УДК 532.24 + 532.5.013.4

Л. Г. Бадратинова

О НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЯХ НЕВЕСОМОГО ВЯЗКОГО ЖИДКОГО СЛОЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Слой вязкой капиллярной невесомой жидкости, расположенный на внутренней боковой поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндрического сосуда, может находиться в состоянии равновесия относительно цилиндра, вращаясь вместе с ним как твердое тело. Если угол смачивания на торцах цилиндрического сосуда равен $\pi/2$, то одним из возможных является состояние равновесия слоя со свободной внутренней поверхностью, имеющей форму кругового цилиндра. Помимо такого тривиального состояния равновесия возможны равновесные конфигурации, при которых свободная поверхность слоя осесимметрична относительно оси вращения и периодична в направлении этой оси. Исследование таких нетривиальных осесимметричных состояний относительного равновесия и анализ их устойчивости — цель данной работы.

В [1] рассматривалась задача о ветвлении состояния твердотельного вращения кругового цилиндрического слоя со свободной внутренней и твердой внешней поверхностями. Были найдены критические числа Вебера, при которых ответвляются состояния твердотельного вращения с осесимметричной периодической формой свободной поверхности.

В данной работе изучены все равновесные конфигурации вращающегося невесомого слоя с осесимметричной периодической формой свободной границы. При этом полученные в [1] условия ветвления подтверждены (см. формулу (2.7)). Кроме того, показано существование семейства нетривиальных осесимметричных состояний, не ответвляющихся от кругового цилиндрического.

Задача об осесимметричных равновесных конфигурациях двухслойной жидкости, заполняющей вращающийся сосуд в форме цилиндрического слоя, изучалась аналитически и экспериментально в [2]. Случай, когда плотность жидкости, расположенной у внешней границы сосуда, меньше плотности внутренней жидкости, был по сути исследован в [3], где изучены нетривиальные осесимметричные формы равновесия вращающегося жидкого столба. В частности, в [3] приведены критические значения параметров, при которых предсказывалось их ветвление. Ответвляющиеся трехмерные равновесные конфигурации обнаружены в экспериментах, описанных в [2]. Изучаемая в данной работе ситуация является другим частным случаем двухслойной жидкости, в котором плотность внутренней жидкости равна нулю или меньше плотности внешней жидкости. В отличие от [2] здесь рассматривается случай ограниченного вдоль оси вращения цилиндрического сосуда.

В [2, 4] обосновывался принцип, согласно которому устойчивые конфигурации двухслойной жидкости ассоциируются с твердотельным движением, минимизирующим некоторый поверхностный потенциал на множестве допустимых границ раздела. Сформулированный в [2] принцип не был достаточно строго обоснован (следующее за формулой (2.39) этой работы утверждение неверно). Введенный в [2] потенциал является «потенциальной энергией системы во вращающейся системе координат». Аналогичный потенциал вводился ранее (см. [5], с. 125) для исследования устойчивости равновесия вращающейся жидкости. Обоснование принципа минимума потенциальной энергии для задач гидродинамики начато работой [6], где приведено определение устойчивости состояния равновесия жидкости со свободной границей, при котором этот принцип оказывается справедливым. Для капиллярной вязкой жидкости аналогичное определение устойчивости дали авторы [7, 8]. Ими была доказана справедливость теоремы Лагранжа: равновесное состояние вязкой жидкости, для которого вторая вариация потенциальной энергии положительна, устойчиво. Для линейной задачи устойчивости равновесия капиллярной вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд, в [9] доказана справедливость обратной теоремы Лагранжа: если вторая вариация потенциальной энергии может принимать отрицательные значения, то равновесие неустойчиво.

В настоящей работе исследование устойчивости проводится на основе аналога теоремы Лагранжа и ее обращения. При изучении устойчивости в [2] минимум потенциала отыскивался на однопараметрическом семействе равновесных осесимметричных поверхностей, период которых зависит от характеризующего параметра. Такое семейство не является допустимым в ограниченном цилиндрическом сосуде, длина которого должна быть кратна длине волны возмущения. Поэтому полученные в [2] результаты о неустойчивости всех нетривиальных осесимметричных равновесных конфигураций в бесконечном цилиндрическом слое не могут быть перенесены на рассматриваемую в данной работе ситуацию.

