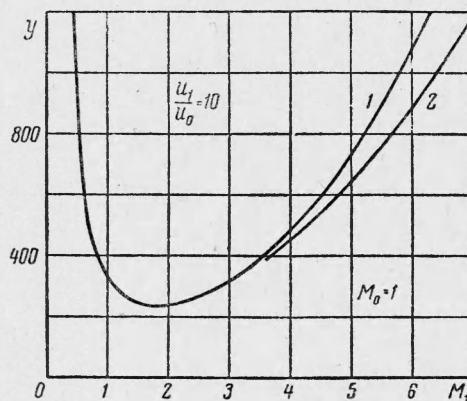
§ 3. Оптимальные движения. Заметим, что при заданных граничных значениях параметров потока длина ускорения не может быть сделана как угодно малой за счет соответствующей профилировки магнитного поля. Это связано с тем, что при $M > 1$ ускорение потока в некоторой точке при изменении магнитного поля в этой точке имеет максимальное значение. Поэтому для данных граничных значений параметров уменьшение длины ускорения возможно лишь до некоторого предельного значения, получающегося при определенном режиме ускорения, который будет называться оптимальным.

Задача отыскания оптимальных режимов формулируется следующим образом: найти течение, описываемое системой уравнений (1.1) и такое, чтобы при заданных начальных значениях u_0 и T_0 заданные конечные значения u_1 и T_1 получались бы на наименьшей длине. Здесь решается другая, эквивалентная задача: найти течение, описываемое системой уравнений (1.1) и такое, чтобы при заданных начальных значениях u_0 и T_0 и данной конечной температуре T_1 скорость, получаемая на данной длине, была бы наибольшей.

Воспользуемся безразмерными переменными, определяемыми соотношениями (2.1); безразмерную координату z определим следующим образом:

$$\sigma' dz = dy \quad (\sigma' = \sigma / \sigma_0) \quad (3.1)$$

Здесь σ_0 — некоторая масштабная проводимость, y — безразмерная координата, определяемая соотношением (2.1).



Фиг. 2

Поставленную здесь задачу нельзя сформулировать через переменную y , так как y не пропорциональна физической длине x , а зависит через проводимость σ от распределения температуры, плотности и магнитного поля вдоль канала. Поэтому нельзя утверждать, что минимальному значению x соответствует минимум y и наоборот. Введение безразмерной координаты z позволяет избежать этой трудности, так как z пропорциональна x , и при экстремальном значении одной из этих величин вторая также принимает экстремальное значение.

Уравнения течения в рассматриваемых переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1+s)\frac{dv}{dz} + v\frac{ds}{dz} &= \sigma'q(1-q) \\ \frac{1}{2}(1+2\alpha s)\frac{dv}{dz} + \alpha v\frac{ds}{dz} &= \sigma'(1-q) \quad (\sigma' = \sigma'(v, s, q)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для решения требуется найти функции $v(z)$, $s(z)$ и $q(z)$, удовлетворяющие уравнениям связи (3.2) и обеспечивающие экстремум функционала

$$I = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dv}{dz} dz \quad (3.3)$$

при граничных условиях: $v(z_0) = v_0$, $s(z_0) = s_0$, $s(z_1) = s_1$. Определение этих функций сводится к интегрированию уравнений Эйлера для вспомогательного функционала

$$\begin{aligned} &= \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \frac{dv}{dz} + \lambda \left[\frac{1}{2}(1+s)\frac{dv}{dz} + v\frac{ds}{dz} - \sigma'q(1-q) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left[\frac{1}{2}(1+2\alpha s)\frac{dv}{dz} + \alpha v\frac{ds}{dz} - \sigma'(1-q) \right] \right\} dz \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ — неопределенные множители Лагранжа. Система уравнений Эйлера для этого функционала состоит из пяти уравнений, два из которых совпадают с уравнениями (3.2), а остальные имеют вид

