

О ПОСТРОЕНИИ ДИАГРАММ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ  
ХРУПКИХ ТЕЛ С ОСТРОКОНЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Л. Л. Лобацкий, В. В. Панасюк

(Львов)

Используя некоторые представления коэффициентов интенсивности напряжений вблизи вершин остроконечных дефектов (плоская задача), излагается способ построения диаграмм предельного равновесия хрупких тел с дефектами типа остроконечных полостей-трещин [3]. Рассмотрены конкретные примеры, в частности на основе предложенной методики построена диаграмма предельного равновесия для хрупкого тела, ослабленного дефектами, которые имеют форму кругового отверстия с трещиной, выходящей на границу этого отверстия. Коэффициенты интенсивности для такой задачи определяются на основании приближенного решения интегрального уравнения с помощью метода коллокаций. Проведен также анализ построения некоторых известных ранее диаграмм.

1. Уравнения диаграмм предельных напряжений. Рассмотрим двумерное хрупкое тело, ослабленное остроконечными (с точками возврата первого рода) концентраторами напряжений. Пусть эти концентраторы расположены далеко один от другого, так что их взаимодействием можно пренебречь. В какой-нибудь фиксированной вершине одного из рассматриваемых концентраторов разместим начало полярной системы координат  $r, \theta$ , причем угол  $\theta$  будем отсчитывать от касательной к контуру в вершине концентратора. Тогда компонента  $\sigma_\theta$  упругих разрывающих напряжений в окрестности вершины концентратора (т. е. при малом  $r$ ) может быть записана в виде [1-5]

$$\sigma_\theta = \frac{N}{\sqrt{r}} + O(1), \quad N = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos^2 \theta / 2 (k_1 \cos \theta / 2 - 3k_2 \sin \theta / 2) \quad (1.1)$$

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты интенсивности напряжений соответственно от симметричной и антисимметричной (относительно касательной в вершине концентратора) части внешней нагрузки,  $O(1)$  — ограниченная часть компоненты напряжения при  $r \rightarrow 0$ .

Предельно равновесное состояние тела наступит тогда, когда будет выполняться равенство [2,3,5]

$$N_{\max} = K / \pi \quad (K - \text{модуль сцепления}) \quad (1.2)$$

Пусть тело нагружается «на бесконечности» в двух взаимно перпендикулярных направлениях напряжениями  $p$  и  $q$  ( $p \geq q$ ), причем так, что напряжение  $p$  составляет угол  $\alpha$  с касательной, проведенной в вершине концентратора. Тогда для рассматриваемого класса концентраторов и вида внешней нагрузки коэффициенты интенсивности напряжений могут быть представлены в виде

$$k_1 = (p + q)f_1 - (p - q)f_2 \cos 2\alpha, \quad k_2 = (p - q)f_3 \sin 2\alpha \quad (1.3)$$

где  $f_1, f_2, f_3$  — некоторые функции геометрических параметров концентратора (для простоты будем считать в дальнейшем, что  $f_1 > 0$  и  $f_2 > 0$ ).

Подставляя выражения (1.3) в формулу (1.1) и приравнявая к нулю производную  $\partial N / \partial \alpha$ , получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = (3f_3 / f_2) \operatorname{tg} \theta / 2$$

Используя последнюю формулу, будем иметь

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{f_2 \cos \theta / 2}{\sqrt{9f_3^2 \sin^2 \theta / 2 + f_2^2 \cos^2 \theta / 2}} \quad (1.4)$$

Из равенств (1.1), (1.3) и (1.4) вытекает, что вторая производная  $\partial^2 N / \partial \alpha^2$  будет отрицательной, если в формуле (1.4) (и аналогичной для  $\sin 2\alpha$ ) взять нижний знак. Тогда выражение для максимального значения  $N$  по углу  $\alpha$  будет

$$N_{\max}^{(\alpha)} = 1/4 (1 + \cos \theta) [(p + q) f_1 \sqrt{1 + \cos \theta} + (p - q) \sqrt{2(A - B \cos \theta)}] \quad (1.5)$$

$$2A = 9f_3^2 + f_2^2, \quad 2B = 9f_3^2 - f_2^2$$

Исследуем теперь выражение (1.5) на экстремум по углу  $\theta$ . Приравнявая нулю производную  $dN_{\max}^{(\alpha)} / d\theta$ , находим

$$\sin \theta \left[ 3(p + q) f_1 \sqrt{1 + \cos \theta} + \sqrt{2}(p - q) \frac{2A - B - 3B \cos \theta}{\sqrt{A - B \cos \theta}} \right] = 0 \quad (1.6)$$

