воды» применяется в режиме *а* при $r \to \infty$, где $E \to 0$. Таким образом, при $Q_0 < 0$ остается один единственный режим слива *б*. При заданной высоте h слоя жидкости на бесконечности расход жидкости $Q_0 < 0$ через любое сечение $r = r_0$ ограничен $|Q_0| < r_0 h \sqrt{\frac{8}{27} gh} \cdot 2\pi\rho$. При $h \to 0$ максимальный расход через отверстие радиуса r_0 стремится к нулю и станет меньше безнапорного расхода сливного отверстия. В этом случае произойдет прорыв поверхности воды в середине сливного отверстия.

Что касается обычно возникающего при этом закручивания жидкости, то оно объясняется, по нашему мнению, несимметрией реальных условий задачи, а также уменьшением расхода через отверстие при закручивании жидкости. Эта задача изучалась как теоретически, так и экспериментально. В работе [1] построена весьма сложная модель течения, которая тем не менее дает не очень хорошее совпадение с результатами экспериментов [2].

Поступила 28 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Watson E. J.** The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane.— «J. Fluid Mech.», 1964, vol. 20, N 3, p. 481—501.

. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В.** Течение тонких пленок жидкости.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.

УДК 532.529.6

О ДВИЖЕНИИ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев, В. В. Пухначев

(*Красноярск, Новосибирск*)

В работе рассматриваются качественные свойства неустановившегося движения конечного объема жидкости, целиком ограниченного свободной поверхностью. Движение возникает из заданного начального состояния. Внешние массовые силы — известные функции координат и времени. Жидкость может быть вязкой или идеальной, обладающей поверхностным натяжением или лишенной его.

1. **Постановка задачи.** Задача о движении конечной массы жидкости сводится к отысканию области $\Omega_t \subset R^3$ и решения $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$, $p(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений Навье—Стокса

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla v = -\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t),\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

в этой области так, чтобы на границе Γ_t области Ω_t выполнялись краевые условия

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\Gamma_t} = V_n \text{ при } \mathbf{x}\in\Gamma_t; \tag{1.2}$$

$$p\mathbf{n}_{\Gamma_t} - 2\nu D\mathbf{n}_{\Gamma_t} = 2\sigma H\mathbf{n}_{\Gamma_t} \text{ при } \mathbf{x}\in\Gamma_t, \tag{1.3}$$

а в момент $t = 0$ — начальное условие

(1.4) $$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega_0 = \Omega.$$

Область Ω считается заданной и ограниченной.

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости; p — давление жидкости; $\mathbf{g}$ — ускорение внешних массовых сил; $\nu \geqslant 0$ — вязкость жидкости; $\sigma \geqslant 0$ — коэффициент поверхностного натяжения. Величины ν и σ предполагаются постоянными, а вектор $\mathbf{g}$ — известной функцией $\mathbf{x}$ и t. Плотность жидкости считается равной единице. Через V_n в (1.2) обозначена скорость перемещения поверхности Γ_t в направлении внешней нормали, а через $\mathbf{n}_{\Gamma_t}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_t. Если поверхность Γ_t задана уравнением $F(\mathbf{x}, t) = 0$, то $V_n = -F_t/|\nabla F|$. В условии (1.3) D — тензор скоростей деформаций с элементами $D_{ik} = (\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)/2$ $(i, k = 1, 2, 3)$, а H — удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t. Считается, что $H > 0$, если Γ_t выпукла наружу жидкости.

Равенство (1.2) означает, что поверхность Γ_t ограничивает жидкий объем Ω_t. Согласно (1.3), внешние поверхностные силы на границе области Ω_t отсутствуют, т. е. граница Γ_t является свободной поверхностью.

Векторное поле $\mathbf{v}_0$ в (1.4) предполагается заданным и соленоидальным:

(1.5) $$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega.$$

Если $\nu > 0$, то $\mathbf{v}_0$ еще удовлетворяет условию согласования с (1.3)

(1.6) $$D\mathbf{n}_{\Gamma_t} - (\mathbf{n}_{\Gamma_t} \cdot D\mathbf{n}_{\Gamma_t})\, \mathbf{n}_{\Gamma_t} = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma_0,\ t = 0.$$

Основная трудность исследования задачи (1.1) — (1.4) заключается в необходимости искать область Ω_t. Однако специфика условия (1.2) позволяет преобразовать эту задачу к другой, в которой область определения решения фиксирована заранее. Это достигается переходом к лагранжевым координатам.

Траектория частицы, находящейся в момент $t = 0$ в точке ξ, задается формулой

(1.7) $$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t),$$

в которой функции $x_i(\xi, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ определяются из задачи Коши

(1.8) $$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{x} = \xi \text{ при } t = 0.$$

Переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ называются лагранжевыми. Если соотношение $F(\mathbf{x}(\xi, t), t) \equiv f(\xi, t) = 0$ определяет свободную границу, то из (1.2), (1.8) следует, что $f_t = 0$ и уравнение свободной границы в лагранжевых координатах есть просто $f(\xi) = 0$. Поэтому если построить Γ_t как образ $\Gamma_0 \equiv \Gamma$ при отображении (1.7), то условие (1.2) будет выполнено автоматически.

Сформулируем в лагранжевых координатах задачу (1.1) — (1.4) в случае $\nu = 0$, $\sigma = 0$ (идеальная жидкость с нулевым поверхностным натяжением). Требуется найти вектор $\mathbf{x}(\xi, t)$ и функцию $p(\xi, t)$ в области $\Omega \times [0, T]$ так, чтобы удовлетворялись следующие уравнения, начальные и краевые условия:

(1.9) $$M^*\mathbf{x}_{tt} + \nabla_\xi p = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t),\ \det M = 1;$$

(1.10) $$p = 0 \text{ при } \xi \in \Gamma;$$

(1.11) $$\mathbf{x} = \xi,\ \mathbf{x}_t = \mathbf{v}_0(\xi) \text{ при } t = 0,$$

причем $\operatorname{div}_\xi \mathbf{v}_0 = 0$. Здесь ∇_ξ, div_ξ — градиент и дивергенция по переменным (ξ_1, ξ_2, ξ_3), M — матрица Якоби отображения (1.7) при фиксированном t, $M_{ik} = \partial x_i/\partial \xi_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

Данная статья представляет обзор работ, посвященных изучению задачи (1.1) — (1.4) в точной постановке, а также некоторых ее моделей. Основу статьи составляют результаты исследований, выполненных за последние 15 лет по инициативе и под руководством Л. В. Овсянникова.

2. Теоремы существования. Первый (и пока единственный) результат о разрешимости задачи (1.9) — (1.11) принадлежит Л. В. Овсянникову [1] и опирается на разработанную им теорию нелинейной задачи Коши в шкале банаховых пространств [2].

Пусть Ω — односвязная плоская область, $\mathbf{v}_0$ — потенциальное в Ω плоское векторное поле и $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = 0$. В этом случае задача (1.9) — (1.11) эквивалентна следующей:

$$\text{(2.1)} \qquad \text{при } |\zeta| = 1,\ t > 0 \quad h_t = \zeta h_\zeta \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\tau+\zeta}{\tau-\zeta}\left(\operatorname{Re}\frac{\tau w_\tau}{|h_\tau|^2}\right)\frac{d\tau}{\tau},$$

$$w_t = \zeta w_\zeta \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\tau+\zeta}{\tau-\zeta}\left(\operatorname{Re}\frac{\tau w_\tau}{|h_\tau|^2}\right)\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{\tau+\zeta}{\tau-\zeta}\left|\frac{w_\tau}{h_\tau}\right|^2 \frac{d\tau}{\tau};$$

$$\text{(2.2)} \qquad \text{при } |\zeta| \leqslant 1,\ t = 0 \quad w = w_0(\zeta),\ h = h_0(\zeta),$$

где $h(\zeta, t)$ — конформное отображение единичного круга комплексной плоскости ζ на область Ω_t плоскости $z = x_1 + ix_2$; $w(\zeta, t) \equiv w^*(z, t)$ — комплексный потенциал движения.

