

УДК 519.6

Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями

В.Д. Лисейкин^{1,2}, В.И. Паасонен^{1,2}

¹Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: lvd@ict.nsc.ru (Лисейкин В.Д.), paas@ict.nsc.ru (Паасонен В.И.)

Лисейкин В.Д., Паасонен В.И. Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 41–56.

В работе реализован симбиоз двух подходов к численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка с малым параметром, а именно компактных разностных схем повышенного порядка аппроксимации и явного способа задания специальных адаптивных сеток, сгущающихся в зонах быстрого изменения решения. Технология построения адаптивных сеток, квазиравномерных по приращению решения на шаге сетки, опирается на априорные оценки производных решения и представляет собой обобщение методики, разработанной ранее для схемы с односторонними разностями.

В серии численных экспериментов проведено сравнение схем первого порядка и компактных схем второго и третьего порядков аппроксимации на равномерных и построенных в данной работе адаптивных сетках. Спектр тестовых задач охватывает типичные формы, масштабы и расположение пограничных и внутренних слоев (экспоненциальных, степенных и смешанных). В численных экспериментах подтверждено высокое качество расчетов с помощью компактных схем повышенного порядка точности на специальных адаптивных сетках.

С привлечением метода трансфинитной интерполяции или путем численного решения обращенных уравнений Бельтрами или диффузии относительно контрольной метрики предлагаемая технология построения адаптивных сеток может быть обобщена на многомерные задачи с пограничными и внутренними слоями.

DOI: 10.15372/SJNM20190104

Ключевые слова: уравнение с малым параметром, погранслой, внутренний слой, компактная схема, схема повышенной точности, адаптивная сетка.

Liseikin V.D., Paasonen V.I. Compact difference schemes and layer-resolving grids for the numerical modeling of problems with boundary and interior layers // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 1. — P. 41–56.

This paper realizes a symbiosis of two approaches to the numerical solution of second order ODEs with a small parameter having singularities such as interior and boundary layers, namely, the application of both compact schemes of high orders and layer-resolving grids. The generation of layer-resolving grids, based on estimates of solution derivatives and formulations of coordinate transformations eliminating solution singularities, is a generalization of the methodology early developed for the first order scheme.

This paper presents the formulas of the coordinate transformations and numerical experiments for the schemes of the first, second, and third orders on uniform and layer-resolving grids for the equations with boundary, interior, exponential and power layers of the first and second scales. The experiments conducted confirm the uniform convergence of the numerical solutions of equations with the help of compact schemes of high orders on the layer-resolving grids.

By using the transfinite interpolation methodology or numerical solutions to the Beltrami and diffusion equations in a control metric, built by the coordinate transformations eliminating the solution singularities, the developed technology can be generalized to the solution of multi-dimensional equations with boundary and interior layers.

Keywords: *equation with a small parameter, boundary layer, interior layer, compact scheme, scheme of high order, layer-resolving grid, adaptive grid.*

Введение

Рассматривается первая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + F(x, u) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad F'_u(u, x) \geq 0, \quad u(0) = U_0, \quad u(1) = U_1, \quad (1)$$

или его линейного варианта

$$-\varepsilon u'' + a(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad c(x) \geq 0, \quad u(0) = U_0, \quad u(1) = U_1, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Для численного решения модельных задач (1) и (2) рассматриваются три различные схемы на трехточечном шаблоне, аппроксимирующие уравнение соответственно с первым, вторым и третьим порядками относительно локального значения шага неравномерной сетки $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$, являющейся образом равномерной сетки при гладком отображении.

В зависимости от поведения функции $a(x)$, расположения ее нулей и значений ее производных при малой вязкости ε реализуются различные по структуре, по числу и по размещению пограничные и внутренние слои [1–3]. В этих работах на основе априорно оцениваемой информации о производных решения для схемы первого порядка точности с односторонними разностями были разработаны алгоритмы явного задания координат узлов адаптивной сетки, обеспечивающие ее квазиравномерность относительно модуля приращения решения на каждом шаге. Опираясь на свойство обратной монотонности [2], для схемы с учетом знака в указанных работах удалось теоретически доказать равномерную по ε сходимость численного решения к точному. Обобщение явного способа задания адаптивных сеток на компактные схемы представлялось авторам и весьма полезным, и вполне реализуемым, однако потеря свойства обратной монотонности схем при повышении порядка аппроксимации схем явилась препятствием для теоретических оценок. При этом оставался открытым вопрос, является ли отсутствие этого свойства фатальной причиной, или же требование монотонности лишь облегчает процесс доказательства, а в практическом плане, в сущности, является избыточным. Ответ на этот вопрос могло дать только численное исследование.

В данной работе проведено такое исследование. Алгоритмы явного задания адаптивных сеток для различных типов слоев обобщены на схемы любого порядка точности и исследованы численно применительно к компактным схемам второго и третьего порядков.

1. Разностные схемы

Первая схема — схема первого порядка точности со стандартной аппроксимацией второй производной

$$\Lambda u = \frac{\Delta_+ u - \Delta_- u}{s/2}, \quad s = h_+ + h_-,$$

и односторонней разделенной разностью $\Delta_{\pm}u$ в качестве аппроксимации первой производной, учитывающей знак $a(x_i)$. Символами h_+ и h_- обозначены местные значения шагов сетки справа и слева от данного узла. Схема имеет простой вид

$$-\varepsilon\Lambda u + a\Delta_{\pm}u + cu = f. \quad (3)$$

Здесь приведена схема для линейного уравнения, в нелинейном случае разность $cu - f$ следует заменить на F . Это справедливо и в отношении двух других схем, которые ниже приведены также лишь для линейного случая.

Во второй схеме первая производная аппроксимируется по трем узлам со вторым порядком, а главный член погрешности разностного аналога второй производной Λu компенсируется дополнительными слагаемыми так, чтобы в целом получилась схема второго порядка аппроксимации:

$$-\varepsilon\Lambda u + a\Delta u + \frac{d}{3}\Omega u + \left(E + \frac{d}{3}\Delta\right)(cu) = \left(E + \frac{d}{3}\Delta\right)f, \quad d = h_+ - h_-, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{s}, \quad \Omega = \frac{a_+ \Delta_+ - a_- \Delta_-}{s/2}, \quad s = h_+ + h_-,$$

E — тождественный оператор, a_{\pm} — местные значения функции $a(x)$ в полуцелых узлах справа и слева. Этот способ повышения порядка точности называется методом исчерпания погрешности.

Применим к схеме второго порядка (4) еще раз метод исчерпания погрешности. Для этого вычислим главные члены разложения погрешности схемы (4) и понизим в них порядок производных с помощью продолженной системы уравнений, а затем аппроксимируем полученные слагаемые разностными выражениями, добавив последние с противоположными знаками в схему. В результате получим схему третьего порядка аппроксимации

$$\left(-\varepsilon + \frac{p}{6}\Delta a\right)\Lambda u + \left(a + \frac{p}{12}\Lambda a\right)\Delta u + \left(\frac{d}{3} - ar\right)\Omega u + \Sigma(cu) = \Sigma f, \quad p = h_- h_+, \quad (5)$$

где

$$\Sigma = E + \left(\frac{d}{3} - ar\right)\Delta + \frac{p + d^2}{12}\Lambda, \quad r = \frac{3p + d^2}{36\varepsilon}.$$

В случае постоянных коэффициентов такого рода компактные схемы на неравномерных сетках построены для различных типов дифференциальных уравнений в работе [4]. В двумерном нелинейном случае аналогичное построение применено в [5, 6] для численного моделирования стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Схемы (4), (5) по структуре компактны, так как все слагаемые аппроксимируются в пределах трехточечного шаблона. В случае постоянных коэффициентов и полной информации о выражениях старших производных от f процесс исчерпания погрешности можно продолжать до бесконечности, оставаясь в рамках трехточечного шаблона, но при переменных коэффициентах попытка повышения порядка до четвертого приводит к необходимости аппроксимировать третью производную $a'''(x)$, что требует уже наличия минимум четырех узлов.

