УДК 539.37+514.7

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФЕКТНОЙ СТРУКТУРЫ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В. П. Мясников, М. А. Гузев

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток

Рассматривается новый класс моделей упругопластических материалов, построенных на основе предположения об аффиннометрической геометрической структуре внутренних взаимодействий между частицами сплошной среды. С физической точки зрения аффиннометрические объекты являются внутренними термодинамическими переменными, описывающими эволюцию различных дефектных структур в деформируемом материале, взаимодействие их между собой и с полем обратимых деформаций. Проведенный анализ позволяет связать классические механические характеристики упругопластических материалов с полем плотности дислокаций и других типов дефектов.

Введение. Показано, что механическая модель классической теории упругости содержит скрытые термодинамические параметры, характеризующие геометрическую структуру внутренних взаимодействий частиц между собой. В классической теории эти параметры равны нулю, что связано с гипотезой о совпадении внутренней геометрии материала с геометрией евклидова пространства наблюдателя. При отказе от этой гипотезы скрытые параметры становятся отличными от нуля и допускают естественную интерпретацию как геометрические объекты аффиннометрических пространств. Использование аффиннометрических объектов для описания внутренних взаимодействий частиц в сплошной среде позволяет обобщить классическую теорию на широкий класс упругопластических механических моделей поведения материалов и связать эти объекты с характеристиками дефектной структуры сплошной среды. Взаимодействие дефектов с полем обратимых упругих деформаций определяется при этом характером диссипативных процессов в сплошной среде в соответствии с принципами неравновесной термодинамики.

1. Упругая сплошная среда с дефектами. Согласно экспериментальным исследованиям испытываемые образцы без специальной предварительной обработки обладают внутренними напряжениями, влияющими на поведение конструкций при воздействии на них внешних нагрузок. Применение различных технологических приемов (например, отжига) позволяет уменьшить начальные напряжения. Для упрочнения можно также использовать полезные свойства внутренних напряжений (наклеп, закалку и т. п.). С физической точки зрения внутренние напряжения связаны с наличием в материале различных дефектных структур: дислокаций, дисклинаций и точечных дефектов. Хотя проблема возникновения и существования внутренних напряжений давно известна технологам и инженерам, последовательной теории для моделирования свойств реальных упругих материалов в настоящее время не существует. Основная трудность при построении такой теории состоит в необходимости учета взаимодействия всех дефектных структур и обратимых упругих деформаций материала.

Идея предлагаемого для решения данной проблемы подхода естественным образом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00540).

возникает при анализе классической модели упругой сплошной среды. Как известно [1, 2], общие уравнения движения для упругого тела записываются в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_k}{\partial x_k}=0,\quad \rho\frac{dv_i}{dt}=\frac{\partial\sigma_i^j}{\partial x^j}+\rho f_i,\quad \rho T\frac{ds}{dt}=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\lambda\frac{\partial T}{\partial x^i}\Big),$$
$$U=U(s,\varepsilon_{ij}),\quad T=\frac{\partial U}{\partial s},\quad \sigma_i^j=(\delta_{ik}-2\varepsilon_{ik})\rho\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{kj}},\tag{1.1}$$
$$\frac{\mathcal{D}\varepsilon_{ij}}{\mathcal{D}t}=\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}+\varepsilon_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j}+\varepsilon_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i}=e_{ij}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\Big).$$

Здесь $U=U(s,\varepsilon_{ij})$ — внутренняя энергия; s — энтропия; ε_{ij} — тензор упругой деформации, характеризующий внутреннюю геометрическую структуру материала; σ_i^j — компоненты тензора напряжений; f_i — компоненты ускорения внешних массовых сил; ρ — плотность. В классической теории упругости тензор упругой деформации ε_{ij} совпадает с тензором полной деформации A_{ij} — тензором Альманзи. Так как наблюдатель находится в трехмерном евклидовом пространстве, то в его системе отсчета тензор полной деформации A_{ij} [1, 2] определяется через лагранжевы характеристики $\xi^k=\xi^k(\boldsymbol{x},t)$ частиц сплошной среды с помощью соотношения

$$A_{ij}=\frac{1}{2}\Big(\delta_{ij}-\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\Big).\tag{1.2}$$

Представление (1.2) для тензора Альманзи через векторное поле $\xi^k(\boldsymbol{x},t)$ справедливо всегда и не зависит от физического механизма процесса деформирования, при этом A_{ij} характеризует форму деформируемого образца.

Тензор упругой деформации ε_{ij} определяет внутренний метрический тензор

$$g_{ij}=\delta_{ij}-2\varepsilon_{ij}.\tag{1.3}$$

Из (1.1) и (1.3) для него следует уравнение переноса

$$\frac{\mathcal{D}g_{ij}}{\mathcal{D}t}\equiv\frac{dg_{ij}}{dt}+g_{il}\frac{\partial v^l}{\partial x^j}+g_{jl}\frac{\partial v^l}{\partial x^i}=0.\tag{1.4}$$