Определим банахово пространство $B_\rho(\rho > 0)$ как множество следов на окружности $|\zeta| = 1$ аналитических функций $u(\zeta)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_\rho = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n| e^{|n|\rho},$$

где u_n — коэффициенты ряда Лорана функции $u(\zeta)$, аналитической в кольце $e^{-\rho} < |\zeta| < e^\rho$. Множество $S = \bigcup\limits_{0<\rho} B_\rho$ есть шкала банаховых пространств. Справедлива следующая теорема [1]:

если начальные данные (2.2) таковы, что

$$w_0(\zeta),\ h_0(\zeta),\ 1/h_0'(\zeta) \in B_{\rho_0},$$

то найдется постоянная $K > 0$ такая, что решение задачи (2.1), (2.2) существует и принадлежит пространству B_ρ при любом $\rho < \rho_0$ для значений t, удовлетворяющих неравенству

$$\text{(2.3)} \qquad \rho + K|t| < \rho_0.$$

В шкале S это решение единственно и в области (2.3) является голоморфным по t в точке $t = 0$.

Каких-либо результатов о разрешимости общей задачи (1.9) — (1.11) пока не имеется. В связи с этим отметим, что в работе [3] доказана теорема существования и единственности решения близкой к (1.9) — (1.11) трехмерной задачи Коши—Пуассона о волнах на воде в классах аналитических функций. Доказательство разрешимости задачи (1.9) — (1.11) в классе функций конечной гладкости наталкивается на значительные трудности, природа которых разъясняется ниже (см. также [4]).

Задача (1.1) — (1.4) с $\nu > 0$ и $\sigma = 0$ изучалась в работах [5, 6], где условие (1.3) с $\sigma = 0$ заменяется более общим, $p\mathbf{n} - 2\nu D\mathbf{n} = p_0(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$ ($p_0(\mathbf{x}, t)$ — заданное распределение внешнего давления на поверхности жидкости). Не имея возможности дать здесь полное представление о результатах работ [5, 6], ограничимся ослабленной формулировкой одного из них.

Пусть $\Gamma \in C^{2+\alpha}$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega)$ с некоторым $\alpha \in (0, 1)$, $\mathbf{g} = 0$, $p_0 = 0$ и выполнены условия согласования (1.5), (1.6). Обозначим гельдеровскую норму $|\mathbf{v}_0|_\Omega^{(2+\alpha)} = R$. Для любого $R > 0$ найдется такое $T > 0$, что задача (1.1) — (1.4) с $\nu > 0$ и $\sigma = 0$ имеет единственное решение при $t \in [0, T]$, причем $\mathbf{v}$ и p принадлежат некоторым классам Гельдера. Кроме того, по любому $T > 0$ можно найти такое $R > 0$, что задача (1.1) — (1.4) будет однозначно разрешима на интервале $[0, T]$.

Отметим, что все упомянутые выше теоремы о разрешимости задач неустановившегося движения жидкости со свободной границей в точной постановке имеют локальный характер. Это ограничение связано с существом дела. Можно представить ситуацию, когда в процессе движения две точки свободной поверхности, находившиеся в начальный момент на конечном расстоянии, сближаются с последующим ударом одной части жидкости о другую. Математическая природа возникающих при этом особенностей сложна и до сих пор не исследована. Не изучен также вопрос о возможной потере гладкости свободной поверхности с течением времени. Наконец, не имеется ни одного точного результата общего характера о разрешимости задачи (1.1) — (1.4) в случае $\sigma \neq 0$.

3. Конечномерные модели. Ниже перечислены примеры решений задачи (1.1) — (1.4), отыскание которых сводится к интегрированию системы обыкновенных уравнений. Наиболее богатый класс таких решений допускается в случае $\nu = 0$, $\sigma = 0$. Сюда входят движения с линейным полем скоростей, обнаруженные Дирихле (см. [7]) и подробно исследованные в работе [8] (см. также [9, 10]). Отображение (1.7) здесь дается формулой

$$\mathbf{x} = A(t)\boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_0(t), \tag{3.1}$$

так что $M = A$. Для существования таких решений необходимо, чтобы вектор внешних сил был линейной функцией $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{g} = G(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}_0(t). \tag{3.2}$$

Вследствие (1.9) — (1.11) матрица A и вектор $\mathbf{x}_0$ удовлетворяют уравнениям

$$A'' - GA = qA^{*-1}N; \tag{3.3}$$

$$\mathbf{x}_0'' - G\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}_0 + qA^{*-1}\mathbf{b} \tag{3.4}$$

и начальным условиям

$$A(0) = E, \quad A'(0) = A_0'; \tag{3.5}$$

$$\mathbf{x}_0(0) = 0, \quad \mathbf{x}_0'(0) = \mathbf{x}_{00}'. \tag{3.6}$$

Здесь A_0' — произвольная постоянная матрица с $\mathrm{Sp}A_0' = 0$, $N = \mathrm{diag}\{n_1, n_2, n_3\}$, где n_1, n_2, n_3 — произвольные положительные числа; $\mathbf{b}$ и $\mathbf{x}_{00}'$ — произвольные постоянные векторы и введено обозначение

$$q = \frac{\mathrm{Sp}(A^{-1}A')^2 - \mathrm{Sp}(A^{-1}GA)}{\mathrm{Sp}(A^{-1}A^{*-1}N)}.$$

Формула для давления имеет вид

$$p = q(l + 2\mathbf{b}\cdot\xi - \xi\cdot N\xi)/2,$$

где l — постоянная. Свободная поверхность Г есть эллипсоид с уравнением

$$l + 2\mathbf{b}\cdot\xi - \xi\cdot N\xi = 0.$$

В дальнейшем ограничимся движениями, в которых $\mathbf{g} = 0$, $\mathbf{b} = 0$ и $\mathbf{x}'_{00} = 0$. Вследствие (3.2), (3.4) и (3.6) $\mathbf{x}_0(t) = 0$.

Задача Коши (3.3), (3.5) однозначно разрешима при всех t [9]. Система (3.3) при $G = 0$ имеет восемь интегралов, выражающих сохранение массы ($\det A = 1$), энергии, циркуляции и момента количества движения деформирующегося жидкого эллипсоида [7]. Имеется ряд точных решений задачи (3.1). Рассмотрим одно из них, найденное в [8].

Пусть $N = E$, а матрица A'_0 имеет ненулевые элементы $2(a'_0)_{22} = 2(a'_0)_{33} = -(a'_0)_{11} = -2b$, $(a'_0)_{32} = -(a'_0)_{23} = \omega$. Тогда матрица A имеет ненулевые элементы $a_{11} = m$, $a_{22} = a_{33} = k$, $a_{32} = -a_{23} = n$, причем

$$k = \frac{1}{\sqrt{m}}\cos\left(\omega\int_0^t m(\tau)\,d\tau\right), \quad n = \frac{1}{\sqrt{m}}\sin\left(\omega\int_0^t m(\tau)\,d\tau\right),$$

а функция $m(t)$ находится квадратурой из уравнения

$$m'^{2} = 4m^3\,\frac{3b^2 + \omega^2(1-m)}{1+2m^3} \qquad (3.7)$$

с условием $m(0) = 1$. Уравнение свободной границы Γ_t в эйлеровых координатах есть

$$\frac{x_1^2}{m^2} + m\left(x_2^2 + x_3^2\right) = c^2 = l.$$

Интерпретация решения такова. В начальный момент жидкость заполняла сферу Г и находилась в состоянии равномерного вращения, на которое накладывалось потенциальное линейное поле скоростей. Предположим для определенности, что $\omega \neq 0$, $b > 0$. Тогда при $0 < t < t_*$ сфера Г вытягивается в эллипсоид вращения Γ_t с осью x_1 до тех пор, пока в момент $t = t_*$ его большая полуось не примет наибольшего значения $cm_* = c[3(b/\omega)^2 + 1]^{1/2}$. После этого эллипсоид начинает сокращаться, в момент $t = 2t_*$ проходит форму сферы Г и затем сжимается к плоскости $x_1 = 0$, сливаясь с ней при $t \to \infty$.

Рассмотрим теперь случай $\omega = 0$. При этом матрица A диагональная и движение потенциальное. Если $b > 0$, то $m > 1$ для $t > 0$ и $m \to \infty$ при $t \to \infty$. Таким образом, при $b > 0$ и $\omega = 0$ эллипсоид Γ_t с ростом t растягивается в направлении оси x_1, сжимаясь к этой оси, когда $t \to \infty$. С точки зрения устойчивости движения этот результат означает, что потенциальное движение, задаваемое матрицей A при $\omega = 0$, неустойчиво по отношению к сколь угодно малым вихревым возмущениям.