Следует заметить, что в частном случае равномерной сетки порядок аппроксимации схемы (5) четвертый, а не третий. Четвертый порядок достигается также в случае сетки, для которой разность соседних шагов $d = h_+ - h_-$ имеет второй порядок малости. Это справедливо, например, когда узлы сетки являются образом равномерной сетки при гладком преобразовании $x(\xi, \varepsilon) \in C^2(0, 1)$, т. е. $x_i = x(ih, \varepsilon)$. И в данной работе следует ожидать соответствия результатов расчета по схеме (5) именно четвертому порядку точности, поскольку сетки для нее генерируются преобразованиями класса гладкости не ниже второго. Для обеспечения равномерной по ε сходимости численного решения к точному также требуется равномерная по ε оценка производных решения относительно новой сеточной координаты ξ , т. е.

$$\left| \frac{d^p u(x(\xi, \varepsilon), \varepsilon)}{d\xi^p} \right| \leq M, \quad p \leq n, \quad (6)$$

где M — константа, не зависящая от ε .

Для большинства тестовых задач, решаемых ниже, точное решение не было известно. В таких случаях под “точным” решением на приводимых графиках подразумевается численное решение, полученное на самой подробной сетке в процессе ее детализации. При этом, разумеется, при дроблении сетки контролировалась сходимость приближенных решений по различным схемам к одному и тому же пределу. Для апостериорной оценки C -нормы ошибки (т. е. разности между приближенным и точным решением) на сгущающихся сетках при неизвестном точном решении использовалась разность приближенных решений на двух последовательных сетках

$$\delta^h = \max_{i=0}^N |u_{2i}^{2N} - u_i^N|, \quad h = \frac{1}{N},$$

где u^N и u^{2N} — приближенные решения на сетках с N и $2N$ шагами. По оценкам ошибки вычислялась апостериорная оценка реально наблюдаемого порядка точности $p^h = \log_2 \left(\frac{\delta^h}{\delta^{h/2}} \right)$. Во всех таблицах, приведенных далее, оценки ошибки δ и порядка p снабжены нижними индексами со значениями 1, 2 и 3, соответствующими порядку точности схем, по которым получены результаты.

Важной характеристикой алгоритма явного задания узлов адаптивной сетки является равномерность модуля приращения решения на шаге, т. е. оценка $|u_{i+1}^N - u_i^N| \leq m/N$, где m не зависит от ε и N . Практически во всех расчетах это свойство имело место. Нарушалось оно лишь при грубой сетке, не достаточно детальной для данного значения вязкости, и обычно проявлялось в осциллирующем характере приближенных решений.

2. Базовое преобразование, генерирующее адаптивную сетку

Для построения разностных сеток, сгущающихся в экспоненциальных слоях возле точки $x_0 = 0$, будет использовано преобразование класса $C^l[0, 1]$, устраняющее в слое экспоненциальные особенности масштаба k до порядка n (т. е. обеспечивающее справедливость оценки (6)), в следующей форме:

$$x_b(\xi, \varepsilon, a, k, l, n, \xi_0) = \begin{cases} c_1 \varepsilon^k ((1 - d\xi)^{-1/a} - 1), & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ c_1 \left[\varepsilon^{k(1-\beta/a)} - \varepsilon^k + \left(\frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^{1/a}} \right)' (\xi_0)(\xi - \xi_0) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^{1/a}} \right)'' (\xi_0)(\xi - \xi_0)^2 + \dots + \right. \\ \left. \frac{1}{l!} \left(\frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^{1/a}} \right)^{(l)} (\xi_0)(\xi - \xi_0)^l + c_0(\xi - \xi_0)^{l+1} \right], & \xi_0 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (7)$$

где $l \leq n$, $d = (1 - \varepsilon^{k\beta})/\xi_0 \geq 1 + m_1 > 1$, $\beta = a/(1 + na)$, $c_0 > 0$, при этом a — произвольная положительная константа, отделенная от нуля ($a \geq m_2 > 0$); константа $c_1 > 0$ выбирается из условия $x_b(1, \varepsilon, a, k, \dots) = 1$.

Данное преобразование (7) учитывает оценки старших производных и является обобщением на случай $n > 2$ формулы из работы [7], предназначенной для схемы первого порядка точности. На практике параметр n означает порядок производной в главном члене погрешности аппроксимации схемы. Отметим, что формула (7) и все следующие аналогичные формулы справедливы для $\varepsilon \in (0, 1)$.

Базовое преобразование (7), отображающее взаимно-однозначно отрезок $0 \leq \xi \leq 1$ на отрезок $0 \leq x \leq 1$, построено следующим образом. На части отрезка $0 \leq \xi \leq \xi_0$ определяется функция

$$x = \varepsilon^k \left((1 - d\xi)^{-1/a} - 1 \right), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0, \quad (8)$$

предложенная в [7], которая устраняет экспоненциальную особенность в погранслое. Затем (8) гладко сопрягается с полиномом, определенным на остальной части отрезка $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ так, чтобы производные до порядка l составной функции были непрерывны в точке склейки. Для построения этого полинома достаточно знать значения функции (8) и ее производных до порядка l в точке $\xi = \xi_0$, которые выражаются явно:

$$\left(\frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^{1/a}} \right)^{(i)} (\xi_0) = d^i \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \dots \left(\frac{1}{a} + i - 1 \right) \varepsilon^{ka(n-i)/(1+na)}, \quad i \geq 1. \quad (9)$$

После этого обе ветви склеенной гладкой функции умножаются на постоянный коэффициент c_1 , с тем чтобы значение функции на правом конце подтянуть к значению $x = 1$.

Число ξ_0 в (7) означает долю длины отрезка, относящуюся к ветви (8) составного преобразования, т.е. отображаемую в предполагаемую зону погранслоя. В частности, при равномерной сетке по ξ число ξ_0 означает долю от общего числа шагов сетки, попадающих в погранслой. Числа n и l выбираются в зависимости от порядка аппроксимации схемы. В расчетах, как правило, $l = p$, а $n = p + 1$, где p — порядок аппроксимации схемы.

Отметим, что для численного решения задач с экспоненциальными погранслоями применяются также разностные сетки Бахвалова [8] и Шишкина [9], однако они зависят от значения функции $a(x)$ в точке $x = 0$. Преобразование (7) более удобно и универсально для устранения экспоненциальных особенностей функции $u(x, \varepsilon)$ до порядка n , так как константа a в (7) не зависит от $a(0)$, поэтому преобразование с произвольной фиксированной константой $a \geq m > 0$ годится для любых значений $a(0)$. Кроме того, преобразование (7) в равной степени пригодно также для устранения степенных сингулярностей.