Решение этого уравнения при условии $A_{ij}=\varepsilon_{ij}$ представляется в виде

$$g_{ij}=\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}.\tag{1.5}$$

Однако справедливость соотношения (1.5) является, как известно [1, 2], следствием обращения в нуль тензоров Римана R^l_{ijq}, кручения C^k_{ij} и неметричности K_{kij}:

$$R^l_{ijq}\equiv\frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial x^q}-\frac{\partial\Gamma^l_{iq}}{\partial x^j}+\Gamma^l_{\alpha q}\Gamma^\alpha_{ij}-\Gamma^l_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{iq}=0;\tag{1.6}$$

$$C^k_{ij}\equiv\frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})=0;\tag{1.7}$$

$$K_{kij}=\nabla_k g_{ij}\equiv\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^s_{ik}g_{sj}-\Gamma^s_{jk}g_{si}=0.\tag{1.8}$$

Поскольку коэффициенты связности Γ^k_{ij} симметричны по нижним индексам и согласованы с метрикой (условия (1.7) и (1.8) соответственно), то они восстанавливаются через метрику по формулам Кристоффеля [1–3]:

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{ks}\Big[\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\Big],\qquad g^{is}g_{sj}=\delta^i_j.\tag{1.9}$$

Тензоры R^l_{ijq}, C^k_{ij} и K_{ijk} (см., например, [4]) являются характеристикой неевклидовых свойств многообразия, для которого они вычисляются. В классической модели упругой сплошной среды эти тензоры равны нулю (условия (1.6)–(1.8)). Это означает, что для описания внутренних упругих свойств материала используется простейшая геометрическая модель (евклидова). Условие неизменности свойства евклидовости внутренней геометрии упругой сплошной среды при движении можно сформулировать в дифференциальной форме. Комбинируя (1.4) с (1.6)–(1.9), получаем уравнения переноса вдоль траекторий для тензоров Римана, кручения и неметричности в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{D}R^l_{ijq}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}R^l_{ijq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^i}R^l_{pjq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^j}R^l_{ipq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^q}R^l_{ijp} - \frac{\partial v^l}{\partial x^p}R^p_{ijq} = 0,\\
&\frac{\mathcal{D}C^k_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}C^k_{ij} + \frac{\partial v^l}{\partial x^i}C^k_{lj} + \frac{\partial v^l}{\partial x^j}C^k_{il} - \frac{\partial v^k}{\partial x^l}C^l_{ij} = 0,\\
&\frac{\mathcal{D}K_{kij}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}K_{kij} + K_{sij}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} + \frac{\partial v^s}{\partial x^i}K_{ksj} + K_{kis}\frac{\partial v^s}{\partial x^j} = 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В силу линейности данных уравнений их решение с нулевым начальным условием будет давать нуль для всех моментов времени. С геометрической точки зрения этот результат означает, что модель упругой среды является замкнутой. Деформации, возникающие при движении упругой среды, могут рассматриваться как однопараметрическое семейство отображений, не изменяющих внутренней евклидовой структуры материала. При этом связность Γ^k_{ij} будет отличной от нуля. Прямое вычисление в соответствии с (1.4), (1.9) дает

$$\frac{\mathcal{D}\Gamma^k_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{is}\frac{\partial v^s}{\partial x^j} + \Gamma^k_{sj}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} - \Gamma^s_{ij}\frac{\partial v^k}{\partial x^s} = -\frac{\partial^2 v^k}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{1.11}$$

Ненулевой источник в правой части (1.11) приводит к отличному от нуля решению и при нулевом начальном условии для Γ^k_{ij}. Механический смысл подобного изменения Γ^k_{ij} связан с превращением «вмороженной» в среду системы координат из декартовой в начальный момент времени в криволинейную в процессе деформирования.

Заметим теперь, что тензоры Римана R^l_{ijq}, кручения C^k_{ij} и неметричности K_{kij} являются «скрытыми» параметрами теории упругости. При ненулевом начальном условии уравнения (1.10) имеют нетривиальные решения. Тогда функции R^l_{ijq}, C^k_{ij} и K_{kij} должны быть включены в число определяющих параметров теории упругости. Такое расширение евклидовой структуры классической теории упругости соответствует переходу к геометрии аффиннометрических пространств [4, 5]. С помощью тензоров R^l_{ijq}, C^k_{ij} и K_{kij} можно учесть дефектные структуры: дисклинации. дислокации и точечные дефекты [6, 7]. Тогда внутренняя энергия материала, содержащего эти дефекты, будет иметь вид $U = U(s, \varepsilon_{ij}, R^l_{ijq}, C^k_{ij}, K_{ijk})$. С помощью обычного формализма неравновесной термодинамики [8] при тех же предположениях о бездиссипативности в уравнениях (1.1) для таких материалов можно получить уравнения состояния

$$\begin{aligned}
\sigma^j_i = (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} + \rho\Big(\frac{\partial U}{\partial C^i_{kl}}C^j_{kl} + 2\frac{\partial U}{\partial C^k_{lj}}C^k_{il}\Big) - \rho\Big(\frac{\partial U}{\partial K_{jkl}}K_{ikl} + 2\frac{\partial U}{\partial K_{kjl}}K_{kil}\Big) +\\
+\rho\Big(\frac{\partial U}{\partial R^i_{kpq}}R^j_{kpq} - \frac{\partial U}{\partial R^k_{jpq}}R^k_{ipq} - 2\frac{\partial U}{\partial R^k_{pjq}}R^k_{piq}\Big).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Из (1.12) и (1.1) следует, что компоненты тензора напряжений при учете различных типов дефектов содержат дополнительные слагаемые, имеющие смысл внутренних напряжений, зависящих от дефектной структуры материала. Равновесное состояние для материала описывается уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_i^j}{\partial x^j} = 0, \qquad \sigma_i^j n_j \Big|_{\partial V} = 0. \tag{1.13}$$