Равенство нулю первого сомножителя левой части последнего уравнения дает  $\theta = 0$  (значения  $\theta = \pm \pi$  не подходят из физических соображений). При таком значении  $\theta$  вторая производная будет отрицательной, если будет выполняться условие

$$F(p, q) = [f_2(f_1 + f_2) - 3f_3^2]p + [f_2(f_1 - f_2) + 3f_3^2]q > 0 \quad (1.7)$$

Предполагая последнее условие выполненным и подставляя в (1.5)  $\theta = 0$ , получаем

$$N_{\max}^{(1)} = 1/2 \sqrt{2} [(f_1 + f_2)p + (f_1 - f_2)q] \quad (1.8)$$

Приравнявая нулю выражение в квадратных скобках левой части равенства (1.6), получаем

$$\cos \theta = \frac{1}{F_3} \{ (A - B) F_1 + 4B^2 (p - q)^2 + (A + B) F_2 \} \quad (1.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$F_1 = 8B(p - q)^2 + 3(p + q)^2 f_1^2, \quad F_3 = 6B[2B(p - q)^2 + (p + q)^2 f_1^2]$$

$$F_2 = (p + q) f_1 \sqrt{9(p + q)^2 f_1^2 + 16B(p - q)^2}$$

причем под корнем квадратным имеется в виду его арифметическое значение. Для значений угла  $\theta$ , определяемых из (1.9), вторая производная  $d^2 N_{\max}^{(\alpha)} / d\theta^2$  будет отрицательной, если будет выполняться условие

$$F(p, q) < 0$$

где функция  $F$  определена соотношением (1.7). Подставляя выражение для  $\cos \theta$  из (1.9) в формулу (1.5), получаем

$$N_{\max}^{(2)} = (A + B)^{1/2} \frac{F_1 + F_2}{4F_3} \left\{ (p + q) f_1 \left( \frac{F_1 + F_2}{F_3} \right)^{1/2} + \right. \quad (1.10)$$

$$\left. + (p - q) \left( \frac{2B}{F_3} [F_1 - 4B(p - q)^2 - F_2] \right)^{1/2} \right\}$$

Таким образом, условие предельного равновесия (1.2) запишется в виде следующих двух равенств:

$$(f_1 + f_2)p_* + (f_1 - f_2)q_* = \frac{\sqrt{2}K}{\pi}, \quad F(p_*, q_*) > 0 \quad (1.11)$$

$$(A + B)^{1/2} \frac{F_1 + F_2}{2\sqrt{2}F_3} \left\{ (p_* + q_*) f_1 \left( \frac{F_1 + F_2}{F_3} \right)^{1/2} + \right. \quad (1.12)$$

$$\left. + (p_* - q_*) \left( \frac{2B}{F_3} [F_1 - 4B(p_* - q_*)^2 - F_2] \right)^{1/2} \right\} = \frac{\sqrt{2}K}{\pi} F(p_*, q_*) < 0$$

Здесь  $p_*$  и  $q_*$  — наименьшие значения внешних напряжений, при которых выполняется равенство (1.2) (предельные напряжения [5,6]). Уравнения (1.11) (1.12) определяют в плоскости  $pq$  линию, которую принято называть диаграммой предельных напряжений [5]. Очевидно, что для  $q \gg p$  диаграмма получится зеркальным отображением уже построенной части в биссектрисе первого и третьего координатных углов. Если теперь напряженное состояние в теле с рассматриваемым типом дефектов таково, что точка с координатами  $p, q$  попадает внутрь области, ограниченной диаграммой (т. е. расположена с той же стороны, что и начало системы координат  $pOq$ ), то коэффициент запаса прочности в теле больше единицы, в противном случае — меньше единицы. Если же точка с координатами  $p, q$  попадает на диаграмму, то равновесное состояние тела является предельным в том смысле, что малейшая догрузка (которая выводит точку во внешнюю область) вызывает начало его разрушения.

Более удобно представить рассматриваемые диаграммы прочности в плоскости с относительными координатами

$$x^\circ = p/\sigma_B, \quad y^\circ = q/\sigma_B$$

где  $\sigma_B$  — техническая прочность рассматриваемого тела, которую будем считать [6] равной наименьшему предельному значению внешней нагрузки  $\sigma_B = p_*$  ( $q_* = 0$ ) в случае одностороннего растяжения тела.