Согласно [2], в бесконечном сосуде состояние равновесия с цилиндрической границей раздела всегда неустойчиво, если тяжелая жидкость находится внутри (вращающийся жидкий столб). В случае, когда тяжелая жидкость снаружи (бесконечный круговой цилиндрический слой), оно устойчиво только при числах Вебера больше четырех. Первое утверждение согласуется с результатом [10], последнее противоречит известному результату об устойчивости бесконечного слоя относительно произвольных возмущений при числах Вебера больше единицы (следующему из результатов [10], [8] и приведенному в [5] на с. 165). Заметим, что в экспериментах [2] наблюдаемые равновесные конфигурации при числах Вебера меньше четырех не имели круговой цилиндрической формы. Возможно, что из двух устойчивых состояний в эксперименте реализуется то, которое обладает меньшей потенциальной энергией.

Поведение двухслойной жидкости в поле тяжести во вращающемся горизонтальном цилиндре изучалось экспериментально в [11]. Рассматривались двухслойные системы, у которых плотность внутренней жидкости меньше плотности внешней. Эксперименты проводились и для жидкости, частично заполняющей сосуд и расположенной на его внутренней боковой поверхности. Как показано в [2] и в данной работе, для невесомого жидкого слоя все равновесные конфигурации с нецилиндрической формой свободной поверхности, не пересекающей ось вращения, неустойчивы. Для жидкого слоя в поле тяжести ситуация оказывается иной. Экспериментальные результаты [11] указывают на устойчивость вторичных периодических (трехмерных) течений.

1. Уравнения для равновесных форм. Круговой цилиндрический сосуд радиуса R и длины L вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω. Сосуд частично заполнен невесомой вязкой жидкостью, объем которой равен $\pi\left(R^2 - R_0^2\right)L$. Угол смачивания $\pi/2$. Одним из возможных состояний жидкости является твердотельное вращение с угловой скоростью Ω и цилиндрической свободной поверхностью, удаленной на расстояние R_0 от оси вращения.

Для жидкости, находящейся в состоянии равновесия относительно вращающегося цилиндра, поставим задачу о нахождении всех возможных осесимметричных форм свободной поверхности, не пересекающих боковой поверхности цилиндра и однозначно на нее проектирующихся. Такие формы находятся из аналога уравнения Лапласа, учитывающего в балансе сил на свободной равновесной поверхности центробежные силы. Введем безразмерные переменные, выбрав за масштабы длины, скорости и давления величины R_0, ΩR_0, $\rho\Omega^2R_0^2$ (ρ — плотность жидкости). Пусть η, α, z — вращающаяся с угловой скоростью Ω цилиндрическая система координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра. Торцы цилиндрического сосуда расположены в плоскостях $z=0$, $z=l=L/R_0$. Рассмотрим сначала равновесные осесимметричные формы, для которых при движении вдоль свободной поверхности в плоскости $\alpha=\text{const}$ от торца $z=0$ к торцу $z=l$ расстояние от оси вращения монотонно возрастает. Уравнение таких форм представимо в виде $z=Z(\eta)$, где функция $Z(\eta)$ удовлетворяет уравнению равновесия [5]

$$H=-\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\eta Z'}{(1+Z'^2)^{1/2}}\right)'=\frac{\beta}{2}\eta^2-C. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже штрих обозначает дифференцирование по η; $\beta=\rho\Omega^2R_0^3/\sigma$ — число Вебера (σ — коэффициент поверхностного натяжения); C — неизвестная постоянная; H — средняя кривизна поверхности $Z(\eta)$. Знак перед кривизной выбран с учетом сделанного предположения $Z'(\eta)>0$.

Решение дифференциального уравнения (1.1) должно удовлетворять краевым условиям

$$Z'(\eta_0)=Z'(\eta_1)=\infty \tag{1.2}$$

и интегральным соотношениям

$$\int_{\eta_0}^{\eta_1}\eta^2Z'd\eta=l,\quad \int_{\eta_0}^{\eta_1}Z'\,d\eta=l, \tag{1.3}$$

