

$$W_{12} = \frac{2n_2n_3 \operatorname{tg} \varphi}{a_1 \sqrt{\psi_1 \Delta} \delta} \left\{ q (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_3 \sin \gamma_{22}d) - rm_2 \cos \gamma_{21}d \right\} \cos (\theta_{11} - \varphi) + \\ + i \frac{rm_2}{\cos \theta_{21}} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2} \cos \varphi + \sin \theta_{21} \cos (\theta_{11} + \varphi) \right] \sin \gamma_{21}d \quad (3.1)$$

$$W_{32}' = -\frac{1}{m_2} \left[W_{12} (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_1 \sin \gamma_{22}d) + iW_{11} \frac{q}{a_1 \sqrt{\psi_1}} \operatorname{tg} \varphi \cos (\theta_{11} - \varphi) \sin \gamma_{22}d \right]$$

$$\Delta = n_2(n_1 + n_3) \cos \gamma_{21}d - i (n_2^2 + n_1n_3) \sin \gamma_{21}d, \quad q = m_2a_2 = m_1a_1$$

$$\delta = m_2 (m_1 + m_3) \cos \gamma_{22}d - i (m_2^2 + m_1m_3) \sin \gamma_{22}d, \quad r = m_2a_2 - m_3a_3$$

$$n_\mu = \sqrt{\rho_\mu} \cos \theta_{\mu 1}, \quad m_\mu = \rho_\mu a_\mu, \quad \gamma_{21} = \frac{\omega \cos \theta_{21}}{a_2 \sqrt{\psi_2}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\omega}{a_2 \sin \varphi}$$

Если толщина слоя значительно меньше длины быстрой магнитозвуковой волны $\gamma_{21}d \ll 1$, формулы (3.1) существенно упрощаются (3.2)

$$W_{31}' = \frac{n_1^2 - n_3}{n_1 + n_3} - 2i \frac{n_2^2 - n_1^2}{(n_1 + n_3)^2} \gamma_{31}d, \quad W_{11} = \frac{2n_3}{n_1 + n_3} + 2i \frac{n_2^2 + n_1n_3}{(n_1 + n_3)^2} \gamma_{31}d \\ W_{32}' = \frac{\beta}{\delta \sqrt{\psi_1}} [r (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_1 \sin \gamma_{22}d) - qm_2], \quad \beta = \frac{2n_3 \operatorname{tg} \varphi \cos (\theta_{11} - \varphi)}{a_1 (n_1 + n_3)} \\ W_{12} = \frac{\beta}{\delta \sqrt{\psi_1}} [q (m_2 \cos \gamma_{22}d - im_3 \sin \gamma_{22}d) - rm_2], \quad \gamma_{31} = \frac{\omega \cos \theta_{31}}{a_3 \sqrt{\psi_3}}$$

Теперь медленные волны будут возникать и в случае нормального падения. Согласно (3.2), они отсутствуют лишь при условии

$$\gamma_{22}d = (2N + 1) \pi, \quad 2\rho_2a_2^2 = \rho_1a_1^2 + \rho_3a_3^2 \quad (3.3)$$

т. е. когда толщина слоя составляет нечетное число полуволн второго типа, а модуль упругости среды 2 равен среднему арифметическому модулей сред 3 и 1.

Поступила 14 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Косачевский Л. Я. Отражение магнитозвуковых волн на границе раздела двух сред с конечной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 19, вып. 2.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.

О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА В СЛУЧАЙНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Г. М. Заславский (Новосибирск)

Рассмотрено поведение осциллятора во внешнем случайном поле в приближении, когда длительность столкновения много больше периода осциллятора. Получено кинетическое уравнение, описывающее изменение со временем функции распределения координат и скоростей. Рассмотренная задача аналогична движению заряженной частицы во внешнем магнитном поле при наличии столкновений.