2. Анализ построения некоторых известных диаграмм. 1. Пусть тело ослаблено изолированными прямолинейными узкими щелями-трещинами длины  $2l$ . В этом случае

$$f_1 = f_2 = f_3 = 1/2 \sqrt{l}$$

Подставляя эти значения в равенство (1.12) при  $q_* = 0$  получаем

$$p_* = \sigma_B = 0.97\pi^{-1} \sqrt{2/l} K \quad (2.1)$$

Учитывая теперь соотношение (1.12), приходим к заключению, что в первом квадранте от прямой  $y^\circ = x^\circ$  и до прямой  $y^\circ = 1/3 x^\circ$  диаграмма прочности тоже представляет собой прямую линию  $x^\circ = 1.03$ .

Используя равенства (1.12) и (2.1), можно получить достаточное количество точек для построения криволинейной части диаграммы. Так например, при  $s_1 = q_*/p_* = -1$  получим точку с координатами  $x_1^\circ = 0.79$ ,  $y_1^\circ = -0.79$ , при  $s_2 = -4$  — точку с координатами  $x_2^\circ = 0.43$ ,  $y_2^\circ = -1.73$ . Ось  $Oy^\circ$  диаграмма пересекает в точке  $y_3^\circ = -2.67$ . На фиг. 1 кривая 1 изображает диаграмму, построенную на основании проведенных выкладок.

Отметим, что другим путем диаграмма для рассматриваемого случая была построена в работе [6].

2. Если дефекты в теле имеют форму гипоциклоидальных полостей различной конфигурации [7], то на основании результатов работы [7] (после устранения некоторых описок) будем иметь

$$\begin{aligned} f_1 &= -f \frac{(n+1)t^2 + nt + n - 1}{t^3 - (n+1)t^2 - t - n + 1} \\ f_2 &= 2f \frac{3nt^3 + (n^2 + 2)t^2 + (n^2 - 4)t + n^2 - 3n + 2}{(n^2 - n + 4)t^2 + 4(n-2)t + n^2 - 3n + 4} \\ f_3 &= -f \frac{6t^3 - (10-n)t^2 - (n^2 + 2)t + 2(n-1)}{(n^2 - n + 4)t^2 + 4(n-2)t + n^2 - 3n + 4} \\ f &= \frac{n+t-1}{n} \left( \frac{(1-t)a}{(n+1)t + n - 1} \right)^{1/2}, \quad t = \frac{2 - (1-\varepsilon)n}{2 + (1-\varepsilon)n} \\ \varepsilon &= b/a \quad \left( \frac{n-2}{n} \leq \varepsilon \leq 1 \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $n \geq 3$  — число вершин;  $a, b$ , — радиусы окружностей соответственно описанной около дефекта и вписанной в этот дефект.

Меняя значения  $n$  и  $\varepsilon$ , будем получать различные дефекты типа остроконечных гипоциклоидальных полостей.

Пользуясь равенствами (2.2) и изложенной выше методикой, можно построить диаграммы предельных напряжений в каждом конкретном случае параметров  $n$  и  $\varepsilon$ .

а) Пусть  $n = 3$ . При  $\varepsilon = 1/3$  получим диаграмму для гипоциклоиды [6]. В системе координат  $x^0 y^0$  она совпадает с кривой 1. На основании уравнений (1.12) и выражений (2.2) можно установить, что при  $n = 3$  наибольшая прочность тела при одностороннем сжатии будет при  $\varepsilon = 0.58$ . В этом случае функции  $f_1, f_2$  и  $f_3$  принимают такие значения:

$$f_1 = 0.456 \sqrt{a}, \quad f_2 = 0.537 \sqrt{a}, \quad f_3 = 0.126 \sqrt{a} \quad (2.3)$$

Учитывая теперь соотношения (1.8) и (1.12), получаем

$$p_* = \sigma_B = 1.006\pi^{-1} \sqrt{2} \sqrt{a} K \quad (2.4)$$

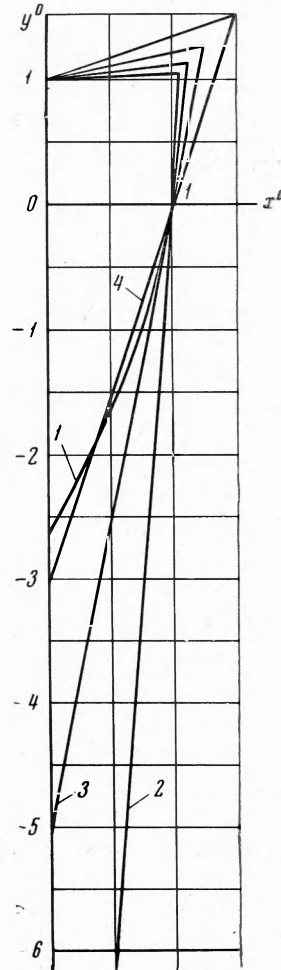
Тогда в первом квадранте координатной системы  $x^0 y^0$  и до прямой  $y^0 = -107x^0$  в четвертом квадранте диаграмма прочности описывается прямой