Вопрос о поведении решений задачи Коши (3.3), (3.5) при $t \to \infty$ пока не решен. Кажется правдоподобной гипотеза о том, что при $A'_0 \neq 0$ эта задача не имеет ограниченных решений.

Рассмотрим теперь плоские движения с линейным полем скоростей. В этом случае ξ и $\mathbf{x}$ обозначают двумерные векторы, а A, A'_0 и N — матрицы второго порядка. Решение задачи (3.3), (3.5) здесь описывает движение вращающегося деформирующегося эллипса. Используя интегралы движения, эту задачу удается проинтегрировать в квадратурах [11]. Оказывается, что если начальное состояние не есть покой, то имеется следующая альтернатива. Либо одна из полуосей эллипса неограниченно возрастает при $t \to \infty$, либо движение есть равномерное вращение жидкого круга вокруг его центра.

Рассмотрим плоскую задачу (3.3), (3.5) при

$$A_0' = \begin{pmatrix} b & \omega \\ -\omega & -b \end{pmatrix}$$

и $N = E$ (Γ — окружность радиуса c). В этом случае полуоси эллипса $a_1(t)$, $a_2(t)$ связаны соотношениями

$$\frac{1}{2}\left(a_1'^2 + a_2'^2\right) + \frac{4c^4\omega^2}{(a_1 + a_2)^2} = (b^2 + \omega^2)\, c^2, \tag{3.8}$$

$$a_1 a_2 = c^2,\ a_1(0) = a_2(0) = c,$$

а угловая скорость вращения эллипса равна $4c^2\omega(a_1 + a_2)^{-2}$. Случай $b = 0$ соответствует вращению круга как твердого тела. Из (3.8) видно, что сколь угодно малая начальная деформация поля скоростей ($b \neq 0$) разрушает указанное стационарное движение.

Запас точных решений задачи (1.1) — (1.4) в случае $\nu \neq 0$, $\sigma \neq 0$ крайне беден. Единственным нетривиальным примером является решение, описывающее радиальное движение по инерции сферического слоя [12—15]. Плоский аналог этого решения описывает радиальное движение кругового кольца [13, 16]. Более общей является плоская задача о вращательно-симметричном движении вращающегося кольца.

4. Вращающееся кольцо. Рассмотрим плоскую задачу (1.1) — (1.4) со специальными начальными данными: Ω — круг $r_{10} < r = |\mathbf{x}| < r_{20}$,

$$v_r = \chi_0 r^{-1},\ v_\theta = v_0(r) \text{ при } t = 0,\ r_{10} < r < r_{20}, \tag{4.1}$$

где v_r — радиальная, v_θ — окружная компоненты скорости в полярной системе координат (r, θ); χ_0 — заданная постоянная; v_0 — заданная функция. Решение этой задачи имеет вид

$$v_r = \chi(t) r^{-1},\ v_\theta = v_\theta\,(r, t),\ p = p(r, t),$$

уравнения свободных границ: $r = r_i(t)$, $i = 1, 2$. Это решение интерпретируется как движение жидкого вращающегося кольца под действием сил инерции, вязкости и поверхностного натяжения.

Задача (1.1) — (1.3), (4.1) при $\nu > 0$ сводится к решению связанной системы одного параболического и трех обыкновенных уравнений для функций v_θ, χ, r_i и квадратуре для нахождения p. Эта задача изучалась в работе [17], где рассмотрен случай $\sigma = 0$, и в [18]. Ниже излагаются результаты этих работ.

Обозначим через L момент количества движения кольца, а через Σ — его площадь. Величины Σ и L являются интегралами движения. Введем безразмерный параметр

$$\beta = L^2/\rho\sigma\Sigma^{5/2}$$

(ρ — плотность жидкости). Предположим сначала, что $\sigma > 0$. Тогда при выполнении неравенства $\beta > \beta_* \approx 5{,}17$ задача имеет два стационарных решения, описывающих вращение кольца как твердого тела. Если $\beta < \beta_*$, то стационарных решений не существует.

Предположим, что $v_0 \in C^{2+\alpha}[r_{10}, r_{20}]$ и выполнены условия согласования $v_0'(r_{10}) = v_0'(r_{20}) = 0$. Если $\beta < \beta_*$, то найдется такое t_0 (конечное или бесконечное), что $r_1(t) \to 0$ при $t \to t_0$.

Если же $\beta \geqslant \beta_*$, то возможны два режима движения: обращение внутреннего радиуса в нуль и стабилизация движения к вращению кольца как твердого тела. В работе [18] даны достаточные условия реализации каждого из этих режимов. Например, при условии

$$8r_{20}^2 \sum \rho E_0 < L^2,$$

где E_0 — полная энергия жидкости в момент $t = 0$, внутренний радиус кольца не может обратиться в нуль.

В случае $\sigma = 0$ качественная картина движения существенно меняется. Если $L \neq 0$ и в условии (4.1) $\chi_0 < 0$, то вращающееся кольцо сначала сходится к центру, пока внутренний радиус не достигнет положительного минимума. Затем начинается расхождение кольца, причем $r_1 \to \infty$ при $t \to \infty$. При $\chi_0 \geqslant 0$ расхождение начинается сразу. Имеется два различных режима расхождения. Если выполнены оба неравенства

$$\frac{\chi_0}{\nu} < 4, \quad \frac{r_{10}^2}{\sum \nu^2} \int\limits_{r_{10}}^{r_{20}} r v_0^2(r)\, dr < 2, \tag{4.2}$$

то $r_1 = O(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$. Если хотя бы одно из этих неравенств заменить противоположным, то $r_1(t) = O(t)$ при $t \to \infty$ [17].

Случай $v_0 = 0$ в условии (4.1) соответствует чисто радиальному движению кольца. Если при этом $\sigma \neq 0$, кольцо либо расходится до бесконечности, либо его внутренний радиус в некоторый момент обращается в нуль. Если же $\sigma = 0$ и выполнено первое из неравенств (4.2), то существует $\lim r_1(t) = r_{1\infty} > 0$ при $t \to \infty$. В противном случае $r_1 \to \infty$ при $t \to \infty$.

До сих пор речь шла о движении вязкого кольца. В случае $\nu = 0$ задача упрощается и допускает интегрирование в квадратурах [9]. Здесь в зависимости от исходных данных осуществляется пять качественно различных режимов движения. В частности, при $\sigma \neq 0$ и $L \neq 0$ возможны радиальные автоколебания вращающегося кольца идеальной жидкости.

5. Стационарные движения. Стационарные движения изолированного объема вязкой капиллярной жидкости допускают простое описание: жидкость вращается как твердое тело вокруг оси, параллельной заданному вектору кинетического момента, а свободная поверхность неподвижна во вращающейся системе координат. Она определяется как замкнутая минимальная поверхность в поле центробежных сил, ограничивающая заданный объем.

Вопросы существования, устойчивости и ветвления равновесных форм вращающейся жидкости с большой полнотой изложены в работе [19] и в данной статье обсуждаться не будут. Если жидкость лишена поверхностного натяжения, то при $\nu \neq 0$ стационарное движение изолированного объема может быть лишь поступательным. В плоском случае допускается также вращение круга и кольца как твердого тела. Если же одновременно $\sigma = 0$ и $\nu = 0$, то возможны нетривиальные стационарные движения изолированного жидкого объема. Ниже строится пример такого движения [20]. В этом примере течение идеальной жидкости является вращательно-симметричным с осью z, а его завихренность пропорциональна расстоянию r до этой оси.