Известной ситуацией при изучении взаимодействия частиц плазмы с полем волн, развитых вследствие неустойчивостей, является возможность рассмотрения движения отдельной частицы в заданном случайном поле. Если к тому же имеется внешнее магнитное поле, то движение частицы аналогично движению осциллятора в поле случайных сил. Случайные силы, действующие на осциллятор, можно представить себе как последовательность импульсов с известным случайным законом распределения величины импульсов и промежутков времени между импульсами. В зависимости от времени длительности импульса τ (времени «столкновения») и частоты осциллятора ω возможны два предельных случая: 1) $\omega\tau \ll 1$; 2) $\omega\tau \gg 1$. Первый случай достаточно хорошо изучен. Ниже рассматривается второй случай в приближении, когда средний интервал между импульсами много больше τ (редкие «столкновения»).

Исходным уравнением, описывающим движение осциллятора, будет

$$x'' + [\omega^2 + F(t)] x = 0 \quad (1)$$

Здесь $F(t)$ — последовательность достаточно гладких импульсов¹ (фиг. 1) с известным случайным законом распределения их формы и промежутков между ними. Условие достаточной «плавности» импульсов

$$\omega\tau \gg 1 \quad (2)$$

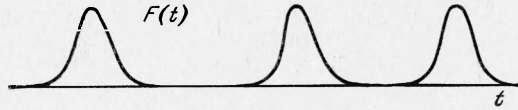
позволяет записать решение уравнения (1) в ВКБ-приближении [1]

$$x = Ax_+ + Bx_-, \quad x_{\pm} = \Omega^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega(t') dt' \right\}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 + F(t)} \quad (3)$$

В интервале между столкновениями $\Omega \approx \omega$ и решение (3) представляет собой обычные колебания. Действие столкновения приводит к изменению адиабатического инварианта (E — энергия осциллятора)

$$I = E/\Omega \quad (4)$$

аналогичному эффекту надбарьерного отражения в квантовой механике. Рассмотрим комплексную плоскость t . Линии уровня асимптотических решений (3) имеют вид, изображенный на фиг. 2. При этом считается, что ближайшими к действительной оси особенностями являются точки t_k, \bar{t}_k (черта означает комплексное сопряжение), в которых $\Omega^2(t)$ имеет простой нуль



Фиг. 1

$$\Omega^2(t) = \psi(t) \prod_k (t - t_k)(t - \bar{t}_k) \quad (5)$$

где $\psi(t)$ может иметь особенности или нули в точках с мнимой частью, много большей $\text{Im } t_k$. Изменение адиабатического инварианта при условии (5) возникает при прохождении достаточно узкой области вблизи точек O_k (фиг. 2) и вычислялось в [2].

Введем оператор сдвига T_n^+

$$x(t + T_n) = T_n^+ x(t) \quad (6)$$

Здесь T_n — промежуток между O_{n-1} и O_n , а момент времени t лежит в интервале (O_{n-1}, O_n) . Воспользуемся для оператора T_n^+ видом, приведенным в [3]

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + e^{-2\delta_n}} e^{i(1/2\pi + S_n + \varphi_n)} e^{-\delta_n - i(1/2\pi - S_n)} & \\ e^{-\delta_n + i(1/2\pi - S_n)} \sqrt{1 + e^{-2\delta_n}} e^{-i(1/2\pi + S_n + \varphi_n)} & \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\delta_n = -i \int_{\bar{t}_n}^{t_n} \Omega(t') dt' > 0, \quad S_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Omega(t') dt' > 0 \quad (8)$$

При этом оператор T_n^+ действует на вектор-столбец с компонентами $A_n x_+, B_n x_-$. Фаза φ_n в (7) по порядку величины не более единицы, и точный вид ее в дальнейшем не понадобится. Оператор T_n^+ имеет структуру

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (9)$$

Выберем для удобства x в действительном виде, т. е. $B = \bar{A}$. Из (8) следует, что если $B_n = \bar{A}_n$, то $B_{n+1} = \bar{A}_{n+1}$. Отсюда, согласно (4),

$$I_n = |A_n|^2 \quad (10)$$

Учтем теперь, что столкновения редкие. Тогда

$$S_n \approx \omega T_n \gg 1 \quad (11)$$

и оператор сдвига принимает вид

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \varepsilon_n^2} e^{i\omega T_n} & \varepsilon_n e^{i\omega T_n} \\ \varepsilon_n e^{-i\omega T_n} & \sqrt{1 + \varepsilon_n^2} e^{-i\omega T_n} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{2} e^{-\delta_n} \quad (12)$$

¹ В дальнейшем действие импульса на частицу будем называть столкновением.