3. Результаты численных исследований

3.1. Задача 1. Экспоненциальный погранслои

Рассмотрим тест с экспоненциальным слоем масштаба $k = 1$ в окрестности левой границы $x = 0$, который реализуется при всюду отрицательном $a(x)$, отделенном от нуля константой (см. [1, 2]). Тестовая краевая задача имеет вид

$$-\varepsilon u'' - u' + 2x + 1 = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Данная задача имеет точное решение

$$u(x, \varepsilon) = \frac{2(\varepsilon - 1)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)} (1 - \exp(-x/\varepsilon)) + x(x + 1 - 2\varepsilon).$$

Разностная сетка для этого примера определяется с помощью функции (7) по формуле $x_i = x_b(ih, \varepsilon, a, 1, l, n, \xi_0)$, а его параметры имеют значения: $a = 2$, $\xi_0 = 1/2$.

На рисунке 1 приведены результаты расчетов задачи 1 на равномерной и адаптивной сетках с равным числом шагов $N = 40$ по схемам первого (слева) и третьего (справа) порядков точности.

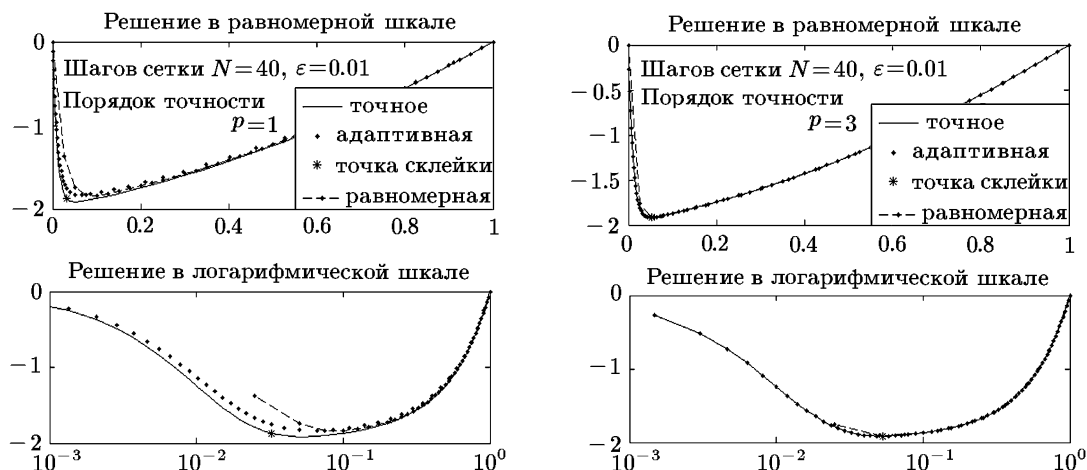


Рис. 1. Сравнение результатов расчетов при умеренной вязкости на адаптивной и равномерной сетках по схеме первого (слева) и третьего (справа) порядков точности

Рисунки 2 и 3 иллюстрируют характер сходимости численных решений, полученных для погранслоя с вязкостью $\varepsilon = 1.0e-05$ по трем различным схемам при детализации адаптивной сетки. При расчетах как данной задачи, так и всех последующих, довольно заметно сглаживание выпуклостей при использовании схемы первого порядка, а также проявляется осциллирующий характер расчетов по схеме второго порядка точности. Впрочем, эти эффекты были вполне ожидаемы, поскольку схема первого порядка обладает дополнительной аппроксимационной вязкостью, а в схеме второго порядка аппроксимации главный член погрешности представлен производной нечетного порядка, не вызывающей сглаживающего воздействия на решение.

В верхней части рис. 3 для сравнения приведены расчеты на последовательности сгущающихся равномерных сеток, из которых совершенно ясно, что до сих пор встречающиеся в научной литературе утверждения об успешных расчетах на равномерных сетках ламинарных течений с большими числами Рейнольдса являются сильным преувеличением.

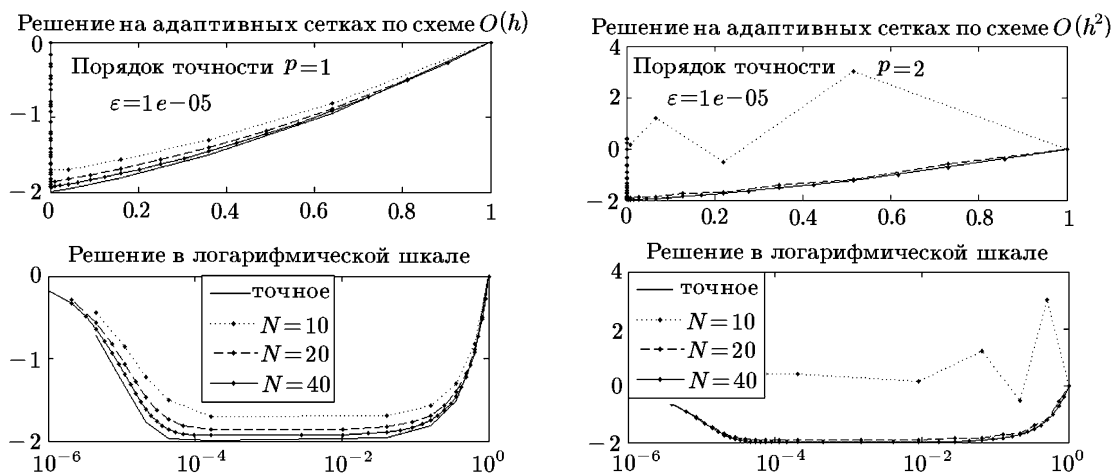


Рис. 2. Расчеты на сгущающихся адаптивных сетках по схеме первого (слева) и второго (справа) порядков точности

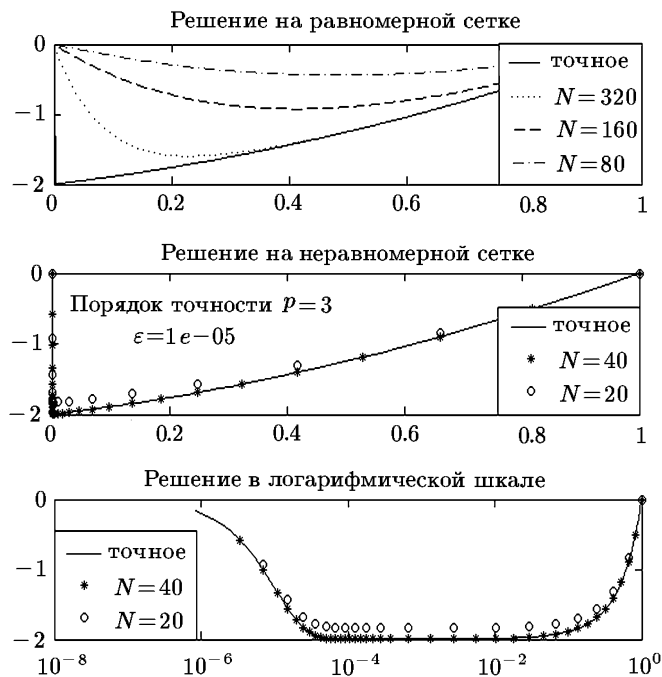


Рис. 3. Расчеты на сгущающихся равномерных и адаптивных сетках по схеме третьего порядка точности

Как показывает рис. 1, для умеренных значений вязкости схема третьего порядка точности даже на довольно грубых адаптивных сетках показывает лучшие результаты, чем схемы первого и второго порядков точности. Однако при малых значениях ε ситуация иная: на грубых сетках монотонная схема первого порядка точности, а также схема второго порядка точности (если осцилляции невелики), имеют лучшую точность. Но при дальнейшей детализации сетки расчеты по схеме третьего порядка становятся более точными. Это объясняется тем, что в главном члене погрешности порядок производной выше у схем более высокого порядка точности, а локальные значения производных высших порядков в погранслое могут быть существенно большими по масштабу, чем значения производных низших порядков, и такое различие компенсируется только детализацией

сетки за счет более высокого показателя степени в главном члене погрешности $O(h^p)$ схем высоких порядков. Именно это происходит на практике в наших тестах.