При заданном в начальный момент времени распределении дефектов (тензоры R^l_{ijq}, $C^k_{\cdot j}$ и K_{kij}) тензор упругой деформации ε_{ij} определяется из (1.12), (1.13) с некоторым произволом. Отличие от нуля функций R^l_{ijq}, $C^k_{\cdot j}$ и K_{ijk}, т. е. переход к аффиннометрической модели внутренней геометрической структуры материала, означает, что для тензора ε_{ij} нельзя построить представления через вектор перемещения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t)$. Для тензора Альманзи A_{ij} такое представление (1.2), как отмечено выше, существует всегда. Зададим связь между тензорами A_{ij} и ε_{ij} в виде

$$A_{ij} = \varepsilon_{ij} + \pi_{ij} \tag{1.14}$$

с некоторым тензором π_{ij}, характеризующим необратимую деформацию в материале. Для классической модели упругой сплошной среды $\pi_{ij} = 0$. Поскольку в состоянии равновесия лагранжевы характеристики можно выбрать из условия $A_{ij} = 0$, то $\varepsilon_{ij} = -\pi_{ij}$. Таким образом, в равновесном состоянии пластическая деформация совместно с дефектами позволяет образцу сохранять заданную форму. Появление π_{ij} и дефектов связано с процессом изготовления образца заданной формы. Ясно, что такой процесс не единственный и каждый из таких процессов будет приводить к своему набору полей ε_{ij}, R^l_{ijq}, $C^k_{\cdot j}$, K_{ijk}, согласованных друг с другом условиями равновесия (1.13) с тензором напряжений (1.12).

2. Аффиннометрическая модель упругопластических материалов. Использование геометрии аффиннометрического пространства является естественным шагом при расширении внутренней геометрической структуры модели упругой сплошной среды с целью описания процесса возникновения дефектных структур. Общее число независимых функций равно 33: 6 компонент метрического тензора g_{ij} и 27 коэффициентов аффинной связности ${}^*\Gamma^k_{ij}$. Аффинная связность ${}^*\Gamma^k_{ij}$ в отличие от метрической связности Γ^k_{ij}, вычисляемой по формулам Кристоффеля (1.9), в общем случае не является симметричной по нижним индексам. Кроме того, поскольку функции ${}^*\Gamma^k_{ij}$ введены независимо от метрического тензора g_{ij}, то аффинная связность не согласована с метрикой:

$${}^*K_{kij} \equiv {}^*\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - {}^*\Gamma^q_{ik} g_{qj} - {}^*\Gamma^q_{jk} g_{qi} \neq 0. \tag{2.1}$$

Покажем, что метрическая связность входит в аффинную аддитивно. Выполним циклическую перестановку индексов в (2.1):

$${}^*\nabla_j g_{ki} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - {}^*\Gamma_{kj,i} - {}^*\Gamma_{ij,k}, \qquad {}^*\nabla_i g_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - {}^*\Gamma_{ji,k} - {}^*\Gamma_{ki,j}, \tag{2.2}$$

где ${}^*\Gamma_{ij,k} = {}^*\Gamma^s_{ij} g_{sk}$. Вычитая (2.1) из обоих соотношений (2.2), получаем

$$2S_{ij,k} = 2\Gamma_{ij,k} + {}^*\Gamma_{ik,j} - {}^*\Gamma_{ki,j} + {}^*\Gamma_{jk,i} - {}^*\Gamma_{kj,i} - ({}^*\Gamma_{ij,k} + {}^*\Gamma_{ji,k}); \tag{2.3}$$

$$S_{ij,k} = \frac{1}{2}({}^*\nabla_j g_{ki} + {}^*\nabla_i g_{jk} - {}^*\nabla_k g_{ij}). \tag{2.4}$$

Объект $S_{ij,k}$ называется тензором сегментарной кривизны [5] (тензором дефекта связности, по терминологии авторов [4]). Функции $\Gamma_{ij,k}$ определяются из соотношения (1.9):

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma^s_{ij} g_{sk}. \tag{2.5}$$

Антисимметричная часть связности задает ковариантные компоненты тензора кручения

$$
{}^*C_{ij,k} = \frac{1}{2}({}^*\Gamma_{ij,k} - {}^*\Gamma_{ji,k}), \qquad {}^*C_{ij}^{k} = {}^*C_{ij,s}g_{sk}. \tag{2.6}
$$

Из (2.3), (2.6) следует представление для ${}^*\Gamma_{ij,k}$ в виде [4, 5]

$$
{}^*\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij,k} - S_{ij,k} + {}^*C_{ik,j} + {}^*C_{jk,i} + {}^*C_{ij,k}. \tag{2.7}
$$

Формула (2.7) определяет разложение произвольной аффинной связности на метрическую и неметрическую компоненты.