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$\ddot{\xi} + \left[\omega^2 + \sum_k u_k \delta(t - t_k^*) \right] \xi = 0 \quad (13)$$

решение которого на интервале (t_{n-1}^*, t_n^*) запишем в виде

$$\xi(t) = A_n^* \xi_+ + \bar{A}_n^* \xi_-, \quad \xi_{\pm} = e^{\pm i\omega t} \quad (14)$$

Оператор сдвига $T_{n^{**}}$ определим аналогично (6)

$$\xi(t + T_{n^{**}}) = T_{n^{**}} \xi(t) \quad (T_{n^{**}} = t_{n+1}^* - t_n^*) \quad (15)$$

Имеем

$$T_{n^{**}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + 1/4 u_n^2 / \omega^2} e^{i(\varphi_n^* + \omega T_{n^{**}})} & \frac{u_n}{2\omega} e^{i(1/2\pi + \omega T_{n^{**}})} \\ \frac{u_n}{2\omega} e^{-i(1/2\pi + \omega T_{n^{**}})} & \sqrt{1 + 1/4 u_n^2 / \omega^2} e^{-i(\varphi_n^* + \omega T_{n^{**}})} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\varphi_n^* = \arctg(u_n / 2\omega)$$

Сравним (12) и (16) и, учитывая (11), видим, что исходное уравнение (1) можно заменить уравнением (12), если положить

$$\xi = \sqrt{\Omega} x, \quad \varepsilon_n = u_n / 2\omega, \quad T_{n^{**}} = T_n \quad (17)$$

Перейдем к выводу кинетического уравнения. Пусть $f(\xi, \eta, t)$ — плотность вероятности того, что в момент времени t переменная ξ лежит в интервале $(\xi, \xi + d\xi)$, а переменная $\eta = \dot{\xi}$ — в интервале $(\eta, \eta + d\eta)$, причем

$$\int f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 1$$

Точки t_k^* в уравнении (13) будем считать распределенными по закону Пуассона, т. е. вероятность того, что интервал между t_k^* и t_{k+1}^* лежит в области $(T, T + dT)$, равна

$$P(T) dT = \lambda e^{-\lambda T} dT \quad (18)$$

Предполагается известным также плотность вероятности $w(\varepsilon)$ того, что ε_n (для любого n) лежит в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$. В случае (13) уравнение для $f(\xi, \eta, t)$ рассматривалось в [4]; приведем его без вывода

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, t)}{\partial t} = \left(\omega^2 \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f(\xi, \eta, t) + \lambda \int d\varepsilon w(\varepsilon) f(\xi, \eta + \omega \varepsilon \xi, t) - \lambda f(\xi, \eta, t) \quad (19)$$

В частности, если

$$w(\varepsilon) = 1/\pi \delta(\varepsilon' - \varepsilon)$$

имеем

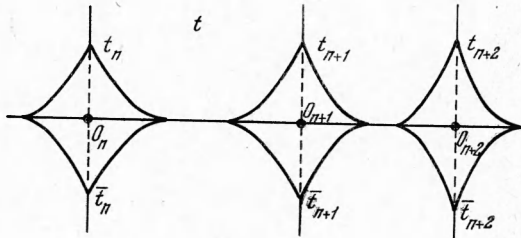
$$\frac{\partial f(\xi, \eta, t)}{\partial t} = \left(\omega^2 \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f(\xi, \eta, t) + \lambda [f(\xi, \eta + \omega \varepsilon \xi, t) - f(\xi, \eta, t)] \quad (20)$$