выражающим соответственно то, что угол смачивания равен $\pi/2$, объем жидкости равен $\pi\left(R^2-R_0^2\right)L$, а длина цилиндрического сосуда равна L. В (1.2), (1.3) η_0 и η_1 — находящиеся в процессе решения задачи наименьшее и наибольшее удаления равновесной поверхности от оси вращения: $\eta_0=\eta|_{z=0}$, $\eta_1=\eta|_{z=l}$. Для каждого решения задачи (1.1) — (1.3) условие непересечения с боковой поверхностью цилиндра накладывает ограничение на радиус R:

$$R>\eta_1R_0. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.1) после интегрирования дает

$$-\frac{\eta Z'}{(1+Z'^2)^{1/2}}=\frac{\beta}{8}\eta^4-\frac{C}{2}\eta^2-C_1 \tag{1.5}$$

(C_1 — неизвестная постоянная).

Формы относительного равновесия, для которых при движении вдоль дуги меридионального сечения от нижнего торца к верхнему расстояние от оси вращения монотонно убывает, определяются уравнением $z=l-Z(\eta)$. Форму относительного равновесия назовем простой, если свободная поверхность жидкости однозначно проектируется на плоскости торцов сосуда. Уравнения (1.2) — (1.5) определяют двухпараметрическое (зависящее от параметров β, l) семейство простых равновесных осесимметричных форм с точностью до преобразования $\hat{z}=l-z$.

Задача (1.2) — (1.5) инвариантна относительно зеркального отражения в плоскости $z=l$. Поэтому можно сказать также, что уравнениями (1.2) — (1.5) определяется двухпараметрическое семейство периодических осесимметричных форм относительного равновесия. Обезразмеренная длина сосуда должна быть кратна «полупериоду» l при угле смачивания $\pi/2$. Если при заданных β и l она не кратна l, то периодическое решение будет решением задачи о равновесии в сосуде при другом значении угла смачивания.

2. Представление решения в квадратурах. Изучим двухпараметрическое семейство простых равновесных форм. Выберем в качестве независимых параметров

$$\theta=\eta_0/\eta_1,\quad b=-\frac{\beta(1+\theta)\eta_1^3}{8}. \tag{2.1}$$

Осуществляя в (1.5) предельные переходы при $\eta \to \eta_0$, $\eta \to \eta_1$ и учитывая условия (1.2), получим выражения констант C и C_1 через параметры θ, b, η_1:

$$C = 2[1 - b(1+\theta^2)]/[\eta_1(1+\theta)], \quad C_1 = \theta\eta_1(1+b\theta)/(1+\theta). \tag{2.2}$$

Перейдем в задаче (1.2) — (1.5) к параметрам b, θ и новым переменным $x = z/\eta_1$, $r = \eta/\eta_1$. Из (1.5) после интегрирования имеем

$$x = X(r, \theta, b) = \int_\theta^r \frac{u(\tau, \theta, b)\, d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}, \tag{2.3}$$

где через u обозначена функция

$$u(r, \theta, b) = \frac{r^2 + \theta - b(1-r^2)(r^2-\theta^2)}{\sqrt{(1+r)(r+\theta)[1+2b(r^2+\theta) - b^2(1-r^2)(r^2-\theta^2)]}}. \tag{2.4}$$

Из условий (1.3) находится зависимость η_1, l от θ, b:

$$\eta_1 = \left[\int_\theta^1 \frac{u(\tau, \theta, b)\, d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}\right]^{1/2} \left[\int_\theta^1 \frac{\tau^2 u(\tau, \theta, b)\, d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}\right]^{-1/2}; \tag{2.5}$$

$$l = F(\theta, b) = \left[\int_\theta^1 \frac{u(\tau, \theta, b)\, d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}\right]^{3/2} \left[\int_\theta^1 \frac{\tau^2 u(\tau, \theta, b)\, d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\theta)}}\right]^{-1/2}. \tag{2.6}$$

Для каждой равновесной формы значение θ принадлежит интервалу $(0, 1)$. Если $\theta = 0$, то краевое условие на торце $z = 0$ нарушается $\left(\lim\limits_{r=\theta\to 0} \frac{dX}{dr} = 0\right)$. Равновесная поверхность касается поверхности этого торца. В частном случае ($b = \theta = 0$) она имеет форму полусферы радиуса $l = \sqrt{1{,}5}$. При $\theta \to 1$ равновесные фигуры стремятся к круговой цилиндрической поверхности. Перейдем в выражениях (2.5), (2.6) к новой переменной интегрирования t по формуле $\tau = (1+\theta)/2 + (1-\theta)t/2$ и положим в них $\theta = \theta^* = 1$. Получим $\eta_1 = \eta_1^* = 1$, $l = \pi/\sqrt{1+4b}$. Отсюда с учетом (2.1) имеем формулу

$$\beta^* = -4b^* = 1 - (\pi/l)^2, \tag{2.7}$$

совпадающую с условием ветвления состояния равновесия с круговой цилиндрической поверхностью, найденным в [1].

