Так как в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\sqrt{z^2 - c^2} = z - \frac{c^2}{2z} + \ldots$$

то в этой же окрестности

$$\Phi = e^{-i\alpha}\left[(u - iv) z + \frac{a+b}{2}(bu + iav)\frac{1}{z} + \ldots\right]$$

Отсюда

$$A_2 = -\,{}^1/_2\,(a - b)\,(bu + iav)e^{-\alpha i}$$

Отделяя вещественную часть, получим

$$A_2' = u_\infty\,(a + b)\,[b \cos^2\alpha + a \sin^2\alpha]$$

Подъемная сила равна

$$F = \pi\,(a + b)\,[b \cos^2\alpha + a \sin^2\alpha]$$

Полагая в последнем выражении $a = b = R$, имеем

$$F = 2\pi R^2 \rho\omega u_\infty$$

что совпадает [1] с известным выражением подъемной силы для круга.

Если положить $b = 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi / 2$, то будет

$$F = \pi a^2 \sin^2\alpha\rho\omega u_\infty$$

т. е. пластинка под углом атаки обладает подъемной силой; максимума эта сила достигает при $\alpha = \pi / 2$, когда пластинка расположена перпендикулярно к потоку. Эта сила того же происхождения, что и подсасывающая сила в обычном случае для профиля с острыми передней и задней кромками.

Поступила 5 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. ОНТИ, 1947.
2. Кочин И. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Физматгиз, 1963.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд-во «Наука», 1962.

---

# К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ ВДОЛЬ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

*Ю. Ф. Филиппов*

*(Харьков)*

Распространению волны малой амплитуды вдоль замедляющей системы при наличии электронного пучка посвящено большое число работ. Увеличение выходной мощности таких ламп (ЛБЛ, ЛОВ и др.) приводит к появлению нелинейных эффектов. В работах [1–5] рассмотрено распространение электромагнитных волн конечной, но малой амплитуды. Это позволяет учесть влияние нелинейных эффектов приближенными методами. При этом, однако, остаются открытыми границы применимости и справедливость этих полученных решений. Большой интерес в связи с этим приобретает возможность получения некоторых частных, но точных решений исходной нелинейной системы уравнений. В работе Бриллюэна [6], в частности, найдено точное решение в виде стационарной волны, когда все неизвестные функции (например, скорость пучка) зависят от пространственной координаты $z$ и времени $t$ в виде комбинации $\xi = z - Ut$, где $U$ — постоянная фазовая скорость.

Ниже предлагается другой, более широкий класс точных решений, описывающих распространение волн конечной амплитуды вдоль замедляющей системы с электронным пучком. При этом предполагается, что электронный пучок имеет только продольную компоненту скорости (большое фокусирующее магнитное поле), обгон одного электрона другим отсутствует, эффектами диссипации и влиянием собственного электромагнитного поля пучка на распространение волны можно пренебречь. Исходная система уравнений движения, непрерывности и уравнения для замедляющей линии при указанных выше предположениях приводятся к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial z}=\eta\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{I}{v}+\frac{\partial I}{\partial z}=0 \qquad \left(\eta=\frac{|e|}{m}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+L\frac{\partial^2 I}{\partial z\partial t}=0 \qquad \left(c=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$$

Здесь $v$ и $I$ — скорость и плотность тока электронного пучка, $V$ — высокочастотное напряжение в замедляющей системе, $L$, $C$ — коэффициенты самоиндукции и емкости на единицу длины.

В последнем уравнении верхний знак относится к ЛБВ взаимодействию, нижний знак соответствует случаю движения электронного пучка в поле обратной волны замедляющей системы.

Частным решением системы (1) будет простая волна, параметры которой $I$, $v$, $V$ будут функцией только одного из них [7], например $v$, т. е.

$$I=I(v), \qquad V=V(v), \qquad v=v(z,t) \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), частное решение приводим к виду

$$v=\varphi\{z-U[I(v),v]t\}, \qquad \eta\frac{dV}{dv}=v-U, \qquad \frac{dI}{dv}=-\frac{IU}{v(v-U)} \tag{3}$$

Здесь $\varphi$ — произвольная функция, определяемая из граничных либо начальных условий, а $U$ — фазовая скорость волны, удовлетворяющая соотношению

$$v(v-U)^2(1-U^2/c^2)=\pm\eta LIU^2 \tag{4}$$

Из последнего соотношения замечаем, что фазовая скорость волны $U$ в отличие от предположения работы [6] должна зависеть от скорости и плотности тока электронного пучка, т. е. $U=U(I,v)$. Соотношения (3) при этом эквивалентны решению Римана в газовой динамике, описывающей распространение звуковой волны конечной амплитуды [8]. Зависимость фазовой скорости $U$ от скорости звуковой волны $v$ приводит к тому, что профиль волны по мере распространения искажается. Начиная с некоторого момента времени, решение становится трехзначным, что соответствует появлению ударной волны. Влияние диссипационных эффектов, начинающих играть существенную роль при значительном искажении, может привести к тому, что «опрокидывание» фронта звуковой волны не наступает.

Аналогичное искажение фронта волны должно наблюдаться и в рассматриваемом случае. В отличие от газовой динамики, роль ограничителя крутизны фронта, как и в разреженной плазме, играет не диссипация, а дисперсия [9]. Одновременное действие дисперсии и нелинейных эффектов при этом приводит к распространению вдоль замедляющей системы стационарной волны [9]. Форма последней будет существенно отличной от формы сигнала на входе лампы. В частности, если на вход лампы подать монохроматический сигнал частоты $\omega$, то на выходе из сигнала можно выделить гармоники $n\omega$. Можно ожидать, что амплитуда одной из гармоник соответствующим подбором параметров может быть равна, а то и превышать амплитуду основной гармоники.