В таблицах 1 и 2 сравниваются расчеты по трем схемам на последовательности сеток при малой ($\varepsilon = 1e-05$) и очень малой ($\varepsilon = 1e-09$) вязкости соответственно. В первой колонке приведено число шагов, затем две колонки содержат апостериорные оценки C -нормы ошибки δ_1 и порядка точности p_1 , вычисленные по двум последовательным расчетам по схеме первого порядка аппроксимации. Следующие две пары колонок имеют тот же смысл, но в отношении схем второго и третьего порядков аппроксимации соответственно. При очень малой вязкости, как видно из последней колонки табл. 2, нет монотонности в сходимости оценки порядка по компактным схемам, хотя по оценке нормы ошибки результаты соответствуют порядкам.

Таблица 1. Результаты численного решения задачи 1 по схемам $O(h^p)$ ($p = 1, 2, 3$) на сгущающихся адаптивных сетках. Параметр вязкости $\varepsilon = 1e-05$

N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_3	p_3
20	$2.96e-01$	—	$1.60e-01$	—	$1.64e-01$	—
40	$1.54e-01$	0.94	$7.54e-03$	4.41	$1.62e-04$	9.98
80	$7.83e-02$	0.98	$1.93e-03$	1.97	$7.66e-06$	4.41
160	$3.95e-02$	0.98	$4.83e-04$	2.00	$4.76e-07$	4.00
320	$1.98e-02$	0.99	$1.21e-04$	2.00	$2.97e-08$	4.00

Таблица 2. Результаты численного решения задачи 1 по схемам $O(h^p)$ ($p = 1, 2, 3$) на сгущающихся адаптивных сетках. Параметр вязкости $\varepsilon = 1e-09$

N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_3	p_3
20	$3.04e-01$	—	$3.73e+00$	—	$2.00e+00$	—
40	$1.58e-01$	0.95	$4.33e-01$	3.11	$8.73e-01$	1.20
80	$8.01e-02$	0.98	$2.11e-03$	7.68	$7.48e-05$	13.51
160	$4.04e-02$	0.99	$5.61e-04$	1.91	$7.91e-07$	6.56
320	$2.03e-02$	0.99	$1.40e-04$	2.00	$4.33e-08$	4.19

Высказанное выше суждение о зависимости качества расчетов от порядка точности при малой вязкости наглядно демонстрирует предпоследняя колонка табл. 2. Из нее видно, что при $N = 20$ и $N = 40$ точность расчетов по схеме третьего порядка аппроксимации ниже точности, присущей менее точным схемам, однако при $N = 80$ происходит резкое улучшение точности и достигается преимущество высокоточной схемы на две-три значащие цифры, которое еще более утверждается при дальнейшей детализации сетки.

Заметим, что если погранслои расположен не на левой, а на правой границе (реализуется при отделенном от нуля положительном $a(x)$), то в качестве отображения, генерирующего сетку, можно взять функцию

$$y(\xi, \varepsilon, a, k, l, n, \xi_0) = 1 - x_b(1 - \xi, \varepsilon, a, k, l, n, \xi_0). \quad (10)$$

3.2. Задача 2. Два экспоненциальных погранслоя

Рассмотрим случай, когда на концах отрезка $(0, 1)$ расположены слои одинакового масштаба $k = 1$. Такая конфигурация реализуется при $a(0) < 0$, $a(1) > 0$ и $a'(x_0) \geq 0$, если $a(x_0) = 0$. Например, это имеет место при возрастающей функции $a(x)$, меняющей знак внутри отрезка $(0, 1)$. Для расчета была взята следующая задача:

$$-\varepsilon u'' + \left(x - \frac{1}{2}\right) u' + u + \sin(x) = 0, \quad u(0) = \frac{1}{2}, \quad u(1) = 0.$$

Ввиду наличия двух пограничных слоев в данной задаче необходимо сгущать сетку на обоих концах отрезка. Это можно осуществить как суперпозицией левостороннего и правостороннего преобразований (7) и (10), так и отображением, склеенным из двух отображений, построенных на основе базовых. Последнее имеет вид

$$z(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \bar{y}(\eta)), \quad \eta = 2\xi - 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

где

$$\bar{y}(\eta) = \begin{cases} -y(-\eta, \dots), & -1 \leq \eta \leq 0, \\ y(\eta, \dots), & 0 \leq \eta \leq 1, \end{cases}$$

а y — отображение (10). В нашем примере параметры отображения: $a = 2$, $\xi_0 = 0.5 - 0.05(p - 1)$, где p — порядок точности схемы. Зависимость координаты точки склейки ξ_0 от порядка точности p позволяет для различных схем по-разному корректировать долю числа узлов адаптивной сетки, попадающих в зону погранслоя.

На рис. 4 слева сверху представлены результаты расчета задачи 2 по различным схемам на сетке с $N = 40$ шагами при $\varepsilon = 0.01$. Результаты хорошо согласуются между собой, заметно некоторое размазывание решения монотонной схемой первого порядка точности. При уменьшении вязкости на два порядка, как видно из правого верхнего рисунка на рис. 4, для адекватного приближения решения по схемам второго-третьего порядков точности числа шагов $N = 40$ недостаточно. При дальнейшей детализации сетки до $N = 80$ все три схемы дают визуально одинаково приемлемые результаты (рис. 4, слева внизу), однако из фрагмента в растянутом по x масштабе (рис. 4, справа внизу) видно, что результаты ранжируются по точности в полном соответствии с порядком аппроксимации схем.