При больших δ , т. е. очень малых ε , получаем из (20) уравнение типа Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx (\omega^2 + \varepsilon \lambda \omega) \xi \frac{\partial f}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial f}{\partial \xi} + \lambda \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (21)$$

с коэффициентом диффузии

$$D \sim 1/2 \lambda \omega^2 \varepsilon^2 \xi^2 \quad (22)$$



Фиг. 2

Согласно (12), величина ε экспоненциально мала, и, следовательно, также мал коэффициент диффузии. Как увидим ниже, вторые моменты от f , которые, в силу (10) и (17), пропорциональны адиабатическому инварианту осциллятора I , растут со временем. Это приводит к тому, что, начиная с некоторых моментов времени, уравнение (21) перестает быть справедливым. Условие применимости уравнения (21) имеет вид

$$\xi \ll \xi_0 = \frac{2}{\omega\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \ln f \right]^{-1} \quad (23)$$

Введем вторые моменты функции распределения f : $\langle \xi^2 \rangle$, $\langle \xi \eta \rangle$, $\langle \eta^2 \rangle$, где скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по $f(\xi, \eta, t)$. Уравнения для них, приведенные в [4], легко получаются из (20) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi^2 \rangle &= 2 \langle \xi \eta \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \xi \eta \rangle &= -(\omega^2 + \lambda\varepsilon\omega) \langle \varepsilon^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \eta^2 \rangle &= \lambda\varepsilon^2\omega^2 \langle \xi^2 \rangle - 2(\omega^2 + \lambda\varepsilon\omega) \langle \varepsilon \eta \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы (24) пропорционально $e^{\Gamma t}$, где Γ — корни уравнения

$$\Gamma^3 + 4(\omega^2 + \lambda\varepsilon\omega)\Gamma - 2\lambda\varepsilon^2\omega^2 = 0 \quad (25)$$

Уравнение (25) всегда имеет один неустойчивый корень $\Gamma_0 > 0$, и в нашем случае

$$\Gamma_0 \approx \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda = \frac{1}{8} \lambda e^{-2\delta} \quad (26)$$

Таким образом, характерное время развития неустойчивости достаточно велико

$$\tau_R \sim 8e^{2\delta} \lambda^{-1} \quad (27)$$

В соответствии с (10), все вторые моменты пропорциональны I , и рост их в среднем со временем означает увеличение величины $\langle I \rangle = \langle \xi^2 + \eta^2 / \Omega^2 \rangle$.

Иногда удобно переписать уравнение (19) в переменных типа действие — фаза. Введем

$$I = \sqrt{\xi^2 + \omega^{-2}\eta^2}, \quad z = \eta / \omega\xi \quad (28)$$

Тогда уравнение (19) принимает вид

$$\frac{\partial F(I, z)}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial z} [(1 + z^2) F(I, z)] + \lambda \left\{ F(I^*, z^*) \frac{\partial (I^*, z^*)}{\partial (I, z)} - F(I, z) \right\} \quad (29)$$

где

$$I^* = I \left(\frac{1 + (z + \varepsilon/\omega)^2}{1 + z^2} \right)^{1/2}, \quad z^* = z + \frac{\varepsilon}{\omega} \quad (30)$$

Если проинтегрировать (29) по I , то получается кинетическое уравнение для фаз (точнее — для котангенса фаз z). Однако кинетическое уравнение только для

$$F(I) = \int_{-\infty}^{\infty} F(I, z) dz$$

получить не удастся.

Приведенный выше метод получения кинетического уравнения может быть применен и для более сложных, чем осциллятор, систем. При этом предполагается известным оператор сдвига T^+ в ВКБ-приближении.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за полезные советы.

Поступила 12.III.1966

ЛИТЕРАТУРА

- Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Изд. «Мир», 1965.
- Дыхне А. Квантовые переходы в адиабатическом приближении. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, № 2.
- Заславский Г. М. Лекции по применению метода ВКБ в физике. Изд. Новосибирск. ун-та, 1965.
- Frisch H. Z., Lloyd S. P. Electron levels in a One-Dimensional Random Lattice. Phys. Rev., 1960, vol. 120, No. 4.