По физическому смыслу параметр $\beta > 0$. Из (2.7) можно сделать следующий вывод. Простые осесимметричные формы относительного равновесия, ответвляющиеся от круговой цилиндрической, существуют только при $l > \pi$. На рис. 1 приведена зависимость относительной длины l от параметра θ при некоторых значениях b. Видно, что при $\sqrt{1{,}5} < l < \pi$ простые осесимметричные равновесные поверхности также существуют, но они не ответвляются от круговой цилиндрической. При фиксированном $l \in (\sqrt{1{,}5}, \pi)$ такие осесимметричные решения существуют, начиная со значения $\theta = 0$, при котором равновесная поверхность пересекает ось вращения вплоть до значения θ_0, которому соответствует $b = 0$. При $b = 0$ $\beta = 0$, т. е. цилиндрический сосуд покоится.

Можно показать, что подкоренное выражение в (2.4) положительно при всех $r \in [\theta, 1]$ только в том случае, если выполняется неравенство

$$b > -0{,}5(1+\theta)^{-1}. \tag{2.8}$$

При $b = -0{,}5(1+\theta)^{-1}$ выражение, стоящее в (2.4) в квадратных скобках, равно $(1-r^2)(4+4\theta-r^2+\theta^2)/4(1+\theta)^2$. Поэтому подынтегральное выражение в (2.3) пропорционально $(1-\tau)^{-1}$. При $r \to 1$ интеграл (2.3) расходится, «полупериод» $l \to \infty$.

Из (2.8) следует, что минимальное значение b, при котором простые формы равновесия существуют, достигается при $\theta = 0$ и равно $-0{,}5$.

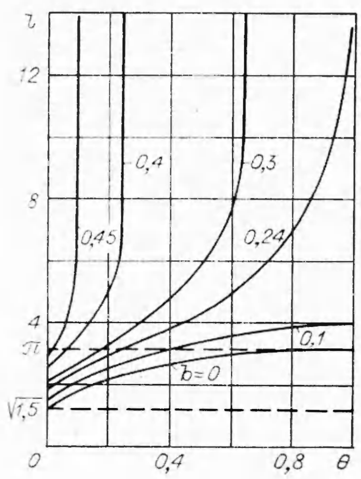

Рис. 1

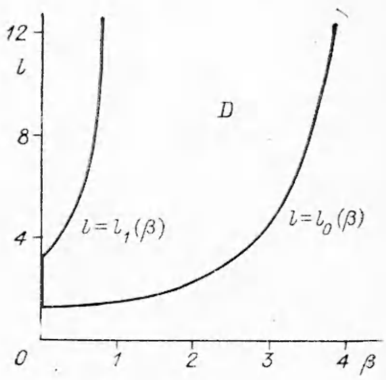

Рис. 2

Таким образом, «вырожденное» решение, для которого в состоянии относительного равновесия в жидкости образуются соприкасающиеся друг с другом газовые пузыри, существует вплоть до значения $l=\infty$. При $l<\sqrt{1{,}5}$ таких «вырожденных» решений нет, что видно из рис. 1.

На рис. 2 показана область существования D осесимметричных простых равновесных форм в пространстве исходных параметров l, β. Кривые $l_0(\beta)$ и $l=l_1(\beta)=\pi/(1-\beta)$ отвечают $\theta=0$ и 1. Кривая $l_0(\beta)$ имеет вертикальную асимптоту $\beta=4$. Область D заключена между кривыми $l_0(\beta)$, $l_1(\beta)$. Из рис. 2 видно, что нетривиальные формы существуют при $\beta\in(0,4)$.