$$\begin{aligned} -\lambda\frac{ds}{dz} + (1+s)\frac{d\lambda}{dz} + (1+2\alpha s)\frac{d\mu}{dz} &= -2(1-q)(\lambda q + \mu)\frac{\partial\sigma'}{\partial v} \\ \lambda\frac{dv}{dz} + 2v\frac{d\lambda}{dz} + 2\alpha v\frac{d\mu}{dz} &= -2(1-q)(\lambda q + \mu)\frac{\partial\sigma'}{\partial s} \\ \lambda\sigma'(1-2q) - \mu\sigma' &= -(1-q)(\lambda q + \mu)\frac{\partial\sigma'}{\partial q} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для системы уравнений (3.2) и (3.5), в которую входят четыре дифференциальных уравнения первого порядка, имеем три граничных условия: $v(z_0) = v_0$, $s(z_0) = s_0$ и $s(z_1) = s_1$. Четвертое условие можно произвольно задать для одной из функций $\lambda(z)$ или $\mu(z)$, так как они определены только с точностью до постоянного множителя. Разрешая эти уравнения относительно производных и возвращаясь к независимой переменной y из соотношения (3.1), получаем

$$\frac{dv}{dy} = \frac{2(1-q)(\alpha q - 1)}{\alpha - 1 - \alpha s}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{(1-q)(1-q+s-2\alpha qs)}{v(\alpha - 1 - \alpha s)} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dy} &= \frac{1-q}{v(\alpha - 1 - \alpha s)} \left\{ \lambda + (\lambda q + \mu) \left[(1+2\alpha s)\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial s} - 2\alpha v\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} \right] \right\} \\ \frac{d\mu}{dy} &= -\frac{1-q}{v(\alpha - 1 - \alpha s)} \left\{ \lambda q + (\lambda q + \mu) \left[(1+s)\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial s} - 2v\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial v} \right] \right\} \\ \lambda(1-2q) - \mu + (1-q)(\lambda q + \mu)\frac{\partial \ln \sigma'}{\partial q} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Исключая λ и μ из уравнений (3.7), приходим к уравнению

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{1-q}{v(\alpha - 1 - \alpha s)} \left[\frac{\partial \psi}{\partial q} + 2\alpha v\frac{\partial \psi}{\partial v} - (1+2\alpha s)\frac{\partial \psi}{\partial s} \right] \quad (3.8)$$

$$\left(\psi(v, s, q) = \frac{1}{(1-q)\sigma'(v, s, q)} \right)$$

Для данной зависимости $\sigma' = \sigma'(v, s, q)$ задача свелась к интегрированию системы трех уравнений (3.6) и (3.8).

В качестве примера оптимальных течений рассмотрим решение системы уравнений (3.6), (3.8) в случае постоянной проводимости газа ($\sigma' = 1$). В этом случае решение получается в замкнутом виде. Действительно, $\psi = 1/(1-q)$ при $\sigma' = 1$, и из (3.8) получаем

$$\frac{dq}{dy} = \frac{(1-q)^2}{2v(\alpha-1-\alpha s)} \quad (3.9)$$

Решение системы уравнений (3.6), (3.9) удобно записать в параметрическом виде

$$v = Ae^{4\alpha r} r^{-4(\alpha-1)} \quad (r = 1-q) \quad (3.10)$$

$$s = -2r^{4\alpha-2} e^{-4\alpha r} \int_{-\infty}^r e^{4\alpha r} r^{2-4\alpha} dr + Br^{4\alpha-2} e^{-4\alpha r}$$

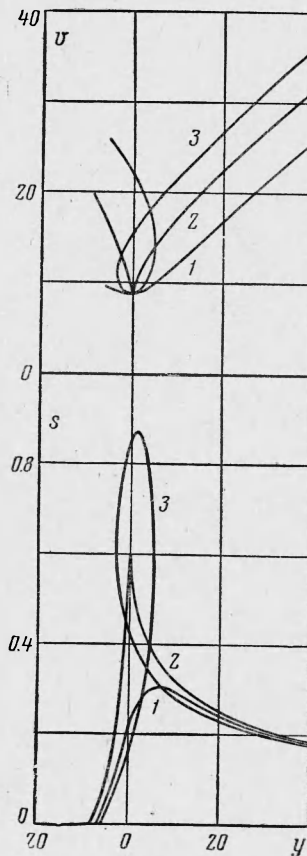
$$y = A \left[e^{4\alpha r} r^{3-4\alpha} - (4\alpha r - 2\alpha + 1) \int_{-\infty}^r e^{4\alpha r} r^{2-4\alpha} dr + 2\alpha Br \right] + C$$

