

О ДИФРАКЦИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА КОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ  
В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

П. А. Мартынюк, Е. Н. Шер

(Новосибирск)

Для нормального падения волны в случае плоской или антиплоской деформации задача о взаимодействии упругих волн с трещиной рассмотрена в [1, 2]. Решение задачи о произвольном падении волны в случае плоской деформации описано в [3].

В п. 1 данной работы рассматривается дифракция ступенчатой волны напряжения на прямолинейной трещине конечной длины при произвольном угле падения в случае антиплоской деформации. Для антиплоской деформации математическое описание движения упругой среды проще, чем при плоской деформации. Это позволяет получать более простые и полные решения.

В п. 2 в той же постановке рассматривается дифракция при нормальном падении волны на трещину при условии, что в некоторый момент времени трещина достигает критического состояния и начинает развиваться под действием падающей волны.

**1. Наклонное падение волны напряжения на неподвижную трещину.** Рассматривается бесконечное упругое тело, содержащее изолированную трещину длиной  $2l$ . Деформационное состояние полагается антиплоским. Компоненты тензора напряжения, отличные от нуля

$$(1.1) \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

где  $w = w(x, z, t)$  — единственная отличная от нуля компонента вектора смещения. Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad w' = \frac{w}{l}, \quad \tau' = \frac{\tau}{\mu}, \quad t' = t \frac{c}{l}, \quad c = \sqrt{\mu/\rho}$$

где  $c$  — скорость поперечных волн,  $\mu$  — модуль сдвига. Уравнения (1.1) и уравнение движения для безразмерных величин запишутся в виде (штрихи для простоты записи опущены)

$$\tau_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{zy} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Пусть на трещину слева падает волна сдвига в форме ступеньки с амплитудой  $p_0$  и пусть в момент  $t = 0$  она касается левого края трещины в точке  $x = -1$ . Угол между направлением нормали фронта волны с положительным направлением оси  $z$  обозначим через  $\varphi$ . Задача о падении такой волны на трещину эквивалентна задаче о свободной трещине, на берегах которой в начальный момент времени появляется нагрузка

$$(1.2) \quad p(x, t) = \mp \tau_{yz} = \pm p_0 \cos \varphi H[t - (x + 1) \sin \varphi]$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

Верхний знак в равенстве относится к верхнему берегу разреза. Длина трещины во все время остается постоянной.

Приведенный вид  $p(x, t)$  означает, что нагрузка интенсивностью  $\pm p_0 \cos \varphi$  распространяется по длине трещины из края  $x = -1$  с посто-

янной скоростью  $(\sin \varphi)^{-1}$  до тех пор, пока она не достигнет противоположного края трещины. После этого нагрузка остается постоянной. Решение задачи о дифракции можно получить сложением решения задачи о свободной трещине, подвергнутой в начальный момент действию нагрузки (1.2), и решения, описывающего движение падающей волны в сплошном бесконечном упругом теле. Для такой волны

$$w(x, z, t) = -p_0 H [t - (1+x) \sin \varphi - z \cos \varphi]$$

Компонента тензора напряжения  $\tau_{yz}$  в такой волне на трещине  $z = 0$ ,  $-1 < x < +1$  будет

$$\tau_{yz} = p_0 \cos \varphi H [t - (1+x) \sin \varphi]$$

В сумме со значением из (1.2) это дает на трещине условие  $\tau_{yz} = 0$ , что и должно выполняться в дифракционной задаче. Задача с нагрузкой (1.2) является частным случаем задачи, решенной в [4]. На фиг. 1 представлена кинематика различных волновых фронтов, возникающих из-за отражения волны от краев трещины. Решение ищется в зонах, обозначенных цифрами 0, I, II.

Согласно [4] в зоне 0 выражения для  $\tau_{yz}$  при  $z = 0$  имеют вид

$$(1.3) \quad \tau_{10}(\xi_0, \eta_0) = \frac{p_0 \cos \varphi}{\pi \sqrt{\eta_0 - \eta_1(\xi_0)}} \int_{-\gamma_1 \xi_0 + \beta}^{\eta_1(\xi_0)} \frac{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta$$

$$\tau_{20}(\xi_0, \eta_0) = \frac{p_0 \cos \varphi}{\pi \sqrt{\xi_0 - \xi_1(\eta_0)}} \int_{-\gamma_1 \eta_0 + \beta_1}^{\xi_1(\eta_0)} \frac{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi$$