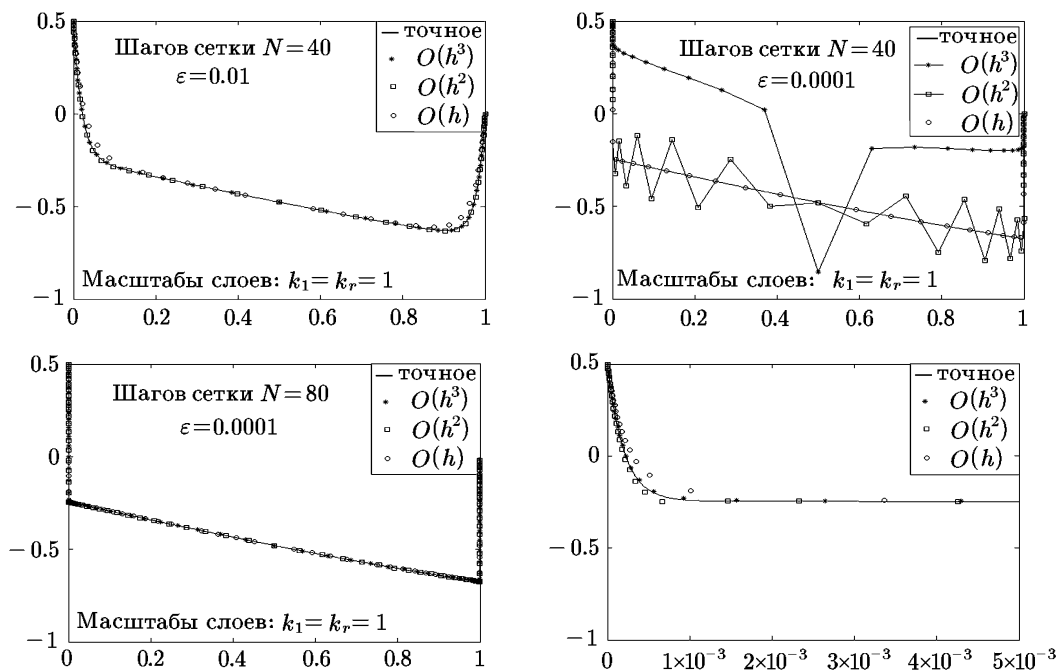


Рис. 4. Решение задачи 2 на сетке с $N = 40$ при $\varepsilon = 1e-02$ (слева сверху) и при $\varepsilon = 1e-04$ (справа сверху), на сетке с $N = 80$ при $\varepsilon = 1e-04$ (слева внизу); справа внизу фрагмент вблизи $x = 0$

Более подробное представление о результатах расчета задачи 2 на адаптивных сетках можно составить по приведенным в табл. 3 данным для двух значений малого параметра вязкости.

Таблица 3. Результаты расчета задачи 2 по схемам 1–3 порядков точности

N	$\varepsilon = 1e-04$			$\varepsilon = 1e-06$		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
20	$9.87e-04$	$2.24e-03$	$1.40e-02$	$2.00e-03$	$7.07e-04$	$7.03e-03$
40	$2.87e-03$	$2.03e-03$	$8.06e-03$	$8.61e-04$	$3.62e-04$	$5.61e-03$
80	$3.09e-03$	$2.46e-03$	$2.15e-03$	$8.72e-04$	$3.33e-04$	$1.07e-03$
160	$1.88e-03$	$1.54e-03$	$2.87e-04$	$5.58e-04$	$7.83e-05$	$1.55e-04$
320	$6.00e-04$	$4.70e-04$	$1.99e-05$	$3.21e-04$	$2.30e-05$	$1.36e-05$
640	$1.97e-04$	$1.27e-04$	$1.29e-06$	$1.75e-04$	$6.53e-06$	$9.06e-07$
1280	$6.73e-05$	$3.24e-05$	$8.15e-08$	$9.13e-05$	$1.65e-06$	$7.02e-08$

3.3. Задача 3. Степенной слой

Для построения сеток для задач со степенными пограничными слоями можно использовать базовое преобразование (7), однако параметр a в (7) уже не будет произвольной константой, как это было в задаче с экспоненциальным погранслоем.

Пусть в нашем уравнении $F_u(x, u) \geq c > 0$, $a(0) = 0$, $a'(0) > 0$, $a(1) < 0$ и $a'(x_0) \geq 0$ для каждого x_0 , для которого $a(x_0) = 0$, $0 < x_0 < 1$. В этом случае производные решения, согласно [1, 2], оцениваются следующей формулой:

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M \left[1 + \varepsilon^{b/2} (\varepsilon^{1/2} + x)^{-b-p} \right], \quad p \leq n, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11)$$

где $0 < m \leq b \leq c/a'(0)$, т.е. решение имеет единственную степенной погранслоем масштаба $1/2$ возле $x_0 = 0$. Поэтому для построения сетки, сгущающейся в слое, можно использовать преобразование $x_b(\xi, \varepsilon, a, 1/2, \dots)$ из (7), в котором $0 < m \leq a \leq b/n^2$.

В качестве теста рассматривается следующая задача:

$$-\varepsilon u'' - 8x(x - 1/2)^3 u' + 16u - \exp(x) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.2.$$

Для этого примера $c = 16$, $a'(0) = 1$, поэтому можно положить

$$l = 2, \quad b = 16, \quad \xi_0 = 1/2, \quad a = 16/n^2, \quad \beta = 16/(n(16 + n)).$$

На рис. 5 приведены расчеты степенного слоя (задача 3) при $\varepsilon = 1e-07$ на сетках с $N = 40$ шагами. Слева графики в равномерной шкале, справа — в логарифмической. На верхних рисунках приведены расчеты на различных сетках, генерируемых для разных схем отдельно. На левом верхнем рисунке заметна локальная ошибка схемы третьего порядка точности вне погранслоя, в приграничном узле вблизи правой границы $x = 1$. Очевидно, это происходит из-за крупного локального значения шага сетки. Иначе говоря, преобразование, генерирующее сетку для схемы $O(h^3)$, оставляет вне слоя более разреженную сетку, чем в случае других схем, что хорошо видно по маркерам графиков. Специально проведенный дополнительный расчет по всем схемам на общей сетке, генерируемой для схемы первого порядка, показал, что указанная выше ошибка исчезает, и реальная точность методов в этом случае ранжирована в соответствии с порядком точности. Соответствующие результаты, полученные на единой сетке, приведены на рис. 5 (внизу).

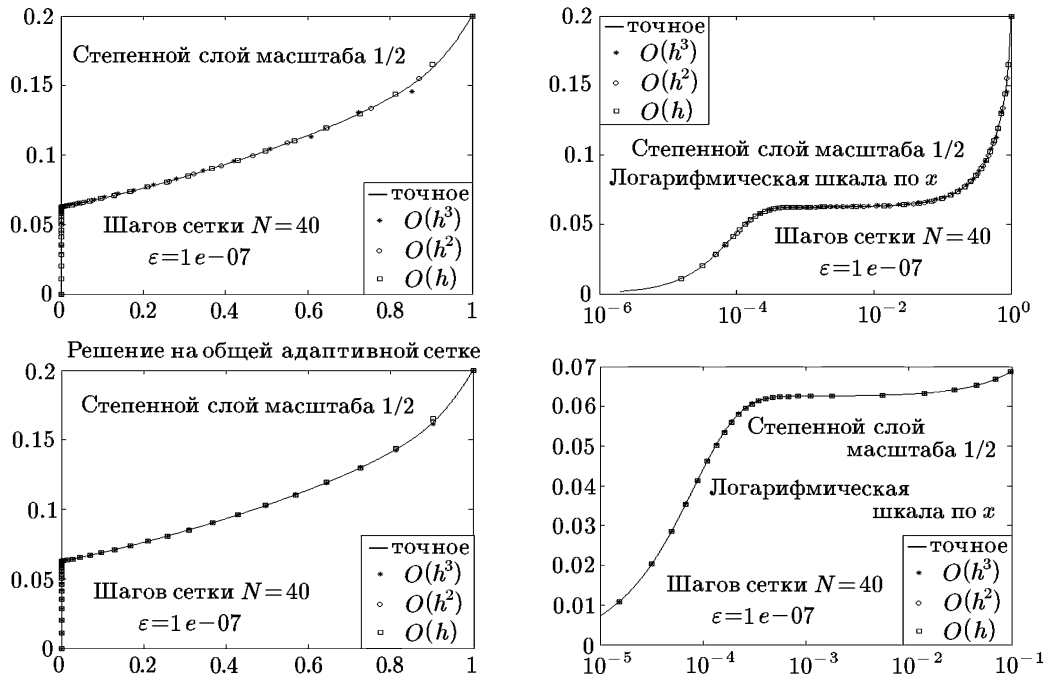


Рис. 5. Решение задачи 3 при $N = 40$ на различных (вверху) и на общей (внизу) сетках. Слева равномерная шкала по x , справа логарифмическая

Результаты расчета смешанного слоя (задача 3) на сгущающихся равномерных и адаптивных сетках приведены в табл. 4.