Уравнения переноса для аффиннометрических характеристик можно записать путем минимального расширения соответствующих уравнений переноса евклидовой модели упругой сплошной среды, вводя дополнительные источники для метрического тензора и объектов связности в (1.4), (1.11):

$$
\frac{\mathcal{D}g_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{dg_{ij}}{dt} + g_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + g_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial x^i} = 2E_{ij}, \tag{2.8}
$$

$$
\frac{\mathcal{D}\,{}^*\Gamma_{ij}^k}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\,{}^*\Gamma_{ij}^k + {}^*\Gamma_{sj}^k\frac{\partial v^s}{\partial x^i} + {}^*\Gamma_{is}^k\frac{\partial v^s}{\partial x^j} - {}^*\Gamma_{ij}^s\frac{\partial v^k}{\partial x^s} = -\frac{\partial^2 v^k}{\partial x^i \partial x^j} - E_{ij}^k. \tag{2.9}
$$

Структура источников E_{ij}, $E_{\cdot j}^{k}$ зависит от характера диссипативных процессов при деформировании. Поскольку

$$
\frac{\mathcal{D}A_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right), \tag{2.10}
$$

то из (1.14), (2.10) следует $\mathcal{D}\pi_{ij}/\mathcal{D}t = E_{ij}$. Источник E_{ij} характеризует процессы пластического деформирования в материале.

Решения кинематических уравнений (2.8), (2.9) при известных функциях E_{ij}, $E_{\cdot j}^{k}$ дают метрический тензор и компоненты связности. В рамках геометрического подхода полный набор компонент связности определяется соотношением (2.7). Позволяют ли решения уравнений (2.8), (2.9) получить этот полный набор? Ответ утвердителен и более точно формулируется следующим образом: соотношения (2.7) являются интегралами для уравнений (2.8), (2.9) при произвольных E_{ij}, $E_{\cdot j}^{k}$.

Для доказательства данного утверждения запишем уравнения переноса для функций, стоящих в левой и правой частях (2.7). Уравнение для аффинной связности ${}^*\Gamma_{ij,k}$ вытекает из (2.8), (2.9) и имеет вид

$$
\frac{\mathcal{D}\,{}^*\Gamma_{ij,k}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\,{}^*\Gamma_{ij,k} + {}^*\Gamma_{sj,k}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} + {}^*\Gamma_{is,k}\frac{\partial v^s}{\partial x^j} + {}^*\Gamma_{ij,s}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} = 2\,{}^*\Gamma_{ij}^l E_{lk} - E_{ij}^l g_{lk} - \frac{\partial^2 v^l}{\partial x^i \partial x^j}g_{lk}. \tag{2.11}
$$

Ковариантные компоненты метрической связности $\Gamma_{ij,k}$ вычисляются в соответствии с (2.5). Отсюда и из (1.11) для них следует уравнение переноса

$$
\frac{\mathcal{D}\Gamma_{ij,k}}{\mathcal{D}t} = D_{ij,k} - \frac{\partial^2 v^l}{\partial x^i \partial x^j}g_{lk}, \qquad D_{ij,k} = \frac{\partial E_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial E_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x^k}. \tag{2.12}
$$

Рассмотрим ковариантные производные (2.1) в тензоре дефекта связности (2.4). Функция $\partial g_{ij}/\partial x^k$, согласно (2.8), удовлетворяет уравнению

$$
\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 2\frac{\partial E_{ij}}{\partial x^l} - g_{is}\frac{\partial^2 v^s}{\partial x^l \partial x^j} - g_{js}\frac{\partial^2 v^s}{\partial x^l \partial x^i}. \tag{2.13}
$$

Комбинирование (2.13) с уравнениями переноса (2.11) дает следующее эволюционное уравнение для ${}^*K_{kij}$:

$$\frac{\mathcal{D}\,{}^*K_{kij}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\,{}^*K_{kij} + {}^*K_{sij}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} + {}^*K_{ksj}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} + {}^*K_{kis}\frac{\partial v^s}{\partial x^j} =$$

$$= 2\frac{\partial E_{ij}}{\partial x^k} - 2\,{}^*\Gamma^l_{ik}E_{lj} - 2\,{}^*\Gamma^l_{jk}E_{li} + E^l_{ik}g_{lj} + E^l_{jk}g_{li}. \qquad (2.14)$$

Используя определение ковариантной производной [3] для тензора второго ранга, запишем правую часть (2.14) в ковариантном виде

$$\frac{\mathcal{D}\,{}^*K_{kij}}{\mathcal{D}t} = 2\,{}^*\nabla_k E_{ij} + E^l_{ik}g_{lj} + E^l_{jk}g_{li}. \qquad (2.15)$$

Поскольку оператор $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ сохраняет тензорный характер величин, то из (2.15) следует, что источники $E^k_{.j}$ являются тензорными объектами.