где A, B, C — постоянные интегрирования. Соотношения (3.10) определяют оптимальные течения для случая постоянной проводимости.

Если функции, входящие в эти формулы, затабулированы, то приведенное решение становится достаточно удобным для практических расчетов. Вычисление этих функций особенно упрощается, когда 4α является целым числом, так как при этом входящий в соотношения (3.10) интеграл может быть выражен через интегральную показательную функцию. Такая возможность существует, в частности, для практически важных случаев $\gamma = 5/3, 7/5$ и $4/3$, когда 4α равно соответственно 10, 14 и 16. Кривые 1, 2, 3 фиг. 3 показывают ход зависимостей $v(y)$ и $s(y)$, определяемых уравнениями (3.10), для значений $B = 0, 8.941 \cdot 10^3, 1.5 \cdot 10^4$ соответственно. Кривые рассчитаны для $\gamma = 5/3$. Постоянная $A = 10^{-3}$. Постоянная C выбиралась таким образом, чтобы минимум кривой $v(y)$ находился в точке $y = 0$.

Из графиков видно, что существует критическое значение $B (B_* \approx 8.941 \cdot 10^3)$. При этом, если $B < B_*$, то решение определяет сверхзвуковые течения, ускоряющиеся при $r < 0.6$ и замедляющиеся при $r > 0.6$. При $B = B_*$ кривые $v(y)$ и $s(y)$ имеют точку возврата, в которой при минимальном значении скорости достигается минимальное значение числа Маха, равное единице. Кривые с $B > B_*$ имеют точку самопересечения и охватывают четыре области течения (в порядке возрастания r): сверхзвуковое ускорение, дозвуковое торможение, дозвуковое ускорение, сверхзвуковое торможение. Из фиг. 3 видно также, что в отличие от политропических течений оптимальные не дают непрерывного перехода через скорость звука.

Для сравнения оптимальных течений с политропическими была рассчитана зависимость длины участка ускорения от числа Маха в конце ускорения для тех же условий, что и аналогичная кривая для политропических течений ($M_0 = 1, u_1/u_0 = 10$). Обе кривые приведены на фиг. 2: кривая 1 для политропических течений, кривая 2 — для оптимальных. Видно, что оптимальные течения дают сокращение длины по сравнению с политропическими. Выигрыш в длине от применения оптимальных течений возрастает при увеличении числа Маха на выходе. Так, если число Маха на выходе равно 20, то длина оптимального канала уменьшается по сравнению с политропическим в 2.7 раза и составляет при условиях примера, приведенного в конце § 2, приблизительно 1 м. При дальнейшем увеличении числа Маха на выходе отношение длин политропического и оптимального течений почти не меняется.



Фиг. 3

Поступила 6 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Resler E. L., Sears W. R. Magneto-Gasdynamic Channel Flow. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1958, vol. 9b, p. 509—518. (Русск. пер.: Р е с л е р Э. Л., С и р с У. Р. Магнитогазодинамическое течение в канале. ИЛ, Сб. пер., Механика, 1959, № 6.)
2. Resler E. L., Sears W. R. The Prospects for Magneto-Aerodynamics. Journal of the Aeronautical Sciences, 1958, vol. 25, No. 4.
3. Kerrebrock J. L., Marble F. E. Constant — Temperature Magneto-Gasdynamic Channel Flow. Journal of the Aero/Space Sciences, 1960, vol. 27, No. 1.
4. Баранов В. Б. О разгоне проводящего газа бегущим магнитным полем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 4, стр. 14—18.