Таблица 4. Результаты расчета степенного слоя масштаба 1/2 при $\varepsilon = 1e-03$ по схемам 1–3 порядков точности

N	равномерная сетка			адаптивная сетка		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
20	$9.87e-04$	$2.24e-03$	$1.40e-02$	$2.00e-03$	$7.07e-04$	$7.03e-03$
40	$2.87e-03$	$2.03e-03$	$8.06e-03$	$8.61e-04$	$3.62e-04$	$5.61e-03$
80	$3.09e-03$	$2.46e-03$	$2.15e-03$	$8.72e-04$	$3.33e-04$	$17.00e-03$
160	$1.88e-03$	$1.54e-03$	$2.87e-04$	$5.58e-04$	$7.83e-05$	$1.55e-04$
320	$6.00e-04$	$4.70e-04$	$1.99e-05$	$3.21e-04$	$2.30e-05$	$1.36e-05$
640	$1.97e-04$	$1.27e-04$	$1.29e-06$	$1.75e-04$	$6.53e-06$	$9.06e-07$
1280	$6.73e-05$	$3.24e-05$	$8.15e-08$	$9.13e-05$	$1.65e-06$	$7.02e-08$

3.4. Задача 4. Внутренний слой

Пусть $F_u(x, u) \geq c > 0$, $a(x) = c_1(x_0 - x)$, $c_1 > 0$, $0 < x_0 < 1$, тогда $a(0) > 0$, $a(1) < 0$, $a'(x_0) = -c_1 < 0$. В этом случае, согласно [1, 2], производные решения оцениваются как

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M \begin{cases} \left[1 + (\varepsilon^{1/2} + |x - x_0|)^{b-p}\right], & p \leq n, \quad -pc_1 + c \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & p \leq n, \quad -pc_1 + c > 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (12)$$

где $0 < m \leq b \leq c/c_1$, т.е. решение имеет внутренний степенной слой масштаба $1/2$ возле $x = x_0$. Отметим, что при $b \geq n$ производные до порядка n равномерно ограничены по ε , поэтому рассматривается случай $0 < b < n$. Для устранения сингулярности (12) можно воспользоваться функцией, предложенной в [10]:

$$x_3(\xi, \varepsilon, a, k) = \frac{(\varepsilon^{ak} + \xi)^{1/a} - \varepsilon^k}{(\varepsilon^{ak} + 1)^{1/a} - \varepsilon^k}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (13)$$

где $k = 1/2$ и $0 < m \leq a \leq \min\left(\frac{b}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

В качестве примера рассматривается следующая задача:

$$-\varepsilon u'' + 2(0.4 - x)u' + u + \sin(x) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Для построения склеенного преобразования, генерирующего сетку, вначале определим функцию, отображающую отрезок $[-1, 1]$ в себя, в форме

$$\bar{x}_3(z, \varepsilon, a, k) = \begin{cases} -x_3(-z, \varepsilon, a, k), & -1 \leq z \leq 0, \\ x_3(z, \varepsilon, a, k), & 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Далее, введем в рассмотрение вспомогательную функцию $z(\xi) = -1 + 2\xi$, линейно отображающую $[0, 1]$ на $[-1, 1]$, и какую-нибудь монотонную функцию $\varphi_{x_0}(x)$, отображающую отрезок $[-1, 1]$ на $[0, 1]$ так, чтобы нуль отображался в x_0 . Тогда результирующее преобразование, устраняющее особенность (12), может быть задано в виде суперпозиции:

$$\bar{y}(\xi, \varepsilon, a, 1/2) = \varphi_{x_0}[\bar{x}_3(z(\xi), \varepsilon, a, 1/2)]. \quad (15)$$

Преобразование $\varphi_{x_0}(x): [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ можно определить, например, в виде функции класса C_l , гладко склеенной в нуле:

$$\varphi_{x_0}(x) = x_0 + Px + \begin{cases} (P - x_0)(-x)^l, & x \leq 0, \\ (1 - P - x_0)x^l, & x > 0, \end{cases} \quad (16)$$

где $P = Q \min\{x_0, 1 - x_0\}$, а $Q \in [0, 1]$ — произвольный параметр. В частности, при $Q = 1$ одна из двух ветвей линейна, а другая является суммой этой линейной функции и степенной функции $c|x|^l$. При иных значениях Q в линейной составляющей функции уменьшается наклон, а степенная функция прибавляется к обеим ветвям с разными знаками.

На рис. 6 вверху представлены результаты расчета внутреннего слоя на грубой равномерной сетке для умеренного ($1e-03$) и малого ($1e-07$) значений параметра вязкости, а внизу слева помещены результаты, полученные по различным схемам на адаптивных сетках. Фрагмент этого графика, помещенный справа внизу на рис. 6, свидетельствует о преимуществе компактной схемы второго порядка точности.

В табл. 5 более подробно представлены C -нормы ошибки решения для задачи 4 с внутренним слоем, полученные для нескольких значений малого параметра по различным схемам. При $\varepsilon = 1e-03$ реально регистрируемая точность расчетов находится в полном соответствии с порядком аппроксимации схем. При уменьшении вязкости до значения $\varepsilon = 1e-05$ преимущество схемы третьего порядка перед схемой $O(h)$ наблюдается на всех сетках, а преимущество перед схемой $O(h^2)$ возникает только, начиная с достаточно детальных сеток. При дальнейшем уменьшении вязкости до $\varepsilon = 1e-07$ схема второго порядка дает лучшие результаты, чем обе другие схемы.