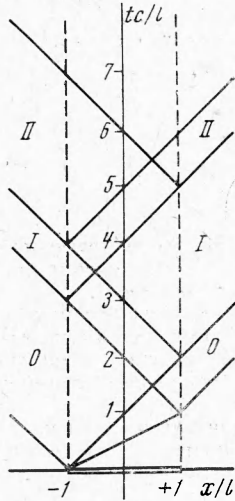
$$\xi = (t-x)/\sqrt{2}, \quad \eta = (t+x)/\sqrt{2}, \quad \xi_1 = \sqrt{2} + \eta, \quad \eta_1 = \sqrt{2} + \xi$$

$$\gamma = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \gamma_1 = \gamma^{-1}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

где  $\xi, \eta$  — характеристические переменные,  $\tau_{10}, \tau_{20}$  есть значения  $\tau_{yz}$  для правого и левого концов трещины соответственно. Взяв интегралы в (1.3), получим

$$(1.4) \quad \tau_{10}(\xi, \eta) = \frac{2p_0 \cos \varphi}{\pi} \left\{ \left[ \frac{2\xi + \sqrt{2}(1-2\sin \varphi)}{(\eta - \xi - \sqrt{2})(1 - \sin \varphi)} \right]^{1/2} - \right. \\ \left. - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{2\xi + \sqrt{2}(1-2\sin \varphi)}{(\eta - \xi - \sqrt{2})(1 - \sin \varphi)} \right]^{1/2} \right\} \\ \tau_{20}(\xi, \eta) = \frac{2p_0 \cos \varphi}{\pi} \left\{ \left[ \frac{2\eta + \sqrt{2}}{(\xi - \eta - \sqrt{2})(1 + \sin \varphi)} \right]^{1/2} - \right. \\ \left. - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{2\eta + \sqrt{2}}{(\xi - \eta - \sqrt{2})(1 + \sin \varphi)} \right]^{1/2} \right\}$$

Как видно из (1.3), (1.4),  $\tau_{10}$  и  $\tau_{20}$  имеют особенности порядка  $(\Delta x)^{-1/2}$ , где  $\Delta x \ll 1$ , при стремлении  $\eta_0$  к  $\eta_1$  ( $\xi_0$  к  $\xi_1$ ). В предельном случае можно



Фиг. 1

написать

$$(1.5) \quad \tau_{10}(\xi_0, \eta_1) = \frac{K_{10}(\xi_0)}{\sqrt{\Delta x}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left[ \frac{1}{\pi 2^{3/4}} \int_{-\sqrt{\xi_0 + \beta}}^{\eta_1(\xi_0)} \frac{\tau(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta \right]$$

$$\tau_{20}(\xi_1, \eta_0) = \frac{K_{20}(\eta_0)}{\sqrt{\Delta x}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \left[ \frac{1}{\pi 2^{3/4}} \int_{-\sqrt{\eta_0 + \beta_1}}^{\xi_1(\eta_0)} \frac{\tau(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi \right]$$

$$(1.6) \quad K_{10}(\xi) = \frac{p_0}{\pi} 2^{3/4} [2\xi + \sqrt{2}(1 - 2 \sin \varphi)]^{1/2} \cos \beta$$

$$K_{20}(\eta) = \frac{p_0}{\pi} 2^{3/4} [2\eta + \sqrt{2}]^{1/2} \sin \beta \quad \left( \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Здесь  $K_{10}$  и  $K_{20}$  — коэффициенты интенсивности при особенностях в носиках трещины при подходе к ним извне. Величины  $K_{10}$  и  $K_{20}$  являются монотонно возрастающими функциями своих аргументов, причем к моменту прихода первой отраженной волны от противоположного конца трещины, т. е. для  $K_{10}$  при  $\xi = 1/\sqrt{2}$ , а для  $K_{20}$  при  $\eta = (1 + 2 \sin \varphi)/\sqrt{2}$  значения их совпадают и равны величине  $(p_0/\pi) 2^{3/2} \sin 2\beta$ . Отсюда видно, что с изменением  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$  максимальное значение  $K_{10}$  и  $K_{20}$  меняется от  $(p_0/\pi) 2^{3/2}$  до 0. При нормальном падении волны на трещину, т. е. при  $\varphi = 0$ ,  $\tau_{10}$  совпадает с  $\tau_{20}$ .