Если обозначить через ψ функцию тока, через v_r и v_z — радиальную и осевую скорости, то $v_r = -r^{-1}\partial\psi/\partial z$, $v_z = r^{-1}\partial\psi/\partial r$, а ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = kr, \tag{5.1}$$

где k — постоянная. Окружная скорость v_θ равна cq/r, где cq — постоянная. Для течений указанного вида уравнения Эйлера допускают интеграл

$$p + \frac{1}{2}\left(v_r^2 + v_z^2 + c^2q^2/r^2\right) + k\psi = \frac{1}{2}c^2 \equiv \mathrm{const}. \tag{5.2}$$

Будем разыскивать свободные поверхности Г, близкие к тору. Обозначим меридиональное сечение Г через γ, а плоскую область, ограниченную кривой γ,— через ω. Условия на свободной границе $p = 0$, $\psi = 0$ и равенство (5.2) ведут к соотношениям

$$\psi|_\gamma = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_\gamma = c\sqrt{1 - q^2/r^2}, \tag{5.3}$$

где $\partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали к γ. Вследствие (5.1), (5.3) постоянные k и c связаны равенством

$$k = c\int\limits_\gamma (1 - q^2/r^2)^{1/2} d\gamma \Big/ \int\limits_\omega r d\omega.$$

Перейдем в (5.1), (5.3) к новым переменным

$$r = a + bx, \ z = by, \ \psi(r, z) = abc(1 - \mu^2)^{1/2}w(x, y)$$

(a и b — некоторые постоянные размерности длины; $\mu = q/a$) и положим $\varepsilon = b/a$. Образы кривой γ и области ω на плоскости x, y обозначим через γ_0 и ω_0 соответственно. В новых переменных задача (5.1), (5.3) принимает вид

$$\Delta w - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(1+\varepsilon x)^2}{(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\int\limits_{\gamma_0} [1 - \mu^2(1+\varepsilon x)^{-2}]^{1/2} d\gamma_0}{\int\limits_{\omega_0} (1+\varepsilon x)\, d\omega_0}, \tag{5.4}$$

$$w|_{\gamma_0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n_0}\bigg|_{\gamma_0} = \frac{(1+\varepsilon x)}{(1-\mu^2)^{1/2}}\left[1 - \mu^2(1+\varepsilon x)^{-2}\right]^{1/2}$$

(Δ — лапласиан по переменным x, y).

Если $\varepsilon = 0$, задача (5.4) имеет однопараметрическое семейство решений, в котором γ_0 есть окружность $x^2 + y^2 = c^2$ и $w = (x^2 + y^2 - c^2)/2c$. Доказывается, что для достаточно малых ε при некоторой зависимости $\mu = \mu(\varepsilon)$ эта задача имеет трехпараметрическое семейство решений Ему соответствует четырехпараметрическое семейство решений задачи (5.1), (5.3). В качестве определяющих физических параметров этого семейства могут быть выбраны кинетическая энергия жидкости, момент инерции меридионального сечения свободной поверхности относительно прямой $r = \mathrm{const}$, проходящей через центр тяжести сечения, длина меридионального сечения свободной поверхности и расстояние от центра тяжести сечения до оси симметрии (отношение двух последних чисел должно быть достаточно малым).

6. Малые возмущения. Рассмотрим сначала движение идеальной жидкости с нулевым поверхностным натяжением. Такое движение определяется решением $\mathbf{x}(\xi, t)$, $p(\xi, t)$ задачи (1.9)—(1.11) в некотором цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{\Omega}\times[0, T]$. Решение $\mathbf{x}$, p, соответствующее начальному полю скоростей $\mathbf{x}_t(\xi, 0) = \mathbf{v}_0(\xi)$, $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$, будем называть основным.

Рассмотрим в том же цилиндре Q_T другое решение $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{p}$ задачи (1.9)—(1.11) с начальным полем скоростей

$$\tilde{\mathbf{v}}_0(\xi) = \mathbf{v}_0(\xi) + \mathbf{V}_0(\xi), \operatorname{div} \mathbf{V}_0(\xi) = 0.$$

Решение $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{p}$ называется возмущенным решением, а функция $\mathbf{V}_0$ — начальным возмущением. Положим $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X}$, $\tilde{p} = p + \nabla_\xi p\cdot M^{-1}\mathbf{X} + P$ и назовем функции $\mathbf{X}$, P возмущениями основного решения. Предполагая малость начального возмущения, можно надеяться на то, что функции $\mathbf{X}$, P будут малыми на некотором интервале времени. Подставляя выражения $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{p}$ в соотношения (1.9)—(1.11) и отбрасывая члены, нелинейные относительно возмущений, придем к линейной задаче для функций $\mathbf{X}$, P.

Линейная модель в теории неустановившихся движений жидкости со свободной границей представляет интерес по двум причинам. Во-первых, линеаризация на решении задачи со свободной границей дает возможность понять математическую природу этой задачи. Во-вторых, если имеется некоторое решение, определенное при всех $t > 0$, то анализ поведения малых возмущений при $t\to\infty$ позволяет судить об устойчивости данного решения.

Изучению малых возмущений покоя или равномерного вращения жидкости посвящено огромное число работ. Сюда, в частности, относятся работы по линейной теории волн, а также классические работы об определении фигуры Земли, восходящие еще к Ньютону. Однако до последнего времени отсутствовали работы, в которых бы изучалась задача о малых возмущениях произвольного решения уравнений Эйлера в области с частично или полностью свободной границей. Постановка этой задачи и первые результаты ее исследования даны в работе [13], где рассмотрен случай потенциального движения жидкости. Общая задача о малых возмущениях движения идеальной жидкости со свободной границей в потенциальном поле массовых сил изучалась в работе [21]. В случае, когда вся граница является свободной, эта задача сводится к отысканию одной функции $\Phi(\xi, t)$, подчиняющейся следующим соотношениям:

$$\operatorname{div}[M^{-1}M^{*-1}(\nabla\Phi + \mathbf{V}_0)] = -\operatorname{div}\left[(M^{-1}W)_t\int_0^t W^{-1}M^{*-1}\times (\nabla\Phi + \mathbf{V}_0)\,dt\right] \quad (\xi\in\Omega,\ 0\leqslant t\leqslant T); \tag{6.1}$$

$$(a\Phi_t)_t + \mathbf{n}\cdot M^{-1}M^{*-1}(\nabla\Phi + \mathbf{V}_0) = -\mathbf{n}\cdot(M^{-1}W)_t\int_0^t W^{-1}M^{*-1}\times (\nabla\Phi + \mathbf{V}_0)\,dt \quad (\xi\in\Gamma,\ 0 < t < T); \tag{6.2}$$

$$\Phi = 0,\ \Phi_t|_{t=0} = 0 \quad (\xi\in\Omega,\ t = 0), \tag{6.3}$$

где $a = -(\partial p/\partial n)^{-1}$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω; $\partial p/\partial n$ — производная от давления p по нормали $\mathbf{n}$ к Γ. Матрица $W(\xi, t)$ является решением задачи

$$W_t = \left(\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^* W,\ W|_{t=0} = E, \tag{6.4}$$

$\mathbf{v} = \mathrm{x}_t$, а M — матрица Якоби отображения (1.7). Оператор ∇ в этом пункте обозначает градиент по переменным Лагранжа ξ_1, ξ_2, ξ_3. Если функция $\Phi(\xi, t)$ известна, то возмущение давления P определяется как $P = -\Phi_t$, а вектор $\mathbf{X}$ дается интегралом

$$\mathbf{X} = W \int_0^t W^{-1} M^{*-1} (\nabla\Phi + \mathbf{V}_0)\, dt.$$

Отметим, что функция $\Phi(\xi, t)$ должна удовлетворять условию

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1} \Phi_t d\Gamma = 0,$$

которое следует из (6.1), (6.2) при $\partial p/\partial n \neq 0$.