Уравнение для тензора дефекта связности $S_{ij,k}$ следует из соотношений (2.4), (2.15):

$$\frac{\mathcal{D}S_{ij,k}}{\mathcal{D}t} = {}^*\nabla_i E_{jk} + {}^*\nabla_j E_{ik} - {}^*\nabla_k E_{ij} + \frac{1}{2}(E^l_{ij} + E^l_{ji})g_{lk} - \frac{1}{2}(E^l_{ik} - E^l_{ki})g_{lj} - \frac{1}{2}(E^l_{jk} - E^l_{kj})g_{li}.$$

Переходя от ковариантных производных к классическим производным и коэффициентам связности, получим

$$\frac{\mathcal{D}S_{ij,k}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial E_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial E_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial E_{ij}}{\partial x^k} - ({}^*\Gamma^l_{ij} + {}^*\Gamma^l_{ji})E_{lk} + 2\,{}^*C^l_{jk}E_{li} + 2\,{}^*C^l_{ik}E_{lj} +$$

$$+\frac{1}{2}(E^l_{ij} + E^l_{ji})g_{lk} - \frac{1}{2}(E^l_{ik} - E^l_{ki})g_{lj} - \frac{1}{2}(E^l_{jk} - E^l_{kj})g_{li}. \qquad (2.16)$$

Остается записать уравнение для тензора кручения (2.6). Из (2.6), (2.8), (2.11) имеем

$$\frac{\mathcal{D}\,{}^*C^k_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\,{}^*C^k_{ij} + {}^*C^k_{sj}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} + {}^*C^k_{is}\frac{\partial v^s}{\partial x^j} - {}^*C^s_{ij}\frac{\partial v^k}{\partial x^s} = -\frac{1}{2}(E^k_{ij} - E^k_{ji}),$$

$$\frac{\mathcal{D}\,{}^*C_{ij,k}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\,{}^*C_{ij,k} + {}^*C_{sj,k}\frac{\partial v^s}{\partial x^i} + {}^*C_{is,k}\frac{\partial v^s}{\partial x^j} + {}^*C_{ij,s}\frac{\partial v^s}{\partial x^k} = -\frac{1}{2}(E^l_{ij} - E^l_{ji})g_{lk} + 2\,{}^*C^l_{ij}E_{lk}. \qquad (2.17)$$

Теперь доказательство утверждения о том, что решения эволюционных уравнений (2.8), (2.9) имеют общий интеграл (2.7), сводится к стандартному вычислению: действуя оператором $\mathcal{D}/\mathcal{D}t$ на обе части соотношения (2.7) и используя уравнения (2.11), (2.12), (2.16), (2.17), получаем искомый результат.

Для того чтобы записать уравнение состояния для материала в рамках аффинно-метрической модели его внутренней геометрии, следует рассмотреть внутреннюю энергию как функцию энтропии и тензорных геометрических характеристик внутренних взаимодействий

$$U = U(s, \varepsilon_{ij}, {}^*C^k_{.j}, {}^*K_{kij}, {}^*R^k_{ijq}). \qquad (2.18)$$

Последний аргумент функции внутренней энергии (2.18) совпадает с тензором кривизны связности

$${}^*R^k_{ijq} = \frac{\partial\,{}^*\Gamma^k_{ij}}{\partial x^q} - \frac{\partial\,{}^*\Gamma^k_{iq}}{\partial x^j} + {}^*\Gamma^k_{\alpha q}\,{}^*\Gamma^\alpha_{ij} - {}^*\Gamma^k_{\alpha j}\,{}^*\Gamma^\alpha_{iq}.$$

Уравнение переноса для него следует из (2.9):

$$\frac{\mathcal{D}\,{}^*R^k_{ijq}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}\,{}^*R^k_{ijq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^i}\,{}^*R^k_{pjq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^j}\,{}^*R^k_{ipq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^q}\,{}^*R^k_{ijp} - \frac{\partial v^k}{\partial x^p}\,{}^*R^p_{ijq} =$$

$$= -{}^*\nabla_q E^k_{ij} + {}^*\nabla_j E^k_{iq} - 2E^k_{i\cdot}\,{}^*C^l_{jq}, \tag{2.19}$$

где использовано определение [3] ковариантной производной для тензора $E^k_{\cdot j}$:

$${}^*\nabla_q E^k_{ij} = \frac{\partial E^k_{ij}}{\partial x^q} - {}^*\Gamma^l_{iq} E^k_{lj} - {}^*\Gamma^l_{jq} E^k_{il} + {}^*\Gamma^k_{lq} E^l_{ij}.$$

Для материала, не содержащего в начальном состоянии дефектных структур, когда тензоры ${}^*R^l_{ijq}$, ${}^*C^k_{ij}$ и ${}^*K_{ijk}$ равны нулю, процесс их образования при деформировании связан с диссипацией энергии, поэтому при формулировке уравнений состояния материала необходимо задавать как внутреннюю энергию (2.18), так и диссипативную функцию. С точки зрения количественного анализа таких процессов существенное значение имеет использование соотношения (1.14) между обратимыми и необратимыми деформациями. В таком виде оно записывается, как правило, при малых деформациях. Для конечных деформаций общепринятое соотношение отсутствует. В литературе обсуждаются и более сложные по сравнению с (1.14) нелинейные связи между тензорами A_{ij}, ε_{ij}, π_{ij} (см. работу [9] и библиографию к ней), но с феноменологической точки зрения соотношение (1.14) может быть использовано и при произвольных конечных деформациях, поскольку это приводит только к замене переменных во внутренней энергии (2.18). Однако эта замена не влияет на выбор аффиннометрических характеристик ${}^*R^l_{ijq}$, ${}^*C^k_{\cdot j}$ и ${}^*K_{ijk}$ в (2.18), так как их структура определяется диссипативными процессами в материале.