$$x^0 - 0.0815y^0 = 1 \quad (2.5)$$

На основании (1.12), (2.3) и (2.4) при  $s_1 = -150$  имеем ( $x_1^0 = 0.076, y_1^0 = -11.33$ ), при  $s_2 = -250$  имеем ( $x_2^0 = 0.052, y_2^0 = -11.66$ ).

Ось  $y^0$  диаграмма пересекает в точке  $y_3^0 = -12.16$ . При помощи этих данных на фиг. 1 построена диаграмма предельных напряжений для рассматриваемого случая (кривая 2).

При возрастании  $\varepsilon$  до 1 получаем диаграммы, приближающиеся к диаграмме для кругового дефекта [13] (прямая 4 на фиг. 1). б) Пусть  $n = 4$ . В



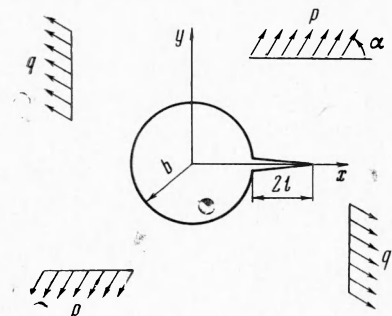
Фиг. 1

этом случае тело будет иметь наибольшую прочность при одностороннем сжатии, если дефекты в нем характеризуются параметром  $\varepsilon = 0.57$ . Диаграмма прочности для такого тела в первом и четвертом квадрантах описывается прямой

$$x^\circ - 0.201y^\circ = 1$$

На фиг. 1 эта диаграмма отмечена цифрой 3. Как и в случае а), при  $\varepsilon \rightarrow 1$  получаем диаграммы, близкие к диаграмме для кругового дефекта.

**3. Диаграммы предельных напряжений для тела, ослабленного дефектами в виде кругового отверстия с трещиной.** Пусть дефекты в теле имеют форму кругового отверстия радиуса  $b$  и трещины длиной  $2l$ , выходящей на свободную границу отверстия (фиг. 2). На основании работ [8-10] задачу о напряженно-деформированном состоянии тела с таким дефектом можно свести к нахождению решения следующей системы двух сингулярных интегральных уравнений:



Фиг. 2

$$2D \int_0^1 M_i(\xi, \eta) \mu_i(\eta) d\eta + \Lambda_i^{(p)}(\xi) = 0$$

$$D = \frac{G}{\pi(1+\kappa)}, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига,  $\kappa = 3-4\nu$  или  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  соответственно в случае плоской деформации или плоского напряженного состояния;  $\nu$  — коэффициент Пуассона  $\Lambda_1^{(p)} = \sigma_y^{(p)}$ ,  $\Lambda_2^{(p)} = \tau_{xy}^{(p)}$  соответственно нормальная и касательная составляющие напряжений, вызванных внешней нагрузкой на месте расположения трещины в случае, когда пластинка ослаблена только круговым отверстием. Ядра  $M_i$  интегральных уравнений (3.1) определяются формулами

$$M_1 = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{2\lambda(1 + \lambda^2\xi^2)}{(1 + \lambda\xi)^2} \left\{ \frac{1}{1 + \lambda\eta} + \frac{1}{1 - \lambda\eta} \left[ 1 + \frac{2(1 - \lambda\xi)}{(1 + \lambda\xi)(1 - \lambda\eta)} \right] \right\} -$$

$$- \frac{1}{\eta + \xi} \left\{ 1 - \frac{2\xi(1 - \lambda\xi)}{(1 + \lambda\xi)^2(\eta + \xi)} \left[ \frac{3 + \lambda^2\xi^2}{1 + \lambda\xi} - \frac{2\xi(1 - \lambda\xi)}{\eta + \xi} \right] \right\}$$

$$M_2 = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{8\lambda^2\xi}{(1 + \lambda\xi)^2(1 - \lambda\eta)} \left[ \frac{2(1 - \lambda\xi + \lambda^2\xi^2)}{1 + \lambda\xi} + \frac{1 - \lambda\xi}{1 - \lambda\eta} \right] -$$