Для задачи (6.1)—(6.3) справедлива теорема существования и единственности обобщенного решения. Здесь ограничимся случаем, когда основное и возмущенное движение потенциальны. При этом $\mathbf{V}_0 = \nabla\Phi_0$, где $\Delta\Phi_0 = 0$, матрицы M и W совпадают, и для функции $\Psi = \Phi + \Phi_0$ получается следующая задача:

(6.5) $$\mathrm{div}(M^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi) = 0 \text{ при } \xi \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T;$$

(6.6) $$(a\Psi_t)_t + \mathbf{n}\cdot M^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi = 0 \text{ при } \xi \in \Gamma,\ 0 < t < T;$$

(6.7) $$\Psi = \Phi_0(\xi),\ \Psi_t = 0 \text{ при } t = 0,\ \xi \in \overline{\Omega}.$$

Эта задача, в свою очередь, может быть сведена к задаче Коши для дифференциального уравнения с неограниченным нелокальным оператором в пространстве Соболева $W_2^{1/2}(\Gamma)$

(6.8) $$(a\psi_t)_t + K(t)\psi = 0;$$

(6.9) $$\psi = \psi_0,\ \psi_t = 0 \text{ при } t = 0$$

с искомой функцией $\psi = \Psi|_\Gamma$. Оператор K сопоставляет функции $\psi \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ и элемент $K\psi \in W_2^{-1/2}(\Gamma)$ по правилу: по функции ψ ищется решение уравнения (6.5) с условием $\Psi|_\Gamma = \psi$, а затем вычисляется $K\psi = \mathbf{n}\cdot M^{-1}M^{*-1}\nabla\Psi|_\Gamma$. Запись $K(t)$ подчеркивает зависимость оператора K от t (это связано с тем, что M зависит от t). В начальном условии (6.9) ψ_0 есть след функции $\Phi_0(\xi) \in W_2^1(\Omega)$ по поверхности Γ.

Можно показать, что оператор K симметричен и положительно определен на подпространстве гильбертова пространства $W_2^{1/2}(\Gamma)$, образованном функциями ψ с нулевым средним значением на Γ. Предположим, что для всех $\xi \in \Gamma$, $t \in [0, T]$ выполнено условие

(6.10) $$\left(-\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{-1} \equiv a(\xi, t) \geqslant a_0 > 0.$$

В этом случае уравнение (6.8) можно рассматривать как гиперболическое псевдодифференциальное уравнение на свободной границе Γ.

Если основное решение таково, что $\Gamma \in C^2$, $\mathbf{x}$, $p \in C^3(\overline{Q_T})$ и выполнено (6.10), то решение задачи (6.5)—(6.7) допускает априорную оценку [13, 22]

(6.11) $$\int_\Gamma \Psi_t^2 d\Gamma + \int_\Omega |\nabla\Psi|^2 d\Omega \leqslant C(T) \int_\Omega |\nabla\Phi_0|^2 d\Omega.$$

С использованием этой оценки в работе [22] доказана разрешимость задачи (6.5)—(6.7) при условии (6.10). В этих же условиях установлена теорема существования и единственности решения более общей задачи (6.1)—(6.3) [22]. Отметим, что задача (6.1)—(6.3) также может быть сведена к операторному уравнению типа (6.8). Это уравнение будет уже неоднородным, а оператор $K(t)$ нелокальным по t и несимметричным. Однако главная его часть является симметричным и положительно определенным оператором, так что упомянутое уравнение сохраняет свойства гиперболического при условии (6.10).

Подчеркнем, что именно условие $\partial p/\partial n < 0$ при $\sigma = 0$ обеспечивает корректность задачи о малых возмущениях. Важность этого условия отмечалась в работах [23, 13, 24]; в [24] доказана разрешимость плоской задачи Коши—Пуассона в точной постановке в классе функций с конечной гладкостью, установлена замечательная особенность этой задачи. Оказывается, что задача Коши для линеаризованных уравнений корректно поставлена только тогда, когда линеаризация проводится на точном решении нелинейных уравнений. По-видимому, такая же особенность присуща и задаче о движении изолированного объема идеальной жидкости, лишенной поверхностного натяжения.

Вернемся к задаче о малых возмущениях (6.1)—(6.3). Довольно трудно охарактеризовать класс основных движений, в которых выполняется неравенство (6.10), обеспечивающее корректность задачи (6.1)—(6.3). Отметим, однако, что для потенциальных движений, отличных от постоянного течения, в соленоидальном поле массовых сил это неравенство заведомо выполнено [13, 9]. Физически условие (6.10) означает, что ускорение частиц на свободной границе направлено внутрь жидкости.

Для основных движений, в которых имеет место неравенство

$$\partial p/\partial n > 0 \tag{6.12}$$

для всех $\xi \in \Gamma$, $t \in [0, T]$, уравнение (6.8) является «эллиптическим», и задача Коши для него поставлена некорректно в смысле Адамара. Условие (6.12) может выполняться даже для потенциальных движений, если не вся граница области является свободной или если на жидкость действуют внешние силы. Примеры некорректности задачи о малых возмущениях с плоской свободной границей построены в работе [23]; впервые этот факт был отмечен еще Рэлеем (см., например, [25]). Что касается движения жидкого объема по инерции, то здесь причиной некорректности задачи о малых возмущениях может быть сильная завихренность движения. Так, если в качестве основного взять решение из п. 3, описывающее движение вращающегося эллипсоида, то неравенство $\partial p/\partial n > 0$ наверняка выполняется при t, близких к t_*.

При $\partial p/\partial n > 0$ на разрешимость линеаризованной задачи (6.8) или более общей задачи можно надеяться лишь в классе аналитических функций, поэтому не следует ожидать разрешимости исходной нелинейной задачи (1.9)—(1.11) при произвольных начальных данных в классах функций конечной гладкости.

Интересно отметить, что в случае, когда основное движение есть равномерное вращение жидкости как твердого тела, задача о его малых возмущениях поставлена корректно [26], хотя выполнено неравенство $\partial p/\partial n > 0$. Этот случай является исключительным, так как во вращающейся системе координат основное движение есть покой.

В предыдущих рассуждениях этого пункта не учитывалось поверхностное натяжение. Как отмечено [23], поверхностное натяжение оказывается тем фактором, который стабилизирует коротковолновые возмущения и делает математическую задачу о малых возмущениях корректно поставленной.

Задача о малых возмущениях произвольного движения идеальной жидкости, обладающей поверхностным натяжением, рассматривалась в работе [27]. Уравнения малых возмущений в лагранжевых координатах имеют вид

$$(6.13)\qquad \operatorname{div} M^{-1}\mathbf{V} = 0;$$

$$(6.14)\qquad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})}\mathbf{V} + \left\{\left[\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})} - \left(\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^*\right]_t + \left(\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^2 - \left(\frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^{*2} + \right.$$

$$\left. + M^{*-1}\left(\frac{\partial(\mathbf{g})}{\partial(\mathbf{x})}\right)^* - \frac{\partial(\mathbf{g})}{\partial(\mathbf{x})}\right\} M\int_0^t M^{-1}\mathbf{V}\,dt + M^{*-1}\nabla P = 0,\ \ \xi \in \Omega,\ \ t \geqslant 0;$$

$$(6.15)\qquad P + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\Gamma_t} + \sigma q^2\right) R + \sigma\overline{\Delta}_\Gamma R = 0;$$

$$(6.16)\qquad R = \rho\int_0^t \mathbf{n}\cdot M^{-1}\mathbf{V}\,dt,\ \ \xi \in \Gamma,\ \ t > 0;$$

$$(6.17)\qquad \mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0(\xi),\ \operatorname{div}\mathbf{V}_0 = 0,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{x}_t$ — вектор скорости основного течения; $\mathbf{V}$ — вектор возмущения скорости; P — возмущение давления; $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; $q^2 = R_1^{-2} + R_2^{-2}$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны нормальных сечений поверхности Γ_t; $\partial p/\partial n|_{\Gamma_t}$ — производная p по внешней нормали к Γ_t; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\xi)$ — внешняя нормаль к Γ. Функция $\rho(\xi, t)$ дается равенством $\rho = |\nabla f|(|M^{*-1}\nabla f|)^{-1}$, где $f(\xi) = 0$ — уравнение Γ. Предполагается, что поверхность Γ принадлежит классу C^3 и имеет локальную параметризацию вида $\xi_i = \xi_i(\alpha, \beta)$ $(i = 1, 2, 3)$. В граничном условии (6.15) $\overline{\Delta}_\Gamma$ — результат преобразования к лагранжевым координатам оператора Лапласа—Бельтрами Δ_{Γ_t} [19]:

$$\overline{\Delta}_\Gamma(t) = \frac{1}{\delta}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\delta^{-1}\left(G\frac{\partial}{\partial\alpha} - F\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\delta^{-1}\left(E\frac{\partial}{\partial\beta} - F\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\right]\right\},$$

где $E = |M\xi_\alpha|^2$; $G = |M\xi_\beta|^2$; $F = M\xi_\alpha\cdot M\xi_\beta$; $\delta = (EG - F^2)^{1/2}$. Оператор $\overline{\Delta}_\Gamma(t)$ существенно зависит от времени t.