Как отмечено выше, характеристикой таких процессов является диссипативная функция, которая в рамках предположений неравновесной термодинамики представляется билинейной формой термодинамических сил и потоков: $D(X) = X_i Y^i$, $D \geqslant 0$. Дальнейшим обобщением этой конструкции является введение диссипативного потенциала $\Phi(X)$ [10], такого что

$$\Phi(X) = \int\limits_0^1 D(\lambda X)\frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = Y^i.$$

Пусть внутренняя энергия (2.18) и диссипативный потенциал $\Phi = \Phi(E_{ij}, E^k_{\cdot j}, e_{ij}, T)$ заданы. Уравнения состояния материала можно записать в виде

$$\sigma^j_i = (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} + \rho\Big(\frac{\partial U}{\partial\, {}^*C^i_{kl}}\,{}^*C^j_{kl} + 2\frac{\partial U}{\partial\, {}^*C^k_{lj}}\,{}^*C^k_{il}\Big) - \rho\Big(\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{jkl}}\,{}^*K_{ikl} + 2\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{kjl}}\,{}^*K_{kil}\Big) +$$
$$+\rho\Big(\frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^i_{kpq}}\,{}^*R^j_{kpq} - \frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^k_{jpq}}\,{}^*R^k_{ipq} - 2\frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^k_{pjq}}\,{}^*R^k_{piq}\Big) + \frac{\partial \Phi}{\partial e_{ij}},$$
$$\rho\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} + 2\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{ksj}}({}^*\Gamma^i_{sk} + {}^*\Gamma^i_{ks}) - \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{kij}}\Big) = \frac{\partial \Phi}{\partial E_{ij}}, \tag{2.20}$$
$$\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*C^k_{ij}} - 2\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{jis}}g_{sk} - 2\frac{\partial}{\partial x^q}\Big(\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^k_{\cdot jq}}\Big) - 2\rho\Big(\frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^k_{\cdot jq}}\,{}^*\Gamma^i_{lq} - \frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^l_{ijq}}\,{}^*\Gamma^l_{kq}\Big) = \frac{\partial \Phi}{\partial E^k_{ij}}.$$

Стандартный анализ в рамках неравновесной термодинамики позволяет вычислить компоненты J^k вектора потока дефектов:

$$J^k = \rho E_{ij}\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{kij}} - 2E^l_{ij}\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^l_{ijk}}. \tag{2.21}$$

Поскольку дефекты не выходят через границу S, то нормальная компонента вектора потока дефектов обращается в нуль на границе: $n_k J^k = 0$. Так как источники E_{ij} и E^l_{ij} независимы, то отсюда и из (2.21) имеем краевые условия в форме

$$\rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*K_{kij}}n_k\Big|_S = 0, \qquad \rho\frac{\partial U}{\partial\, {}^*R^l_{ijk}}n_k\Big|_S = 0. \tag{2.22}$$

Компоненты метрического тензора и объектов связности удовлетворяют уравнениям второго порядка по пространственной переменной, поэтому для 6 функций g_{ij} и 27 объектов ${}^*\Gamma^k_{ij}$ соотношения (2.22) представляют полный набор необходимых 33 краевых условий.

3. Упругопластическая модель с дисклинациями. Для того чтобы показать влияние внутренних напряжений, связанных с наличием дефектных структур в образце, на его поведение при пластическом деформировании, рассмотрим аффиннометрическую модель, в которой учитываются только дисклинации. Для такой неевклидовой модели коэффициенты аффинной связности ${}^*\Gamma_{ij\,k}$ остаются симметричными по нижним индексам и связность согласована с метрикой. Из (2.7) следует, что аффинная связность совпадает с метрической $\Gamma_{ij,k}$, причем последняя вычисляется в соответствии с соотношениями (1.9), (2.5), в которых метрика определяется решением уравнения (2.8). Внутренняя энергия $U = U(s, \varepsilon_{ij}, R_{lijq})$, где тензор упругой деформации определяется через метрику (1.3), (2.8), а уравнение переноса (2.19) для ковариантных компонент тензора Римана записывается в виде

$$\frac{\mathcal{D}R_{lijq}}{\mathcal{D}t} = \frac{d}{dt}R_{lijq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^l}R_{pijq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^i}R_{lpjq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^j}R_{lipq} + \frac{\partial v^p}{\partial x^q}R_{lijp} =$$
$$= \nabla_q\Big(\nabla_i E_{jl} - \nabla_l E_{ij}\Big) + \nabla_j\Big(\nabla_l E_{iq} - \nabla_i E_{ql}\Big) + 2E_{lp}g^{ps}R_{sijq}.$$

Рассмотрим вариант теории, полагая $D = D(T, E_{ij})$. В этом случае

$$D = E_{nj}\Big(\rho\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{nj}} - H^{nj}\Big), \tag{3.1}$$
$$H^{nj} = \Big[-4\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^q}\rho J^{lnjq} + 4\frac{\partial}{\partial x^q}\rho(J^{nlpq}\Gamma^j_{lp} + J^{qlpj}\Gamma^n_{lp} - J^{nlpj}\Gamma^q_{lp}) - 2\rho J^{lkpq}(\Gamma^n_{lp}\Gamma^j_{kq} - \Gamma^n_{lq}\Gamma^j_{kp})\Big],$$
$$J^{lijq} = \frac{\partial U}{\partial R_{lijq}}.$$