Пусть простая осесимметричная форма характеризуется параметрами β, l, для которых точка $(\beta,\ l)\in D$. Чтобы эта форма являлась решением задачи о равновесии в цилиндре длины lR_0 и радиуса R, для нее должно выполняться неравенство (1.4). Численными расчетами показано, что (1.4) выполняется во всей области D при $R>R_*\approx 1{,}36R_0$ В следующем пункте предполагается, что радиус цилиндра R удовлетворяет неравенству (1.4), поэтому анализируется устойчивость всех форм из области D.

Докажем следующее утверждение. Не существует периодического решения задачи об относительном равновесии в цилиндрическом сосуде, для которого участок свободной поверхности, соответствующий одному полупериоду, неоднозначно проектируется на плоскость $z=\mathrm{const}$. Пусть угловая скорость Ω (или $\beta=\rho\Omega^2R_0^3/\sigma$) и степень заполнения R_0/R цилиндра заданы. Если такое решение существует, то на полупериоде можно выделить два простых участка, продолжающих друг друга, но не являющихся зеркальным отражением друг друга через ортогональную оси z плоскость. Каждый из участков есть решение задачи о простых формах равновесия при угловой скорости Ω, но, вообще говоря, при «своей степени заполнения» R_i/R и своем значении числа Вебера $\beta_i=$ $=\rho\Omega^2R_i^3/\sigma$, $i=1,\ 2$.

Каждый из участков однозначно характеризуется своим набором параметров θ_i, b_i $(\theta_i=\eta_{0i}/\eta_{1i},\ b_i=-\beta_i(1+\theta_i)\eta_{1i}^3/8)$. При переходе через точку контакта выраженные в исходных физических переменных кривизна и удаление свободной поверхности от оси вращения должны быть непрерывны. В точках контакта свободная поверхность имеет максимальное удаление от оси вращения или минимальное. В первом случае из непрерывности удаления вытекает равенство

$$\eta_{11}R_1=\eta_{12}R_2, \tag{2.9}$$

а во втором

$$\theta_1\eta_{11}R_1=\theta_2\eta_{12}R_2. \tag{2.10}$$

С учетом этих равенств из формул (1.1), (2.2) можно получить следующие условия непрерывности кривизны. Для первого случая

$$\frac{1-b_1(1-\theta_1^2)}{1-b_2(1-\theta_2^2)^2}=\frac{(1+\theta_1)}{(1+\theta_2)}, \tag{2.11}$$

а для второго

$$\frac{1-b_1(1-\theta_1^2)}{1-b_2(1-\theta_2^2)}=\frac{(1+\theta_1)\theta_2}{(1+\theta_2)\theta_1}. \tag{2.12}$$

Из определения параметров b_i, β_i, β с учетом формул (2.9), (2.10) получаем зависимости между параметрами b_i, θ_i: в первом случае

$$b_2=b_1(1+\theta_2)/(1+\theta_1), \tag{2.13}$$

во втором

$$b_2=b_1(1+\theta_2)\theta_1^3/(1+\theta_1)\theta_2^3. \tag{2.14}$$

Рассматриваемые участки свободной поверхности могут быть решениями задачи о простых формах равновесия, если одновременно выполняются неравенства (см. условие (2.8))

$$b_i>-0{,}5(1+\theta_i)^{-1},\quad i=1,\ 2. \tag{2.15}$$

Выразим из формул (2.11), (2.13) (соответственно (2.12), (2.14)) параметры b_i через θ_i и запишем для них условия (2.15). В результате в каждом случае получим систему неравенств относительно параметров θ_1, θ_2, несовместную при θ_1, $\theta_2\in[0,\ 1]$. Это доказывает справедливость утверждения.

3. Неустойчивость осесимметричных периодических равновесных конфигураций. На основе аналога теоремы Лагранжа и ее обращения вопрос об устойчивости относительного равновесия жидкости в сосуде, вращающемся с постоянной угловой скоростью, сводится [5] к выяснению знака второй вариации функционала $U=\sigma|\Gamma|+\tilde{\sigma}|\Sigma|+\sigma_0|\Sigma_0|-\frac{1}{2}\Omega^2 I$, где $|\Gamma|$, $|\Sigma|$, $|\Sigma_0|$ — площади свободной поверхности, поверхности контакта жидкости и газа с границей сосуда, $\tilde{\sigma}$, σ_0 — коэффициенты поверхностного натяжения на Σ, Σ_0, $I=\rho\int\limits_V r^2\,dV$ (r — расстояние от оси вращения) — момент инерции жидкости.