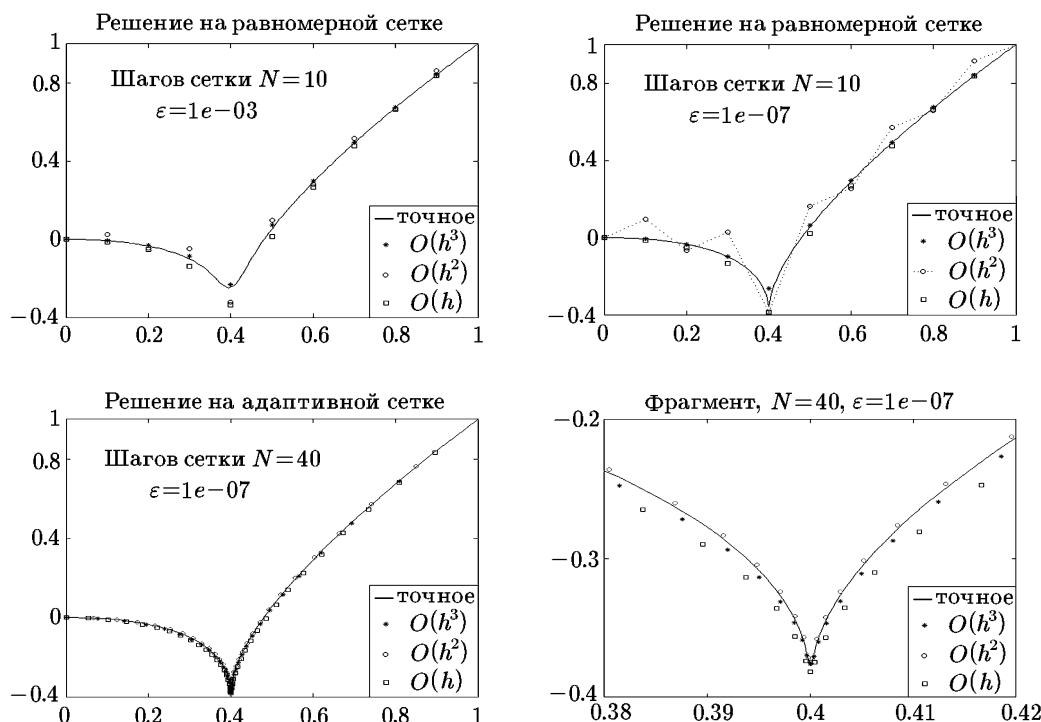


Рис. 6. Решение задачи 4 на грубой равномерной сетке для различных ε (вверху) и решения на адаптивных сетках по различным схемам (внизу)

Таблица 5. Результаты расчета внутреннего слоя при различных ε по схемам 1–3 порядков точности

N	$\varepsilon = 1e-03$			$\varepsilon = 1e-05$			$\varepsilon = 1e-07$		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
20	$2.5e-02$	$1.8e-02$	$1.3e-02$	$2.8e-02$	$2.3e-02$	$2.6e-02$	$2.9e-02$	$2.4e-02$	$4.1e-02$
40	$1.4e-02$	$6.0e-03$	$4.5e-03$	$1.6e-02$	$7.9e-03$	$1.2e-02$	$1.7e-02$	$8.2e-03$	$1.6e-02$
80	$7.8e-03$	$1.4e-03$	$6.8e-04$	$8.5e-03$	$1.9e-03$	$3.0e-03$	$9.1e-03$	$2.1e-03$	$5.7e-03$
160	$4.0e-03$	$3.5e-04$	$8.0e-05$	$4.4e-03$	$5.0e-04$	$5.8e-04$	$4.7e-03$	$6.3e-04$	$1.3e-03$
320	$2.0e-03$	$8.9e-05$	$7.5e-06$	$2.2e-03$	$1.2e-04$	$1.0e-04$	$2.3e-03$	$1.5e-04$	$2.9e-04$
640	$1.0e-03$	$2.2e-05$	$5.7e-07$	$1.1e-03$	$3.1e-05$	$1.7e-05$	$1.2e-03$	$3.8e-05$	$6.1e-05$
1280	$5.2e-04$	$5.5e-06$	$3.8e-08$	$5.6e-04$	$7.7e-06$	$2.3e-06$	$6.0e-04$	$9.5e-06$	$1.2e-05$

3.5. Задача 5. Смешанный слой

Пусть $a(0) = 0$, $a'(0) < 0$, $a(x) < 0$, $0 < x \leq 1$. В этом случае производные решения оцениваются, согласно [1, 2], следующей формулой для $0 \leq x \leq 1$:

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M \begin{cases} 1 + \varepsilon(\varepsilon^{1/2} + x)^{-2-p} + (\varepsilon^{1/2} + x)^{b-p}, & p \leq n, \text{ когда } c \leq -a'(0), \\ 1 + \varepsilon^{-p/2} \exp(a'(0)(x^2)/(2\varepsilon)), & p \leq n, \text{ когда } c > -a'(0), \end{cases} \quad (17)$$

где $0 < m \leq b \leq \left| \frac{c}{a'(0)} \right|$, т.е. в случае $c > -a'(0)$ решение имеет экспоненциальный погранслой масштаба $1/2$ возле $x_0 = 0$, а при $c \leq -a'(0)$ решение имеет смешанный пограничный слой (комбинация двух степенных слоев) масштаба $1/2$ в окрестности $x_0 = 0$.

Соответствующая тестовая задача имеет вид

$$-\varepsilon u'' - xu' + \frac{1}{2}u = \sin(x), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Преобразование, генерирующее сетку, определяется формулой

$$z_4(\xi, \varepsilon, \dots) = \frac{(\varepsilon^{1/4} + x_b(\xi, \varepsilon, a, 1/4, \dots))^2 - \varepsilon^{1/2}}{(\varepsilon^{1/4} + 1)^2 - \varepsilon^{1/2}}, \quad (18)$$

являющуюся суперпозицией преобразований (7), (13).

На рис. 7 представлены расчеты смешанного слоя при вязкости $\varepsilon = 1e-07$ на трех последовательно сгущающихся сетках. Справа внизу приведен фрагмент расчета, полученный на сетке с $N = 80$. Из рис. 7 видно, что на грубой сетке компактная схема $O(h^2)$ дает лучшие результаты, а на более детальной сетке решение тем точнее, чем выше порядок точности.

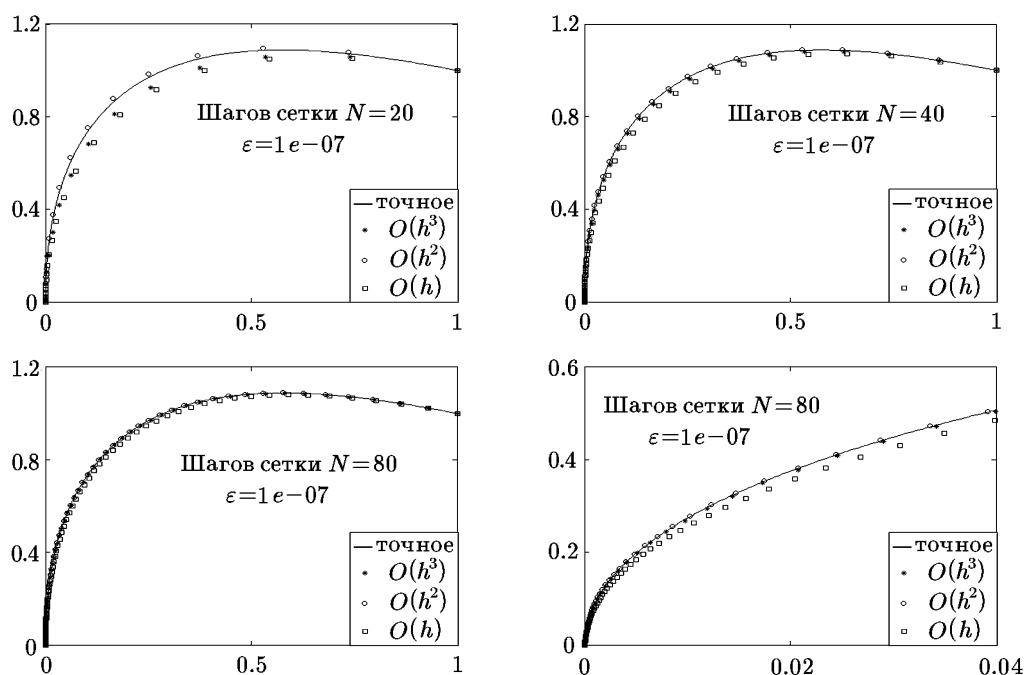


Рис. 7. Решение задачи 5 при $\varepsilon = 1e-07$ на сетке с числом шагов $N = 20$ (слева сверху), $N = 40$ (справа сверху) и $N = 80$ (слева снизу). Справа внизу — фрагмент решения при $N = 80$

В табл. 6 приведены результаты расчета смешанного погранслоя при различных значениях вязкости. Из таблицы видно преимущество схемы третьего порядка точности на всех сетках для умеренной вязкости $\varepsilon = 1e-03$ и преимущество при $N \geq 160$ для меньших значений вязкости $\varepsilon = 1e-05$. Для очень малых значений вязкости $\varepsilon = 1e-07$ преимущество схемы третьего порядка точности возникает лишь на самой детальной ($N = 2560$) из приведенных сеток.