$$- \frac{(1 - \lambda\xi)^2}{(1 + \lambda\xi)^2(\eta + \xi)} \left\{ \frac{(1 - \lambda\xi)^2 - 8\lambda\xi}{(1 + \lambda\xi)^2} - \frac{2\xi}{\eta + \xi} \left[ \frac{3 - \lambda\xi}{1 + \lambda\xi} - \frac{2\xi}{\eta + \xi} \right] \right\}$$

$$\left( \lambda = \frac{\varepsilon^\circ}{2 + \varepsilon^\circ}, \quad \varepsilon^\circ = \frac{2l}{b} \right)$$

Если решения уравнений (3.1) искать в виде [10]

$$\mu_i = -\frac{1}{2D} \left( \frac{k_i}{\pi \sqrt{2l(2 + \varepsilon^\circ)(1 - \eta)}} + \sqrt{1 - \eta} \sum_{n=0}^m a_n^{(i)} \eta^n \right) \quad (i = 1, 2) \quad (3.3)$$

то можно убедиться, что концентрация напряжений в окрестности трещины на ее продолжении характеризуется формулами

$$\sigma_y = \frac{k_1}{\sqrt{2r}} + O(1), \quad \tau_{xy} = \frac{k_2}{\sqrt{2r}} + O(1)$$

Здесь  $\sigma_y$  — нормальная,  $\tau_{xy}$  — касательная составляющие напряжений в пластинке с круговым отверстием и трещиной. Подставляя выражение для  $\mu_i$  из (3.3) в (3.1), получаем

$$\frac{k_i}{\pi \sqrt{2l(2+\varepsilon^0)}} I_k^{(i)} + \sum_{n=0}^m a_n^{(i)} I_n^{(i)} = \Lambda_i^{(p)} \quad (3.4)$$

$$I_k^{(i)}(\xi, \eta) = \int_0^1 M_i \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta}}, \quad I_n^{(i)}(\xi, \eta) = \int_0^1 \eta^n \sqrt{1-\eta} M_i d\eta \quad (n=0, 1, \dots)$$

Для определения коэффициентов  $k_i$ ,  $a_n^{(i)}$  воспользуемся методом коллокаций, т. е. потребуем удовлетворения равенства (3.4) в  $m+2$  точках промежутка  $1 \leq \xi \leq 1 + \varepsilon^0$ . Тогда коэффициенты определяются по формулам Крамера (см., например, [11]). Если числители в формулах Крамера разложить по элементам первого столбца, то коэффициенты  $k_i$  можно записать в таком виде:

$$k_i = \frac{\pi \sqrt{2l(2+\varepsilon^0)}}{\Delta^{(i)}} \sum_{j=1}^{m+2} \Lambda_i^{(p)}(\xi_j) A_{1j}^{(i)} \quad (3.5)$$

где  $\xi_j$  — точки коллокации,  $\Delta^{(i)}$  — определитель системы уравнений, получаемой из (3.4),  $A_{1j}^{(i)}$  — адьюнкты элементов первого столбца этого определителя.

Для рассматриваемого случая нагружения (см. п. 1), используя известные решения [12], можно получить на линии расположения трещины

$$\sigma_y^{(p)} = \frac{1}{2} \left[ (p+q) \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) - (p-q) \left( 1 + \frac{3}{x^4} \right) \cos 2\alpha \right] \quad (3.6)$$

$$\tau_{xy}^{(p)} = \frac{1}{2} (p-q) \left( 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} \right) \sin 2\alpha \quad \left( x = \frac{1+\lambda\xi}{1-\lambda\xi} \right)$$

Учитывая соотношения (1.4), (3.5) и (3.6), можно получить

$$f_1 = -\frac{\pi}{2} \sqrt{2a\varepsilon^0} \sum_{j=1}^{m+2} \left( 1 + \frac{1}{x_j^2} \right) \frac{A_{1j}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \quad f_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{2a\varepsilon^0} \sum_{j=1}^{m+2} \left( 1 + \frac{3}{x_j^4} \right) \frac{A_{1j}^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \quad (3.7)$$

$$f_3 = \frac{\pi}{2} \sqrt{2a\varepsilon^0} \sum_{j=1}^{m+2} \left( 1 + \frac{2}{x_j^2} - \frac{3}{x_j^4} \right) \frac{A_{1j}^{(2)}}{\Delta^{(2)}}$$

Здесь  $a = b + l$  — радиус окружности, описанной около дефекта.