Пусть Γ — простая форма равновесия, характеризующаяся параметрами θ, b, а $N(S,\alpha)$ — отнесенная к η_1 нормальная составляющая возмущения свободной границы. Вопрос об устойчивости поверхности Γ сводится [5] к проблеме собственных значений следующей линейной краевой задачи относительно $N(S,\alpha)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial S}\left(r\frac{\partial N}{\partial S}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 N}{\partial\alpha^2}+aN+\mu=\lambda N; \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial S}=0\quad(S=0),\qquad \frac{\partial N}{\partial S}=0\quad(S=S_1); \tag{3.2}$$

$$\int\limits_0^{S_1}\int\limits_0^{2\pi}NrdS\,d\alpha=0\quad\begin{pmatrix}0\leqslant S\leqslant S_1\\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Здесь

$$S=(1+\theta)\int\limits_\theta^r\frac{\tau G(\tau,\theta,b)\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(\tau^2-\theta^2)}} \tag{3.4}$$

— отношение длины дуги Γ, отсчитываемой от торца $z=0$, к параметру η_1; S_1 — значение S при $r=1$;

$$G(\tau,\ \theta,\ b)=1/\sqrt{1+2b(\tau^2+\theta)-b^2(1-\tau^2)(\tau^2-\theta^2)}. \tag{3.5}$$

Функция a определяется по формуле $\eta_1^2 a = -\partial H/\partial n - 4H^2 + 2K$ $\left(K = Z'Z''\left(1+Z'^2\right)^{-2}\right.$ — гауссова кривизна Γ, $\partial/\partial n = \mathbf{n}\cdot\bar{\nabla}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Γ, направленный внутрь области, занятой газом) и выражается через параметры θ, b в виде

$$(3.6)\qquad a = -2\left[4bP + (P/r^2 - Q)^2 + Q^2\right](1+\theta)^{-2},$$
$$P = r^2 + \theta - b(1-r^2)(r^2-\theta^2), \quad Q = 1 - b(1 - 2r^2 + \theta^2).$$

Условия (3.2) следуют из предположения о том, что при возмущениях состояния равновесия динамический краевой угол на торцах равен $\pi/2$ — статическому краевому углу. Формула (3.3) выражает условие сохранения объема жидкости.

Собственные значения задачи (3.1)—(3.6) вещественны. Если наименьшее собственное значение λ_* положительно, то соответствующая равновесная конфигурация устойчива, если λ_* отрицательно — неустойчива. Представляя функцию $N(S, \alpha)$ в виде ряда

$$N = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\varphi_m(S)\cos m\alpha + \psi_m(S)\sin m\alpha\right],$$

можно показать [5], что $\lambda_* = \min\limits_{m=0,1}(\lambda_m)$, где λ_1 — наименьшее собственное значение задачи

$$(3.7)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dS}\left(r\frac{d\varphi_m}{dS}\right) - \left(a + \frac{m^2}{r^2}\right)\varphi_m + \lambda\varphi_m = 0 \quad (0 \leqslant S \leqslant S_1);$$

$$(3.8)\qquad \frac{d\varphi_m}{dS} = 0, \quad S = 0, S_1$$

при $m = 1$, а λ_0 — наименьшее собственное значение задачи (3.7) при $m = 0$, дополненной условием

$$(3.9)\qquad \int\limits_0^{S_1}\varphi_0 r\,dS = 0.$$

Задачи (3.7)—(3.9) решались методом Галеркина — Ритца. Использовалась полная система собственных функций $y_k(S)$, введенная в [3]. При $m = 0$ $y_k = Y_k - I_k/I_0$ $(k = 1, 2\ldots)$. Здесь

$$Y_1 = 2S^3 - 3S^2S_1, \quad Y_k = S^2(S - S_1)^k, \quad I_0 = \int\limits_0^{S_1} r\,dS, \quad I_k = \int\limits_0^{S_1} Y_k r\,dS.$$

При $m = 1$ полагаем $y_k = Y_k$. Метод решения описан в [3]. Отличие от [3] состоит в том, что здесь допускаются возмущения, приводящие к смещению центра масс жидкого слоя с оси вращения. Численные расчеты проводились для простых равновесных форм с параметрами $\theta \in [0, 1)$, $b \in (-0{,}5(1+\theta)^{-1}, 0]$. Показано, что для всех равновесных форм собственное значение λ_0 положительно (и равно нулю только при $l > \pi$, $\theta = 1$, т. е. в точках ветвления), а λ_1 отрицательно. Это говорит о справедливости следующего утверждения.