Таблица 6. Результаты расчета смешанного слоя масштаба $1/2$ по схемам 1–3 порядков точности при различных значениях вязкости

N	$\varepsilon = 1e-03$			$\varepsilon = 1e-05$			$\varepsilon = 1e-07$		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
40	$2.8e-02$	$8.2e-03$	$2.7e-03$	$3.5e-02$	$1.1e-02$	$2.3e-02$	$4.2e-02$	$1.6e-02$	$4.4e-02$
80	$1.4e-02$	$2.0e-03$	$2.5e-04$	$1.8e-02$	$3.0e-03$	$4.2e-03$	$2.2e-02$	$4.4e-03$	$1.1e-02$
160	$7.5e-03$	$5.2e-04$	$1.8e-05$	$9.1e-03$	$7.7e-04$	$7.2e-04$	$1.1e-02$	$1.1e-03$	$2.6e-03$
320	$3.8e-03$	$1.3e-04$	$1.1e-06$	$4.6e-03$	$1.9e-04$	$1.0e-04$	$5.7e-03$	$2.8e-04$	$5.4e-04$
640	$1.9e-03$	$3.2e-05$	$7.2e-08$	$2.3e-03$	$4.8e-05$	$1.1e-05$	$2.8e-03$	$7.0e-05$	$1.0e-04$
1280	$9.6e-04$	$8.1e-06$	$4.4e-09$	$1.1e-03$	$1.2e-05$	$1.0e-06$	$1.4e-03$	$1.7e-05$	$1.8e-05$
2560	$4.8e-04$	$2.0e-06$	$2.8e-10$	$5.8e-04$	$3.0e-06$	$7.1e-08$	$7.2e-04$	$4.4e-06$	$2.8e-06$

Заключение

Численные исследования свидетельствуют об эффективности симбиоза компактных схем и специальных адаптивных сеток, явно задаваемых на основе априорных оценок производных решения. В большинстве расчетов реальная точность тем выше, чем выше порядок точности схем, аномалии наблюдаются лишь при весьма грубых сетках. Это объясняется тем, что используемые оценки производных носят асимптотический характер при $h \rightarrow 0$, и рекомендации по распределению узлов сетки тем более точны, чем детальнее сетка, а также тем, что производные высших порядков в слоях могут иметь большие значения, чем производные низких порядков.

Расчеты различных типов слоев показывают, что хотя монотонная схема первого порядка работает исключительно надежно на любых сетках и при любых значениях ε , однако при недостаточной детализации сетки, когда аппроксимационная вязкость превышает физическую, результаты при фиксированной сетке перестают зависеть от уменьшающегося значения малого параметра. Это свойство вполне согласуется с опытом расчета течений вязкой несжимаемой жидкости с большими числами Рейнольдса: на фиксированной сетке схема первого порядка работает при сколь угодно малой вязкости, выдавая однако ошибочные результаты. В отличие от нее схема второго порядка при неприемлемо малой вязкости честно перестает работать ввиду переполнения, а у схемы третьего порядка порог переполнения тоже наступает, но он выше, чем у схемы второго порядка.

Литература

1. Лисейкин В.Д. Оценки производных решения дифференциальных уравнений с пограничными и внутренними слоями // Сибирский математический журнал. — 1992. — Т. 33, № 6. — С. 106–117.
2. Liseikin V.D. Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems. — Utrecht: VSP, 2001.
3. Liseikin V.D. Grid Generation Methods. Third ed. — Berlin: Springer, 2017.
4. Паасонен В.И. Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 56–64.
5. Паасонен В.И. Схема третьего порядка аппроксимации на неравномерной сетке для уравнений Навье–Стокса // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 5, № 5. — С. 78–85.
6. Глуховский А.С., Паасонен В.И. Компактные разностные схемы для уравнений Навье–Стокса на неравномерных сетках // Марчуковские научные чтения 2017. Тр. Междунар.

- конф. “Вычислительная и прикладная математика 2017”, 25–30 июня 2017 г. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2017. — С. 211–217.
7. **Лисейкин В.Д.** О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1986. — Т. 26, № 12. — С. 1813–1820.
 8. **Бахвалов Н.С.** Об оптимизации методов численного решения краевых задач с пограничными слоями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 842–859.
 9. **Шишкин Г.И.** Разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с разрывным начальным условием // ДАН СССР. — 1988. — Т. 37. — С. 792–796.
 10. **Лисейкин В.Д.** О численном решении сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1984. — Т. 24, № 12. — С. 1812–1818.

Поступила в редакцию 27 апреля 2018 г.

После доработки 15 июня 2018 г.

Принята к публикации 5 октября 2018 г.

Литература в транслитерации

1. **Liseikin V.D.** Ocenki proizvodnykh resheniya differencial'nykh uravneniy s pogranychymi i vnutrennimi sloyami // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. — 1992. — Т. 33, № 6. — С. 106–117.
2. **Liseikin V.D.** Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems. — Utrecht: VSP, 2001.
3. **Liseikin V.D.** Grid Generation Methods. Third ed. — Berlin: Springer, 2017.
4. **Paasonen V.I.** Kompaktnye skhemy tret'ego poryadka tochnosti na neravnomernykh adaptivnykh setkakh // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 56–64.
5. **Paasonen V.I.** Skhema tret'ego poryadka approksimacii na neravnomernoy setke dlya uravneniy Nav'e-Stoksa // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2000. — Т. 5, № 5. — С. 78–85.
6. **Glukhovskiy A.S., Paasonen V.I.** Kompaktnye raznostnye skhemy dlya uravneniy Nav'e-Stoksa na neravnomernykh setkakh // Marchukovskie nauchnye chteniya 2017. Tr. Mezhdunar. konf. “Vychislitel'naya i prikladnaya matematika 2017”, 25–30 iyunya 2017 g. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2017. — С. 211–217.
7. **Liseikin V.D.** O chislennom reshenii uravneniy so stepennym pogranychym sloem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1986. — Т. 26, № 12. — С. 1813–1820.
8. **Bakhvalov N.S.** Ob optimizacii metodov chislennogo resheniya kraevykh zadach s pogranychymi sloyami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 842–859.
9. **Shishkin G.I.** Raznostnaya skhema dlya singulyarno vozmushchennogo uravneniya parabolicheskogo tipa s razryvnym nachal'nyim usloviem // DAN SSSR. — 1988. — Т. 37. — С. 792–796.
10. **Liseikin V.D.** O chislennom reshenii singulyarno vozmushchennykh uravneniy s tochkami povorota // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1984. — Т. 24, № 12. — С. 1812–1818.