В зонах I и II коэффициенты интенсивности напряжений рассчитывались по формулам

$$(1.7) \quad K_{11}(\xi_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{-1/\sqrt{2}}^{\eta_2} \frac{\tau_{20}(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \xi_0 < \frac{3 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}}$$

$$K_{12}(\xi_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{-1/\sqrt{2}}^{\eta_*} \frac{\tau_{20}(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_{\eta_*}^{\eta_2} \frac{\tau_{21}(\xi_0, \eta)}{\sqrt{\eta_1(\xi_0) - \eta}} d\eta + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{3 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}} < \xi_0 < \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$K_{21}(\eta_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{\xi_*}^{\xi_2} \frac{\tau_{10}(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{1 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}} \leq \eta_0 < \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$K_{22}(\eta_0) = \frac{2^{-1/4}}{\pi} \left\{ - \int_{\xi_*}^{1/\sqrt{2}} \frac{\tau_{10}(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_{1/\sqrt{2}}^{\xi_2} \frac{\tau_{11}(\xi, \eta_0)}{\sqrt{\xi_1(\eta_0) - \xi}} d\xi + 2^{7/4} p_0 \cos \varphi \right\}, \quad \frac{3}{\sqrt{2}} < \eta_0 < \frac{5 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{2}}$$

$$\tau_{11}(\xi_0, \eta_0) =$$

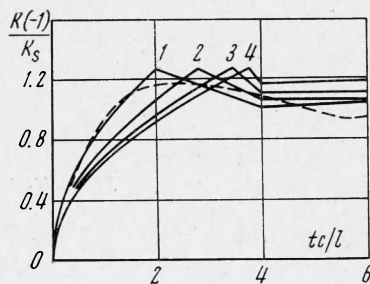
$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\eta_0 - \eta_1}} \left\{ - \int_{-1/\sqrt{2}}^{\eta_2} \tau_{20}(\xi_0, \eta) \frac{\sqrt{\eta_1 - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta + p_0 \cos \varphi \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{\sqrt{\eta_1 - \eta}}{\eta_0 - \eta} d\eta \right\}$$

$$\tau_{21}(\xi_0, \eta_0) =$$

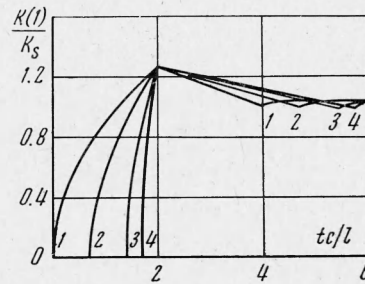
$$= \frac{1}{\pi \sqrt{\xi_0 - \xi_1}} \left\{ - \int_{\xi_*}^{\xi_2} \tau_{10}(\xi, \eta_0) \frac{\sqrt{\xi_1 - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi + p_0 \cos \varphi \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\sqrt{\xi_1 - \xi}}{\xi_0 - \xi} d\xi \right\}$$

$$\eta_2 = -\sqrt{2} + \xi, \quad \xi_2 = -\sqrt{2} + \eta, \quad \xi_* = \frac{(2 \sin \varphi - 1)}{\sqrt{2}}, \quad \eta_* = \frac{(2 \sin \varphi + 1)}{\sqrt{2}}$$

В этих выражениях первый индекс указывает на конец трещины. Так, 1 соответствует правому концу  $x = +1$ , а 2 — левому  $x = -1$ ; второй индекс обозначает зону, или количество пришедших отраженных волн. Выражения (1.7) считались численно. На фиг. 2, 3 представлены результаты численного счета изменения отношения коэффициента интенсивности напряжения к его статической величине во времени. Кривые на фиг. 2 отвечают левому концу  $x = -1$ , а на фиг. 3 — правому концу трещины  $x = 1$ . Кривые, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4, отвечают значениям  $\varphi = 0, \pi/8, \pi/4, \pi/3$  соответственно. Из этих графиков видно, что коэффициенты интенсивности напряжений, отнесенные к своему статическому значению, вначале растут до 1.27, а потом, колеблясь, стремятся к единице. Это согласуется с решениями [1-3]. Для сравнения на фиг. 2 пунктирной линией изображено решение для нормально падающей волны, взятое из [2].



Фиг. 2



Фиг. 3

Отличие от кривой 1, соответствующей нормальному падению, можно объяснить ошибкой приближенных вычислений использованных для получения решения в [1].

С точки зрения разрушения оба конца трещины для волны типа ступеньки являются одинаково опасными. На дальнем конце трещины ( $x = 1$ ) максимальные напряжения возникают раньше, следовательно, там и может начаться разрушение.

**2. Дифракция на развивающейся трещине.** Если напряжения, появляющиеся при дифракции волны на трещине, превышают критические, то трещина начинает расти. Закон движения конца трещины определяется уравнением [4]

$$(2.1) \quad \dot{x} = \frac{(r^4 - 8\pi T^2)}{(r^4 + 8\pi T^2)}, \quad r = \frac{\pi^{2/4} K}{\sqrt{1 - \dot{x}}}$$

Здесь  $T$  — энергия, необратимо теряющаяся при продвижении конца трещины на единицу длины;  $K$  — коэффициент интенсивности напряжений в носике трещины, который определяется по формулам, аналогичным приведенным в п. 1 для неподвижной трещины.