Во вращающемся цилиндрическом сосуде с углом смачивания на торцах, равным $\pi/2$, все возможные осесимметричные равновесные конфигурации слоя, для которых при движении вдоль дуги меридионального сечения от одного торца к другому расстояние от оси вращения изменяется монотонно, неустойчивы. Опасными являются осесимметричные возмущения.

Из этого утверждения следует результат о неустойчивости твердотельного вращения жидкого слоя с осесимметричной периодической свободной границей, расположенного на внутренней боковой поверхности цилиндра бесконечной длины, который согласуется с результатом [2]. В отличие от [2] исследуемые здесь возмущения обладают той же пе-

иодичностью вдоль оси z, что и анализируе-
:ая на устойчивость равновесная форма. Это
идно из условия (3.8), в котором точкам $S=$
$=0$, S_1 соответствуют значения $z=0$, $z=l$. Из
анного факта, а также из того, что опасные
сесимметричные возмущения сохраняют объем
аждого полупериода, на концах которого удов-
етворяются условия (1.2), следует справед-
ивость приводимого ниже утверждения.

Во вращающемся цилиндрическом сосуде
онечной длины при угле смачивания на тор-
ах $\pi/2$ неустойчивы все возможные нецилинд-
ические осесимметричные состояния относи-
ельного равновесия вязкого жидкого слоя,
асположенного на внутренней боковой по-
ерхности.

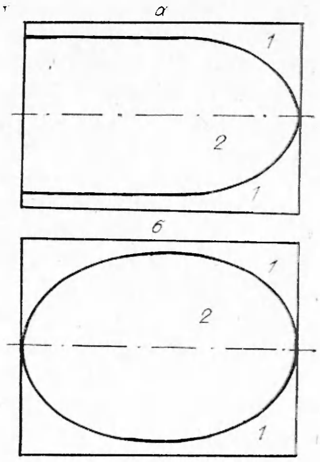

Рис. 3

Согласно этому утверждению, при угле
мачивания $\pi/2$ неустойчивы все равновесные
онфигурации с периодической свободной по-
ерхностью и свободной поверхностью, состоящей из нечетного числа
юлупериодов, на концах каждого из которых выполняются условия
1.2). При этом обратная теорема Лагранжа [9] гарантирует рост в
реднеквадратическом возмущения $N(S, \alpha)$ на каждом полупериоде.
Если равновесная поверхность содержит хотя бы один полупериод, не
оприкасающийся с торцами, то для заключения о ее неустойчивости
казывается неважным, какой моделью описывается поведение возму-
цений в окрестности торцов: используется ли модель прилипания или
роскальзывания, учитывается ли зависимость динамического угла от
корости движения линии трехфазного контакта.

Справедливо более общее утверждение. Если во вращающемся ци-
индрическом сосуде относительной длины l для состояния твердотель-
юго вращения слоя дуга меридионального сечения $\eta(z)$ свободной по-
ерхности содержит хотя бы две стационарные точки z_0, z_1, для которых
$\eta'(z_0)=\eta'(z_1)=0$, $0\neq z_0<z_1\neq l$, то это состояние неустойчиво.

Утверждение следует из того, что в классе осесимметричных воз-
иущений существуют такие возмущения $\varphi_0(S)$, для которых объем
кидкости, заключенной в полосе $z_0\leqslant z\leqslant z_1$, сохраняется и при соответ-
твующих точкам z_0, z_1 значениях $S=0$, S_1 выполняется условие (3.8).

Когда углы смачивания на торцах не равны $\pi/2$, во вращающемся
цилиндрическом сосуде возможно состояние твердотельного вращения
лоя с периодической вдоль оси вращения свободной границей. Для
того состояния длина цилиндра должна быть кратной периоду и сумма
глов смачивания на торцах равна π. Такое состояние неустойчиво, так
как меридиональное сечение каждого периода содержит две стационар-
ные точки.