Необходимо отметить, однако, что для волн достаточно большой амплитуды, превышающей критическую, ударная волна может возникнуть и при наличии дисперсии, так как влияние дисперсионных эффектов оказывается недостаточным для ограничения роста крутизны.

В общем случае распространение простой волны в неявном виде определяется системой (3). Рассмотрим несколько частных случаев, когда решение может быть приведено к простому виду. Для определенности рассмотрим систему ЛОВ.

А. *Нелинейные эффекты малы.* Если на входе лампы при $z=0$ задано возмущение скорости $w=\cos\omega t$, амплитуда которой мала по сравнению с постоянной скоростью электронного потока, то выражения для $v$, $I$ и $U$ удобно записать в виде суммы двух слагаемых

$$v=v_0+w, \qquad I=i_0-i, \qquad U=u_0+u \qquad (w\ll v_0,\ i\ll i_0,\ u\ll u_0)$$

Подставляя это разложение в систему (3) и удовлетворяя граничному условию при $z=0$, получим, что выражение для возмущенной скорости в первом приближении разложения по малому параметру, характеризующему малость нелинейных эффектов, приводится к виду

$$w = a\cos\left\{\omega t - \frac{\omega z}{u_0}\left[1 + \alpha\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{u_0}\right)\right]\right\}, \qquad \alpha = \frac{3}{2}\frac{c^2 - u_0^2}{v_0 c^2 - u_0^3} \tag{5}$$

Здесь $u_0$ — один из корней уравнения

$$v_0 (v_0 - u_0)^2 (1 - u_0^2 / c^2)^2 = \eta l i_0 u_0^2 \tag{6}$$

совпадающего с дисперсионным уравнением в линейной теории ЛОВ. В наиболее важном случае, когда фазовая скорость волны почти равна скорости пучка ($u_0 \sim v_0$), но $c \neq v_0$, получаем

$$u_0 \approx v_0\left[1 + \left(\frac{\eta L i_0 c^2}{v_0(c^2 - v_0^2)}\right)^{1/2}\right], \qquad \alpha \approx \frac{3}{2}\frac{a}{v_0}\left[1 \pm \left(\frac{c - v_0^2}{c^2 - v_0^2}\right)^{3/2}\left(\frac{nLi_0}{v_0}\right)^{1/2}\right] \tag{7}$$

Из (5) — (7) замечаем, что решение устойчиво, когда скорость электронного потока меньше фазовой скорости замедляющей системы $v_0 < c$. Для ЛБВ систем для устойчивости волны должно выполняться обратное неравенство $v_0 > c$. Если $u_0 \sim c = v_0$, то

$$u_0 \approx v_0 (1 + \sqrt[3]{\eta L i_0 / 2v_0}), \qquad \alpha \approx \frac{a}{v_0}\left(1 - \sqrt[3]{\eta L i_0 / 2v_0}\right)$$

Проведенное выше исследование показывает, что влияние малых нелинейных эффектов приводит к искажению фронта и в конечном счете — к появлению гармоник уже в первом приближении разложения.

Б. *Быстрая волна конечной амплитуды* ($U \gg v$). В этом предельном случае фазовая скорость волны равна

$$U \approx \pm c\sqrt{1 + \eta LI / v} \tag{8}$$

Подставляя это соотношение в последнее уравнение системы (3), находим

$$\sqrt{1 + \eta LI / v} - \ln\frac{1 + \sqrt{\eta LI / v + 1}}{1 - \sqrt{1 + \eta LI / v}} = \frac{v}{c} + A \tag{9}$$

Здесь $A$ — постоянная, определяемая либо из граничных, либо из начальных условий. Соотношение (9) определяет в неявном виде зависимость плотности тока от скорости электронного пучка. Определяя $I(v)$ из (8), определяем зависимость фазовой скорости волны от $v = V(z, t)$.

В частности,

$$\frac{\eta LI}{v} \approx A + \frac{v}{c}, \qquad U \approx \pm c\left(A + \frac{v}{c}\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{\eta LI}{v} \gg 1$$

В общем случае решение (3) в явном виде найти не удается. Однако эта система, в отличие от исходной проста и удобна для численного интегрирования при помощи электронных счетных машин.

Поступила 3 III 1965

## ЛИТЕРАТУРА


1. П и р с Дж. Лампа с бегущей волной. Изд. «Сов. радио», 1952.
2. Р а п о п о р т Г. Н. Нелинейная теория лампы с бегущей волной. Изв. высш. учебн. завед., Радиотехника, 1958, т. 1, стр. 599.
3. N o r d s i e k A. Theory of large signal behavior of traveling-wave ampliefer. Proc. I. R. E. 1953, vol. 41, p. 630.
4. T i e n P. K., W a l k e r L. R., V o l o n t i s V. N. A large signal theory of traveling-wave amplifiers. Proc. I. R. E., 1955, vol. 43, p. 260.
5. R o w e I. E. A large signal analysis of the traveling-wave amplifier theory and general results I. R. E. Trans. ED-3, 1956, 39.
6. B r i l l o u i n L. The traveling-wave tube (discussion of waves for large amplifiers). J. Appl. Phys., 1949, vol. 20, p. 1196.
7. А х и е з е р А. И., Л ю б а р с к и й Г. Я., П о л о в и н Р. В. Простые волны в магнитной гидродинамике. Укр. физ. ж., 1958, т. 3, стр. 433.
8. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1958.
9. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П., С а г д е е в Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, т. 1, стр. 82.