В дальнейшем предполагается, что  $T = \text{const}$ . Рассматривается случай нормального падения волны на трещину. Движение трещины начинается в момент  $t = t_0$ , при котором интенсивность напряжений достигает своего критического значения и  $t_0^2 = \pi T^2 / 4p_0^4$ . В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением движения одного конца трещины. Закон движения правого конца записывается в виде

$$(2.2) \quad x(t) = 1 + t + [\pi/2 - 1 - 2 \arctg t/t_0] t_0$$

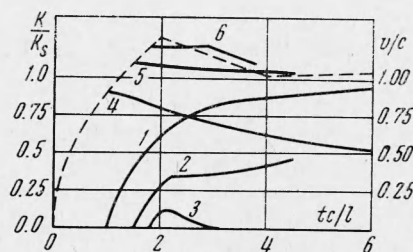
найденном в [4] для полубесконечной трещины. Закон этот справедлив и для трещины конечной длины до момента прихода волны от ее противопо-

ложного конца. Величину этого момента времени  $t_1$  можно определить

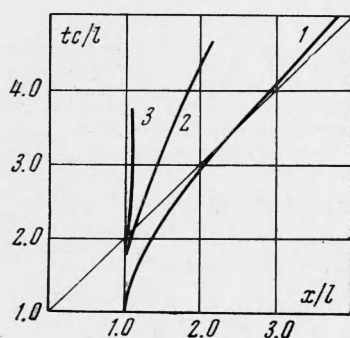
$$(2.3) \quad t_1 = t_0 \operatorname{tg} [1/t_0 + \pi/4 - 1/2]$$

При  $t_0 = 4/(2 + \pi)$  это выражение обращается в бесконечность, т. е. при  $t_0 \leq 4/(2 + \pi)$  волна от левого конца трещины не может догнать правый конец. В этом случае закон (2.2) выполняется во все время, пока напряжение в падающей волне держится на первоначальном уровне  $p_0$ . Если  $t_0 > 4/(2 + \pi)$ , то при  $t > t_0 \operatorname{tg} [1/t_0 + \pi/4 - 1/2]$  начнет сказываться влияние левого конца трещины. Исследуя зависимость ускорения трещины от  $t_0$ , можно установить, что при  $t_0 < 1.71$  движение носика трещины после первой дифракции продолжает ускоряться, а при  $t_0 > 1.71$  начинает замедляться и может даже прекратиться.

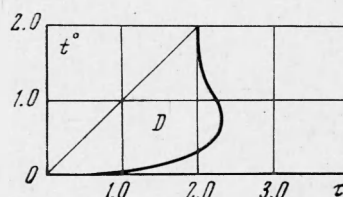
На фиг. 4 приведены графики изменения скорости развития трещины от времени для  $t_0 = 1.0, 1.5, 1.8$  (кривые 1, 2, 3 соответственно), полученные численным интегрированием уравнения (2.1). Закон изменения коэффициента интенсивности напряжения от времени для приведенных значений  $t_0$  изображен на фиг. 4 кривыми, обозначенными цифрами 4, 5, 6. Коэффициент интенсивности напряжения  $K$  отнесен к своему статическому значению  $K_c = p_0 \sqrt{l/2}$ , где  $2l$  — начальная длина трещины. Пунктирная



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

линия на этом графике соответствует случаю неподвижной трещины. На фиг. 5 кривыми 1, 2, 3 в плоскости  $xt$  изображены траектории движения трещины для  $t_0 = 1.0, 1.5, 1.8$ . Прямая линия на фиг. 5 является траекторией волны, идущей из левого конца трещины.

Приведем некоторые оценки влияния длительности волны на конечный размер трещины. Предположим, что на трещину нормально падает прямоугольная волна длительностью  $\tau$ . Окончательный размер трещины в этом случае определяется параметрами  $t_0$  и  $\tau$ .

Если  $t_0 > 2$ , что означает: коэффициент интенсивности напряжения не достигает своего критического значения, то трещина вообще не сдвинется с места. То же самое произойдет при  $\tau \leq t_0$ . На фиг. 6 в плоскости  $t_0 \tau$  эти области покоя показаны штриховкой. Линия на фиг. 6 ограничивает область  $D$  состояний  $t_0 \tau$ , при которых остановка трещины произойдет до первой дифракции. Для этой области закон движения трещины после сня-