Отметим особо, что в данной работе не исследовалась устойчивость
авновесных конфигураций слоя, для которых полная дуга меридиональ-
юго сечения свободной поверхности не содержит стационарных точек
ли содержит только одну стационарную точку между торцами вращаю-
щегося цилиндра. Такие равновесные конфигурации могут реализоваться
при малых числах Вебера в достаточно коротком цилиндрическом сосуде.
Можно ожидать, что среди них существуют устойчивые.

Для твердотельного вращения цилиндрического вязкого слоя в ци-
индре конечной длины результат об устойчивости может быть получен
аналитически [8] (см. также [5], с. 162). В классе допустимых возму-
цений существует такое, при котором значение функционала U не
меняется. При любом числе Вебера значение U сохраняется при возму-
щениях, сохраняющих цилиндричность свободной поверхности, но сме-
щающих ее с оси вращения. Это говорит о том, что при допущении воз-
можности смещения центра масс слоя с оси вращения равновесие

может быть только нейтрально-устойчивым. Если исключить из рассмот рения возмущения, смещающие центр масс, то при $\beta < \beta_* = (1 - \pi^2/l^2$ состояние равновесия неустойчиво (относительно осесимметричных воз мущений), а при $\beta > \beta_*$ устойчиво. Как отмечалось в п. 2, при $\beta = \beta$ происходит ветвление цилиндрического состояния. При $l \to \infty$ значени β_* равно единице.

Согласно результатам данной работы, при $\theta = 0$ простая равновесна поверхность неустойчива. Неустойчивыми являются конфигурации, схе матично изображенные на рис. 3, *а*, *б* (*1*, *2* — области, занять жидкостью и газом). Этот результат не противоречит выводу об устойчи вости пересекающих ось вращения равновесных конфигураций в беско нечном цилиндре, сделанному в [2], так как здесь анализировалис возмущения, удовлетворяющие другим краевым условиям. Для неустой чивости необходимо, чтобы хотя бы с одним торцом цилиндра газовы пузырь имел только одну точку контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пухначев В. В.** Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающи течение вязкой жидкости со свободной поверхностью // ПМТФ.— 1973.— № 2.
2. **Joseph D. D., Preziosi L.** Stability of rigid motions and coating films in bicompo nent flows of immiscible liquids // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 185.
3. **Бадратинова Л. Г.** О запасе устойчивости цилиндрического равновесного состоя ния вращающейся жидкости // ПМТФ.— 1981.— № 4.
4. **Joseph D. D., Renardy Y., Renardy M., Nguyen K.** Stability of rigid motions an rollers in bicomponent flows of immiscible liquids // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 15
5. **Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.** Гидромеханика невесо мости.— М.: Наука, 1976.
6. **Ляпунов А. М.** Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращаю щейся жидкости.— М.: Изд-во АН СССР, 1959.— Т. 3.
7. **Румянцев В. В.** К теории движения твердых тел с полостями, наполненным жидкостью // ПММ.— 1966.— Т. 30, вып. 1.
8. **Самсонов В. А.** Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью / Науч. тр. Ин-та механики МГУ.— 1971.— № 16.
9. **Владимиров В. А., Румянцев В. В.** К обращению теоремы Лагранжа для твер дого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость // ПММ.— 1990.— Т. 5 вып. 2.
10. **Gillis I., Kaufman B.** The stability of a rotating viscous jet // Quart. Appl. Math.– 1962.— V. 19, N 4.
11. **Balmer R. T., Wang T. G.** An experimental study of internal hygrocysts // Trans of the ASME.— 1976.— V. 98.

г. Новосибирск

Поступила 27/I 1992 г., в окончательном варианте — 6/IV 1992 г.

УДК 532.526

А. А. Желтоводов, Э. Х. Шилейн, С. С. Хорстман

РАЗВИТИЕ ОТРЫВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ, ВОЗМУЩЕННЫМ ВОЛНАМИ РАЗРЕЖЕНИЯ

Решение многих задач сверхзвуковой аэрогазодинамики требует изу чения течений, характеризующихся взаимодействием турбулентного по граничного слоя с различными возмущениями, например со скачкам уплотнения и волнами разрежения. Существенная их особенность п сравнению с одиночными взаимодействиями — возможность проявлени в пограничном слое релаксационных эффектов, обусловленных предше ствующим возмущением в зоне последующего. В таких условиях свой