По функции $\mathbf{V}(\xi, t)$ вектор возмущений восстанавливается равенством

$$\mathbf{X} = M\int_0^t M^{-1}\mathbf{V}\,dt.$$

Для потенциальных массовых сил уравнение (6.14) имеет интеграл

$$\mathbf{V} = M\frac{\partial}{\partial t}\left[M^{-1}W\int_0^t W^{-1}M^{*-1}\left(\mathbf{V}_0 - \int_0^\tau \nabla P\,d\mu\right)d\tau\right],$$

и путем замены $\Phi_t = -P$ задача сводится к отысканию одной функции $\Phi(\xi, t)$.

Заметим, что выражение в квадратных скобках равенства (6.14) обращается в нуль, если основное движение является потенциальным (как следует из (6.4), это возможно только при $M \equiv W$.) Далее, в уравнениях (6.13), (6.14) содержатся дифференциальные операторы первого порядка, а в граничном условии присутствует дифференциальный оператор второго порядка $\overline{\Delta}_{\Gamma}(t)$. Тем не менее эта задача приводится аналогично задаче (6.1)—(6.3) к нелокальной задаче Коши в некотором гильбертовом пространстве. Однако в отличие от задачи (6.1)—(6.3) при $\sigma > 0$ она является корректной независимо от знака $\partial p/\partial n|_{\Gamma}$. В работе [27] получены априорные оценки решения задачи (6.13)—(6.17) типа интеграла энергии и доказана теорема существования и единственности ее обобщенного решения. Этот результат подтверждает роль поверхностного натяжения как регуляризатора задачи о движении идеальной жидкости со свободной границей.

В частном случае, когда Γ не зависит от t и основное движение есть равномерное вращение жидкости как твердого тела, задача (6.13)—(6.17) подробно исследована в [19].

Задача о малых возмущениях движения вязкой капиллярной жидкости подробно изучена лишь в случае, когда основное движение — покой или равномерное вращение [19]. Возмущения произвольного основного движения при $\sigma = 0$ и $\nu > 0$ рассматривались в работе [6].

Возможна и другая постановка задачи о возмущениях движения со свободной границей: при неизменном начальном поле скоростей меняется область определения отображения (1.7). Такая задача исследовалась в [13].

7. Устойчивость движения. Пусть известно некоторое решение задачи (1.9)—(1.11), определенное для всех $t \geqslant 0$. Тогда можно поставить вопрос об устойчивости этого решения по отношению к изменению начальных данных. Если вызванные этим изменением возмущения малы, то задача устойчивости может быть рассмотрена в рамках линейной теории.

Следует отметить, что к настоящему времени отсутствуют какие-либо результаты о разрешимости задачи (1.9)—(1.11) на бесконечном интервале времени. Уже поэтому проблема обоснования линейного приближения в теории устойчивости движения со свободной границей весьма далека от решения.

Если основное решение не является стационарным, то коэффициенты уравнений (6.13)—(6.17) зависят от времени, что делает крайне затруднительным получение достаточных условий устойчивости по линейному приближению в общем случае. Все полученные к настоящему времени результаты по устойчивости неустановившихся движений конечной массы жидкости связаны с рассмотрением конкретных примеров с простой геометрией свободной поверхности. В этих примерах жидкость считается идеальной, а ее движение — потенциальным (исключение составляет работа [28], в которой исследована устойчивость вращающегося кольца идеальной жидкости).

Рассмотрим сначала возмущения потенциального движения идеальной жидкости при $\sigma = 0$. В этом случае задача сводится к отысканию функции $\Psi(\xi, t)$, удовлетворяющей (6.5), (6.6). Будем предполагать, что элементы матрицы M и коэффициент $a(\xi, t)$ определены и являются достаточно гладкими функциями ξ, t в цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$ при любом $T > 0$. Граница Γ области Ω также предполагается достаточно гладкой. Пусть, кроме того, для любых $(\xi, t) \in \Gamma \times [0, T]$ выполнено «условие гиперболичности» (6.10) с некоторым $a_0(T) > 0$ (допускается, чтобы $a_0 \to 0$ при $T \to \infty$). Это условие гарантирует корректность рассматриваемой задачи.

Для решений задачи (6.5)—(6.7) справедлива оценка (6.11). Эта оценка позволяет принять за меру устойчивости величину $N(t) = \|\Psi_t\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|\nabla\Psi\|^2_{L_2(\Omega)}$ и называть основное решение устойчивым, если $N(t)$ ограничено при всех $t > 0$ для любого $\Phi_0 \in W_2^1(\Omega)$ и неустойчивым в противном случае. Конечно, такое определение устойчивости не является единственно возможным. В работе [13] предложено характеризовать устойчивость в терминах поведения при $t\to\infty$ нормальной к Γ_t компоненты вектора возмущений свободной границы $\mathbf{X}(\xi, t)$, $\xi\in\Gamma$. В общем случае она дается равенством

$$R\equiv \mathbf{n}_{\Gamma_t}\cdot\mathbf{X} = \rho\int\limits_0^t \mathbf{n}\cdot M^{-1}\mathbf{V}dt, \tag{7.1}$$

где $\rho = |\nabla f|(|M^{*-1}\nabla f|)^{-1}$; $\mathbf{n}_{\Gamma_t}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Г в точке $\mathbf{x}(\xi, t)$.

Если $R(\xi, t)\to\infty$ при $t\to\infty$ для некоторого $\xi\in\Gamma$, то локальное отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного состояния в пространстве ($\mathbf{x}$) неограниченно растет. Таким образом, величина $R(\xi, t)$ дает весьма тонкую характеристику устойчивости движения, в то время как функция $N(t)$ является ее грубой, интегральной характеристикой. Может случиться, что некоторое решение устойчиво в интегральном смысле, но функция R неограниченно возрастает при $t\to\infty$ в отдельных точках границы. Такая ситуация действительно возникает в задачах об устойчивости движений с линейным полем скоростей, описываемых формулами (3.1)—(3.6). В частном случае $\mathbf{g}=0$, $\mathbf{b}=0$, $\mathbf{x}_{00}'=0$

$$\partial p/\partial n = -q(t)|N\xi|,\ q(t) = \mathrm{Sp}(A'A^{-1})^2/\mathrm{Sp}(A^{-1}A^{*-1}N).$$

Ниже более подробно исследуется устойчивость движения этого класса. Имеет место интегральное тождество («интеграл энергии»)

$$\int\limits_\Omega |U(\xi, t)|^2 d\Omega + \int\limits_\Gamma \left|\frac{\partial p}{\partial n}\right|^{-1} |\Psi_t(\xi, t)|^2 d\Gamma = \int\limits_\Omega |\nabla\varphi_0(\xi)|^2 d\Omega - $$
$$- 2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega U(\xi, t)\cdot A'A^{-1}U(\xi, t)\, d\Omega\, dt + \int\limits_0^t \frac{q'}{q}\int\limits_\Gamma \left|\frac{dp}{\partial n}\right|^{-1} |\Psi_t(\xi, t)|^2 d\Gamma\, dt, \tag{7.2}$$

справедливое для любого решения задачи (6.5)—(6.7), где $U(\xi, t) = A^{*-1}(t)\nabla\Psi(\xi, t)$.

Из тождества (7.2) можно уже извлечь некоторую информацию о поведении, например, $\|\Psi_t\|_{L_2(\Gamma)}$ при $t\to\infty$ для конкретных движений, не решая задачу (6.5)—(6.7).

В качестве примера рассмотрим плоскую задачу об устойчивости деформирующегося эллипса. Основное решение здесь дается формулой (3.1), где $\mathbf{x}_0=0$, $A=\mathrm{diag}\,(a_1, a_2)$. Функции $a_1(t)$, $a_2(t)$ определяются соотношениями (3.8), в которых положено $\omega=0$. Для определенности считаем, что $b>0$, тогда большая полуось эллипса $a_1(t)$ находится из равенства

$$b\sqrt{2}\,t = \int\limits_1^{a_1} (\tau^4+1)^{1/2}\frac{d\tau}{\tau^2}, \tag{7.3}$$

откуда $a_1 = b\sqrt{2}t + O(t^{-1})$ при $t\to\infty$. Из тождества (7.2) получаем оценки

$$\int\limits_\Gamma \Psi_t^2\, d\Gamma \leqslant \frac{4b^2ca_1^6}{(a_1^4+1)^2}\int\limits_\Omega |\nabla\Phi_0|^2 d\Omega = O(t^{-2}),$$

$$\int\limits_{\Omega} \Psi_{\xi_2}^2 d\Omega \leqslant \frac{a_1'}{a_1} \int\limits_{\Omega} |\nabla \Phi_0|^2 d\Omega = O(t^{-1})$$

при $t \to \infty$, где Ω — круг $|\xi| < c$; Γ — окружность $|\xi| = c$; Φ_0 — гармоническая в Ω функция.