Выражение (3.1) перепишем в принятом для теории пластичности виде. Для этого выразим первое слагаемое в круглых скобках через тензор напряжений

$$\sigma^j_i = (\delta_{ik} - 2\varepsilon_{ik})\rho\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{kj}} + 4R_{ilpq}\rho\frac{\partial U}{\partial R_{ljpq}}$$

и воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}a_{kj} = \delta^i_j, \qquad \Delta = \det||a_{ij}||, \qquad a_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}.$$

Тогда

$$D = E_{nj}\frac{\partial \ln\Delta}{\partial a_{ni}}\Big(\sigma^j_i - 4R_{ilpq}\rho\frac{\partial U}{\partial R_{ljpq}} - a_{ik}H^{kj}\Big) \equiv v^s_i(\sigma^i_s - \tau^i_s).$$

Обычно предполагается, что пластические деформации не приводят к изменению объема материала. Потребуем, чтобы $v^i_i = 0$, и представим выражение для скорости диссипации энергии в виде

$$D = v^i_k s^k_i, \qquad s^k_i = (\sigma^k_i - \tau^k_i) - \frac{1}{3}\delta^k_i(\sigma^l_l - \tau^l_l). \tag{3.2}$$

Пусть D — функция первой степени однородности от v^k_i: $D(\lambda v^k_i) = |\lambda|D(v^k_i)$. Воспользуемся условием текучести Мизеса для материала. Тогда $D = \tau_0\sqrt{v^j_i v^i_j}$, $s^j_i = \tau_0(v^j_i/\sqrt{v^n_m v^m_n})$, что эквивалентно соотношениям

$$v^j_i = \lambda\frac{\partial f}{\partial s^i_j}, \qquad f = s^k_i s^i_k - \tau^2_0.$$

В результате скорость изменения пластической деформации можно записать в виде

$$E_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial s^i_k}(\delta_{kj} - 2\varepsilon_{kj}).$$

Для упругих деформаций получим

$$\frac{\mathcal{D}\varepsilon_{ij}}{\mathcal{D}t} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если} \quad s^k_i s^i_k < \tau_0^2, \\ e_{ij} - E_{ij}, & \text{если} \quad s^k_i s^i_k = \tau_0^2. \end{cases} \tag{3.3}$$

В случае малых упругих деформаций и отсутствия дефектов $\tau^i_{\cdot} = 0$ в (3.2). Из этого следуют известные уравнения идеальной жесткопластической среды $e_{ij} = E_{ij}$. Учет вклада дефектов в диссипацию приводит к трансляционному переносу поверхности текучести в пространстве напряжений и возникновению упрочнения материала.

Рассмотренный вариант обобщения внутренней геометрической структуры материала с переходом от евклидовой к римановой геометрии приводит к геометрически замкнутому классу моделей упругопластических материалов. Любые деформации в рамках рассмотренной выше модели не изменяют качественного характера взаимодействия частиц материала между собой.

4. Обсуждение. Обобщение классической теории упругости на широкий класс упругопластических материалов с аффиннометрической структурой внутренних взаимодействий позволяет строить геометрически замкнутые полные термомеханические модели таких материалов. Использование традиционного формализма неравновесной термодинамики позволяет моделировать взаимодействие дефектов между собой и определенным образом связывать их с макроскопическими свойствами материала в процессе его деформирования. При этом конкретизация диссипативных характеристик материала должна опираться на экспериментальные данные.

Сделаем несколько замечаний относительно физической интерпретации величин, используемых в теории. Прежде всего отметим, что условия равновесия образца с дефектами являются естественным обобщением общеизвестных физических моделей равновесия упругой сплошной среды с дислокациями (см., например, [11]). Наличие дислокации заданного вида приводит к замене в правой части (1.12) или (2.20) всех аффиннометрических характеристик на особенность определенного вида. Возникающие при этом упругие деформации соответствуют пластической деформации, инициированной дефектом, и приводят к тому, что внутренняя энергия такого образца становится отличной от нуля.

Использование аффиннометрических характеристик для описания дефектов предложено еще в работах Кондо и Билби [12, 13]. В [6, 7] дана классификация аффиннометрических теорий, используемых для описания неупорядоченных систем. Однако соответствие общепринятым физическим моделям требует специального обсуждения. В частности, рассмотренная в п. **3** модель упругопластического тела не содержит дислокаций по классификации, приведенной в [6, 7]. Тем не менее можно построить теорию с $U = U(s, \varepsilon_{ij}, R_{lijq})$, которая будет содержать дислокации, традиционно определяемые через вектор Бюргерса $\boldsymbol{b}$. В переменных Эйлера его компоненты вычисляются через матрицу преобразования $p^\alpha_i = p^\alpha_i(\boldsymbol{x}, t)$, связывающую координаты точек среды dx^k после деформирования с начальными координатами $d\xi^\alpha$, для бесконечно малого элемента среды [14, с. 186]: $d\xi^\alpha = p^\alpha_k dx^k$. Тогда компоненты вектора Бюргерса $b^\alpha = -\oint p^\alpha_k dx^k$ для любого замкнутого контура [2, с. 184]. Тензор плотности дислокаций $B^{i\alpha}$ определяется соотношением

$$B^{i\alpha} = -\varepsilon^{ikj} C^\alpha_{kj}, \qquad C^\alpha_{kj} \equiv \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial p^\alpha_j}{\partial x^k} - \frac{\partial p^\alpha_k}{\partial x^j}\Big), \tag{4.1}$$