2. При проведении вычислений ограничимся значением  $m = 1$  и в качестве точек коллокации возьмем точки  $\xi_1 = 0.25$ ,  $\xi_2 = 0.625$ ,  $\xi_3 = 1$ . При  $\varepsilon^0 \leq 0.4$  ( $\lambda < 0.167$ ) отношения адьюнкты  $A_{1j}^{(i)}$  к соответствующим детерминантам  $\Delta^{(i)}$  можно представить с точностью до  $\lambda^4$  в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} A_{11}^{(1)} / \Delta^{(1)} &= 0.114 - 0.479 \lambda + 1.569 \lambda^2 - 5.132 \lambda^3 + 15.97 \lambda^4 \\ A_{12}^{(1)} / \Delta^{(1)} &= 0.032 + 0.131 \lambda - 0.569 \lambda^2 + 1.802 \lambda^3 - 5.708 \lambda^4 \\ A_{13}^{(1)} / \Delta^{(1)} &= 0.103 - 0.143 \lambda + 0.463 \lambda^2 - 1.546 \lambda^3 + 4.792 \lambda^4 \\ A_{11}^{(2)} / \Delta^{(2)} &= 0.114 - 0.210 \lambda + 0.078 \lambda^2 + 0.006 \lambda^3 + 0.010 \lambda^4 \\ A_{12}^{(2)} / \Delta^{(2)} &= 0.032 + 0.074 \lambda + 0.100 \lambda^2 - 0.011 \lambda^3 - 0.006 \lambda^4 \\ A_{13}^{(2)} / \Delta^{(2)} &= 0.103 - 0.062 \lambda + 0.020 \lambda^2 - 0.0002 \lambda^3 - 0.009 \lambda^4 \end{aligned} \quad (3.8)$$



При  $\varepsilon_1^\circ = 0.01$  из формул (3.7) и (3.8) находим

$$f_1 = 0.109 \sqrt{a}, \quad f_2 = 0.215 \sqrt{a}, \quad f_3 = 0.003 \sqrt{a}$$

Соответствующая диаграмма, как и следовало ожидать, практически совпадает с прямой 4 (фиг. 1), которая изображает диаграмму для пластинки с дефектами круговой формы [13].

При  $\varepsilon_2^\circ = 0.33$  из указанных выше формул получим

$$f_1 = 0.436 \sqrt{a}, \quad f_2 = 0.646 \sqrt{a}, \quad f_3 = 0.242 \sqrt{a}$$

В этом случае получаем диаграмму, практически совпадающую с диаграммой для дефекта, рассмотренного в п. 2, 2, б).

Наконец, в случае  $\varepsilon_3^\circ = 1$  из формул (3.7) получим

$$f_1 = 0.496 \sqrt{a}, \quad f_2 = 0.505 \sqrt{a}, \quad f_3 = 0.483 \sqrt{a}$$

Диаграмма для такого значения  $\varepsilon^\circ$  практически совпадает с диаграммой для пластинки с трещиной (кривая 1 на фиг. 1), а значит отверстие уже не оказывает существенного влияния на процесс развития трещины.

Поступила 10 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, No. 1.
2. Irwin G. R. *Fracture*. Handbuch Physik, Bd: 6, Springer, Berlin, 1958.
3. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
4. Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F., Crack-tip stress — intensity factors for plane extension and plate bending problems. *Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, № 2. (Рус. перев.: Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин. Прикл. механ., 1962, № 2.)
5. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
6. Панасюк В. В., О разрушении хрупких тел при плоском напряженном состоянии. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 9.
7. Панасюк В. В., Буйна Е. В. О диаграммах предельных напряжений для хрупких тел с дефектами типа остроконечных полостей-трещин. Физ.-хим. механика материалов, 1967, т. 3, № 5.
8. Виескнер Н. F. Some stress singularities and their computation by means of integral equations. In: «Boundary problems in differential equations», Univ. Wisconsin Press, 1960, pp. 215—230.
9. Витвицкий П. М., Леонов М. Я. Растяжение за пределом упругости пластинки с круговым отверстием. ПМТФ, 1962, № 1.
10. Либакций Л. Л. Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами. Физ.-хим. механика материалов, 1965, т. 1, № 4.
11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Гостехиздат, 1955.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
13. Либакций Л. Л. К построению диаграмм прочности для хрупкого тела, содержащего дефекты эллиптической формы. Физ.-хим. механика материалов, 1969, т. 5, № 3.