Для получения оценки $\|\Psi_{\xi_1}\|_{L_2(\Omega)}$ необходима более детальная информация о решении задачи (6.5)—(6.7). Оказывается, что собственные функции оператора $K(t)$ не зависят от t [29] и задача сводится к задаче Коши для распадающейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В работе [29] показано, что если $\Phi_0|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$, то величина $\|\Psi\|_{L_2(\Gamma)}$ ограничена при всех $t > 0$. Если $\Phi_0|_\Gamma \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, то Ψ_{tt}, Ψ_{ξ_1}, Ψ_{ξ_2} при фиксированном t принадлежат $L_2(\Gamma)$, причем их нормы в $L_2(\Gamma)$ ограничены при всех $t > 0$. Следует отметить, что в случае, когда начальная функция Φ_0 четна по ξ_1 и отлична от постоянной, имеет место оценка $\|\Psi\|_{L_2(\Gamma)} = O(t^{-1})$, $t \to \infty$. Четное по ξ_1 решение описывает движение с непроницаемой стенкой $\xi_2 = 0$.

Вычисление нормальной составляющей вектора возмущений по формуле (7.1) для случая $\Phi_0|_\Gamma = \sin n\theta$, где $\theta = \operatorname{arctg}(\xi_2/\xi_1)$, дает

$$R = \frac{a_1^3 \sin n\theta}{\left(\cos^2\theta + a_1^4 \sin^2\theta\right)^{1/2}} \left[\gamma_n + O\left(t^{-4}\right)\right] \tag{7.4}$$

при $t \to \infty$. Здесь γ_n — некоторая постоянная; $a_1(t)$ — функция, определенная (7.3). Из (7.4) видно, что вне зон $|\theta| < \varepsilon$, $|\pi - \theta| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ фиксировано) $R = O(t)$ при $t \to \infty$. Таким образом, в этом случае свободная граница неустойчива. Вместе с тем $\|\Psi\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$ при $t \to \infty$.

Если $\Phi_0|_\Gamma = \cos n\theta$, $n = 1, 2, \ldots$, то при $t \to \infty$

$$R = \frac{a_1 \cos n\theta}{\left(\cos^2\theta + a_1^4 \sin^2\theta\right)^{1/2}} \left[\delta_n + O\left(t^{-4}\right)\right]$$

с постоянной δ_n. Отсюда вытекает, что для данного решения неустойчивость свободной границы локализуется в диапазоне углов $|\theta| = O(t^{-1})$, $|\pi - \theta| = O(t^{-1})$. Этот вывод, в частности, применим к задаче об устойчивости деформирующегося эллипса при наличии непроницаемой стенки $\xi_2 = 0$. При $t \to \infty$ жидкость приближается к стенке, и это стабилизирует свободную границу.

Другой пример — устойчивость потенциального осесимметричного движения с линейным полем скоростей. Основное решение описано в п. 3 и интерпретируется как движение эллипсоида вращения. Отображение (3.1) здесь имеет вид $\mathrm{x} = \operatorname{diag}\{m, 1/\sqrt{m}, 1/\sqrt{m}\}\xi$. Функция $m(t)$ определяется уравнением (3.7), в котором $\omega = 0$, и условием $m(0) = 1$. Область Ω — шар $|\xi| < c$, Γ — его граница. Тождество (7.2) приводит к оценкам

$$\|\Psi_{\xi_1}\|_{L_2(\Omega)} = O(1), \qquad \|\Psi_t\|_{L_2(\Gamma)} = O\left(t^{-2}\right)$$

при $t \to \infty$ для сплюснутого эллипсоида (что соответствует $m \to 0$ при $t \to \infty$);

$$\|\Psi_{\xi_i}\|_{L_2(\Omega)} = O(1), \qquad \|\Psi_t\|_{L_2(\Gamma)} = O\left(t^{-2}\right),$$

где $i = 1, 2$, для вытянутого эллипсоида. Вместе с тем можно указать такие начальные данные, что $R > kt$ при $t \to \infty$ с некоторой постоянной $k > 0$ [30].

Приведенные выше результаты говорят об устойчивости по линейному приближению рассмотренных основных движений, если за меру устойчивости брать норму в L_2 значений потенциала Ψ или его производных. Однако, если судить об устойчивости по отклонению свободной границы от ее невозмущенного состояния, указанные движения следует признать неустойчивыми.

Выше рассматривали лишь потенциальные возмущения. Если сохранить потенциальность основного решения, но расширить класс возмущений, сняв с них условие потенциальности, то решение, устойчивое по отношению к потенциальным возмущениям, может стать неустойчивым. Соответствующие примеры приведены в [21]. Об этом же говорят рассмотренные в п. 3 точные решения, описывающие движения вращающегося эллипсоида и вращающегося эллипса.

Кроме рассмотренных выше случаев, в настоящее время исследована устойчивость по линейному приближению следующих потенциальных движений идеальной жидкости: движение сферического слоя [12], движение кругового кольца [13, 16].

Учет капиллярных сил в задаче о малых возмущениях приводит, как уже отмечалось, к корректно поставленной задаче (6.13)—(6.17). Что касается влияния капиллярности на устойчивость, то число рассмотренных здесь конкретных задач очень невелико. Известно, что поверхностное натяжение подавляет рост двумерных возмущений радиального движения кольца [16] и движения вращающегося кольца [28]. С другой стороны, введение поверхностного натяжения приводит к экспоненциальному росту при $t \to \infty$ осесимметричных возмущений нестационарного движения жидкого цилиндра, боковая поверхность которого свободна, а основания твердые непроницаемые стенки [31].

В данной работе не рассматриваются вопросы устойчивости равновесных состояний жидкого объема. В этой задаче получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости по отношению к конечным возмущениям, основанные на результатах работы [32], где установлен аналог теоремы Лагранжа об устойчивости для движения вязкой капиллярной жидкости. Изложение этого круга вопросов содержится в [19].

С проблемой устойчивости тесно связан вопрос о предельных режимах движения конечной массы жидкости объема при $t \to \infty$. Рассмотренные выше примеры движений идеальной жидкости и вязкого кольца показывают многообразие возникающих здесь возможностей. В общем случае этот вопрос далек от решения. Имеется лишь следующий частный результат [9].

Предположим, что при всех $t > 0$ существует классическое решение задачи (1.9)—(1.11) при $\mathbf{g} = 0$, причем отображение (1.7) задает диффеоморфизм областей Ω и Ω_t при любом t. Обозначим через $d(t)$ диаметр области Ω_t

$$d(t) = \max\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_t\}.$$

Пусть $\mathbf{v}_0(\xi) \not\equiv 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{v}_0 = 0$ для $\xi \in \Omega$. Тогда $d(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Иными словами, при потенциальном движении по инерции конечного объема идеальной жидкости с непостоянной скоростью и нулевым поверхностным натяжением диаметр объема неограниченно растет со временем.

Доказательство этого результата основано на свойстве супергармоничности давления в потенциальном движении жидкости и тождестве [33]

$$\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\Omega_t} |\mathbf{x}|^2 d\Omega_t = 2\int\limits_{\Omega_t} |\mathbf{x}_t|^2 d\Omega_t - 4\sigma\int\limits_{\Gamma_t} d\Gamma_t + 6\int\limits_{\Omega_t} p\, d\Omega_t,$$

справедливом для произвольного движения изолированного объема вязкой капиллярной жидкости.