где ε^{ikj} — символ Леви — Чивита, а объекты C^{α}_{kj} характеризуют отклонение отображения p^{α}_{k} от диффеоморфизма. Предположим, что метрический тензор упругой деформации g_{ij} имеет вид $g_{ij} = p^{\alpha}_{i} p^{\alpha}_{j}$. Фактически это соотношение определяет выбор возможной параметризации, при которой внутренний метрический тензор не совпадает с полным тензором деформации — тензором Альманзи A_{ij}, но по своей алгебраической структуре соответствует классической теории упругости. Вычисляя $\Gamma_{ij,k}$ для рассмотренной выше модели с дисклинациями, получаем

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} p^{\alpha}_{k} \left(\frac{\partial p^{\alpha}_{j}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial p^{\alpha}_{i}}{\partial x^{j}} \right) + p^{\alpha}_{i} C^{\alpha}_{jk} + p^{\alpha}_{j} C^{\alpha}_{ik}.$$

Отсюда и из (4.1) видно, что эта модель содержит дислокации. Ясно, что их выделение в аффиннометрических объектах определяется связью наблюдаемого в эксперименте нарушения диффеоморфной структуры поля деформаций (функции p^{α}_{k}) с внутренней метрической структурой (тензором g_{ij}). Очевидно, что ε_{ij}, R_{lijq} также выражаются через обобщенные дисторсии. Уравнения переноса для них можно записать в виде

$$\frac{dp^{\alpha}_{i}}{dt} + p^{\alpha}_{l} \frac{\partial v^{l}}{\partial x^{i}} = I^{\alpha}_{i}.$$

При этом E_{ij} связаны с I^{α}_{i} соотношениями вида $E_{ij} = (p^{\alpha}_{i} I^{\alpha}_{j} + p^{\alpha}_{j} I^{\alpha}_{i})/2$. Положим $I^{\alpha}_{i} = \gamma^{\alpha\beta} p^{\beta}_{i}$, тогда $E_{ij} = \gamma^{\alpha\beta} p^{\alpha}_{i} p^{\beta}_{i}$ и $\gamma^{\alpha\beta}$ может быть выражено через напряжения и дисторсии. Таким образом, для описания эволюции обобщенных дисторсий вместо уравнений (3.3) для упругих деформаций имеем

$$\frac{dp^{\alpha}_{i}}{dt} + p^{\alpha}_{l} \frac{\partial v^{l}}{\partial x^{i}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad s^{k}_{i} s^{i}_{k} < \tau_{0}^{2}, \\ \gamma^{\alpha\beta} p^{\beta}_{i}, & \text{если} \quad s^{k}_{i} s^{i}_{k} = \tau_{0}^{2}. \end{cases}$$

С физической точки зрения аффиннометрические объекты являются внутренними переменными. Тензоры ε_{ij} и π_{ij} не могут быть измерены непосредственно. Прямые измерения допускает только их сумма (или какое-либо иное представление A_{ij} через ε_{ij} и π_{ij}). Тем не менее тензор A_{ij} всегда может быть определен, если известно поле скоростей, так как $v^{i} = du^{i}/dt$ (u^{i} — поле смещений). Тензор A_{ij} при этом будет выражаться через смещения стандартным образом. Использованное выше представление для g_{ij} через обобщенные дисторсии p^{α}_{i} не является необходимым для модели, изложенной выше. Однако такое представление нередко используется в литературе [2, 11, 14, 15] для описания дислокаций.

Изложенная в статье физическая интерпретация модели позволяет понять картину пластического деформирования на масштабных уровнях, характерных для различных типов дефектных структур.

Общая аффиннометрическая модель феноменологически описывает взаимодействие дефектов и вносимых ими возмущений в поле упругих деформаций и одновременно дает возможность подойти к решению проблемы интерпретации пластического поведения материала на основе изучения структуры деформационных полей с различными уровнями разрешения при измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошных сред. М.: Наука, 1973. Т. 1, 2.
2. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
3. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1986.

4. **Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н.** Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Наука, 1978.
5. **Родичев В. И.** Теория тяготения в ортогональном репере. М.: Наука, 1978.
6. **Грачев А. В., Нестеров А. И., Овчинников С. Г.** Описание точечных и линейных дефектов в калибровочной теории неупорядоченных систем. Красноярск, 1988 (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики им. Л. В. Киренского; № 509 Ф).
7. **Grachev A. V., Nesterov A. I., Ovchinikov S. G.** The gauge theory of point defects // Phys. Status Solidi B. 1989. V. 156. P. 403–410.
8. **Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.
9. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упруго-пластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
10. **Мосолов П. П., Мясников В. П.** Механика жесткопластичных сред. М.: Наука, 1981.
11. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1987.
12. **Kondo K.** On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding // Proc. 2nd Japan. Nat. Congr. Appl. Mech., Tokyo, 1953. P. 41–47.
13. **Bilby B. A., Bullough R., Smith E.** Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Reimannian geometry // Proc. Roy. Soc. London A. 1955. V. 231. P. 263–273.
14. **Эшелби Дж.** Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
15. **Carpio A., Chapman S. J., Howison S. D., Ockendon J. R.** Dynamics of line singularities // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1997. V. 355. P. 2013–2024.

Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.