8. **Пограничные слои.** Предположим, что известно решение задачи (1.1)—(1.4) при $\nu > 0$. Как найти его асимптотику при $\nu \to 0$? Естественно ожидать, что вне узких слоев вблизи свободной границы движение будет близко к движению идеальной жидкости. В пограничных слоях происходит резкое изменение производных скоростей, обеспечивающее обращение в нуль касательных напряжений на свободной границе. Формальная асимптотика решения этой задачи в плоском и осесимметричном случаях дана в работе [34], в [35, 36] исследованы пограничные слои в задачах о потенциальном движении эллипсоида вращения и эллипса при $\sigma = 0$ (см. п. 3).

Единственным примером, где удается обосновать справедливость асимптотического разложения, является задача о вращающемся кольце. Асимптотика решения ищется в виде

$$v_\theta \sim v_\theta^{(0)} + \sqrt{\nu} v_\theta^{(1)} + \sqrt{\nu}(\zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)}) + \nu v_\theta^{(2)} + \nu(\zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)}) + \ldots,$$

$$\chi \sim \chi^{(0)} + \sqrt{\nu}\chi^{(1)} + \nu\chi^{(2)} + \ldots,$$

$$r_i \sim r_i^{(0)} + \sqrt{\nu} r_i^{(1)} + \nu r_i^{(2)} + \ldots, \quad i = 1, 2.$$

Обозначения v_θ, χ, r_i введены в п. 4. Функции $v_\theta^{(k)}$, $r_i^{(k)}$, $\chi^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) находятся при помощи первого итерационного процесса Люстерника—Вишика. При $k = 0$ получаем решение задачи о движении кольца идеальной жидкости. Функции типа пограничного слоя $\zeta_i^{(k)}$ ($i = 1, 2$, $k = 1, 2 \ldots$) определяются в результате второго итерационного процесса. Они компенсируют невязки в условии отсутствия касательного напряжения на свободных границах кольца. Дается оценка погрешности асимптотического разложения при $\nu \to 0$, справедливая на любом конечном интервале времени, если $\sigma = 0$, и на любом промежутке $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, на котором $0 < \delta \leqslant r_1^{(0)}(t)$, в случае $\sigma \neq 0$ [37].

Вопрос о построении асимптотики решения задачи (1.1)—(1.4) при $\nu \to 0$ в общем трехмерном случае остается открытым. Другой нерешенный вопрос — нахождение асимптотики решения задачи о движении конечной массы жидкости при $\sigma \to 0$.

Авторы выражают благодарность Л. В. Овсянникову, которому они обязаны своим интересом к задаче о движении конечной массы жидкости.

Поступила 17 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 8. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1972.
2. **Овсянников Л. В.** Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств.— «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 4.
3. **Налимов В. И.** Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши—Пуассона.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 189, № 1.
4. **Ovsyannikov L. V.** About motion of a finite mass of liquid.— In: Fluid Dynamics Transactions. Vol. 3. Warszawa, PWN, 1967.
5. **Солонников В. А.** Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью.— В кн.: Динамика сплошной среды, Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.

6. **Солонников В. А.** Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью.— «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1977, т. 41, № 6.
7. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М., «Мир», 1973.
8. **Овсянников Л. В.** Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости.— В кн.: Труды 5-й сессии Ученого совета по народнохозяйственному использованию взрыва. Фрунзе, «Илим», 1965.
9. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей. Новосибирск, изд. Новосибирск. ун-та, 1975.
10. **Longuet-Higgins M. S.** A class of exact, time-dependent, free-surface flows.— «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 55, N 3.
11. **Пухначев В. В.** О движении жидкого эллипса.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 33. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.
12. **Hunt J. H.** Instability in a spherical fluid sheel.— «Appl. Scient. Res.», Ser. A, 1961, vol. 10, N 1.
13. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры.— В кн.: Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск, «Наука», 1967.
14. **Классен Л. Г.** О схлопывании полости в идеальной несжимаемой жидкости силами поверхностного натяжения.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 14. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
15. **Бытев В. О.** Инвариантные решения уравнений Навье—Стокса.— ПМТФ, 1972, № 6.
16. **Кузнецов В. М., Шер Е. Н.** Об устойчивости течения идеальной жидкости в полосе и кольце.— ПМТФ, 1964, № 2.
17. **Бытев В. О.** Неустановившееся движение кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами.— ПМТФ, 1970, № 3.
18. **Лаврентьева О. М.** Неустановившееся движение вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 31. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
19. **Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.** Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976.
20. **Puchnachev V. V.** On the motion of isolated liquid volume.— In: Abstracts of the Reports of XIII Symposium on Advanced Problems and Methods in Fluid Mechanics. Warszawa, 1977, p. 77.
21. **Андреев В. К.** Вихревые возмущения неустановившегося движения со свободной границей.— ПМТФ, 1975, № 5.
22. **Андреев В. К.** Корректность задачи о малых возмущениях движения со свободной границей.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 13. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
23. **Taylor G.** The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes.— «Proc. Roy. Soc.», Ser. A, 1950, vol. 201.
24. **Налимов В. И.** Задача Коши—Пуассона.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 18. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
25. **Биркгоф Г.** Неустойчивость Гемгольца и Тэйлора.— В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1964.
26. **Соболев С. Л.** Об одной новой задаче математической физики.— «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1954, т. 18, № 1.
27. **Андреев В. К.** Малые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей с учетом капиллярных сил.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
28. **Меньщиков В. М.** Об устойчивости одного класса вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости. Аннотация доклада на семинаре Института гидродинамики СО АН СССР.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 6.
29. **Пухначев В. В.** Малые возмущения плоского неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипса.— ПМТФ, 1971, № 4.
30. **Андреев В. К.** Об устойчивости неустановившегося движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей, имеющей форму эллипсоида вращения.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 12. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1972.
31. **Андреев В. К.** Об устойчивости нестационарной круглой струи идеальной несжимаемой жидкости. — ПМТФ, 1972, № 4.
32. **Румянцев В. В.** Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением.— ПММ, 1964, т. 28, № 4.
33. **Day W. A.** The effect of surface tension on the motion of an isolated fluid body.— «Arch. Rat. Mech. Anal.», 1973, vol. 52, N 2.
34. **Батищев В. А., Срубщик Л. С.** Об асимптотике свободной поверхности жидкости при исчезающей вязкости.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 4.

35. **Батищев В. А.** Асимптотика осесимметрических течений со свободной границей при исчезающей вязкости.— ПМТФ, 1975, № 3.
36. **Батищев В. А.** Влияние малой вязкости на потенциальное течение жидкости со свободной границей в форме эллипса.— ПМТФ, 1977, № 1.
37. **Puchnachev V. V.** Problems with a free boundary for the Navier-Stokes equations.— In: Lecture notes of Autumn course on mathematical and numerical methods in fluid dynamics. Trieste, 1973, p. 1—34.

УДК 532.51

ВИХРЕВОЙ ИМПУЛЬС ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Владимиров

(*Новосибирск*)

1. В трехмерных течениях однородной несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство и покоящейся на бесконечности, истинный импульс

$$\mathbf{I} \equiv \int \mathbf{v} dV$$

существует только тогда, когда поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ удовлетворяет условиям [1]

$$r^3 |\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)| \to 0 \quad \text{при} \quad r \equiv |\mathbf{r}| \to \infty, \tag{1.1}$$

что исключает важные случаи течений, обладающих асимптотикой источников и диполей. Если же (1.1) выполняется, то $\mathbf{I} = 0$.

Действительно,

$$\int v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i v_k) \, dV = \int x_i v_k dS_k. \tag{1.2}$$

Использовано уравнение неразрывности и правило суммирования по повторяющимся индексам, x_k — декартовы координаты.

Последний интеграл в (1.2) берется по бесконечно удаленной поверхности. В силу (1.1) он равен нулю, так что $\mathbf{I} = 0$. Таким образом, истинный импульс для рассматриваемых течений либо пе существует, либо равен нулю.

По этой причине введен так называемый «вихревой» импульс течения

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV, \quad \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}. \tag{1.3}$$

Эта величина определялась [2] только для течений жидкости, заполняющей все пространство. Она обладает следующими свойствами:

а) существует, если $r^4 |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)| \to 0$ при $r \to \infty$, это требование менее ограничительно, чем (1.1), так как накладывает ограничение на поведение поля вихря, а не скорости на бесконечности;

б) обладает размерностью импульса;