

СТАТИСТИКА ОСКОЛКОВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ РАЗРУШЕНИИ
ТВЕРДЫХ ТЕЛ ВЗРЫВОМ,

Э. А. Кошелев, В. М. Кузнецов, С. Т. Софронов,
А. Г. Черников

(Новосибирск)

Излагается один из возможных подходов к построению функции распределения осколков по их размерам. Из общих теоретико-вероятностных представлений для функции распределения получен закон Розина — Рамлера. Проверка функции распределения, полученной теоретически, проводилась на большом числе экспериментов. Экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими выводами.

1. Хрупкое разрушение. Если при взрыве материал деформируется упруго вплоть до разрушения, то такое разрушение считают хрупким. Детальный обзор по хрупкому разрушению можно найти в [1].

Здесь эта проблема затрагивается в самых общих чертах.

Рассматриваются трещины, находящиеся в предельном равновесии. Теория хрупкого разрушения основывается на двух гипотезах:

1) при деформировании упруго-хрупкого тела в нем всегда найдется дефект, который рассматривается как изолированная трещина;

2) существующая трещина будет распространяться, если полная потенциальная энергия системы при этом уменьшается.

Большинство работ по теории хрупких трещин посвящено развитию второй гипотезы в различных интерпретациях. Рассмотрим некоторые результаты этих исследований, которые понадобятся при дальнейшем изложении.

Можно показать [1], что в окрестности носика трещины напряжения σ_x , σ_y стремятся к бесконечности по закону

$$\sigma_x = \sigma_y = K / \sqrt{\varepsilon}$$

где ε — малое расстояние от носика трещины. Величину K называют коэффициентом интенсивности напряжений и определяют из решения соответствующей задачи теории упругости.

В теории хрупкого разрушения вводится параметр

$$K_0 = \left[\frac{E\gamma}{\pi(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (1.1)$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, γ — эффективная удельная энергия, расходуемая на образование единицы поверхности трещины. Величина γ есть сумма удельной работы по разрыву межатомных связей γ_0 и удельной работы пластических деформаций γ_p

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_p \quad (1.2)$$

Трещина находится в равновесии, если

$$K = K_0$$

Отсюда, в частности, получается известная формула Гриффитса, определяющая прочность σ_* тела, содержащего трещину длиной $2l_*$

$$\sigma_* = \left[\frac{E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l_*} \right]^{1/2} \quad (1.3)$$

Для дальнейшего изложения существенно то, что упруго-хрупкие свойства материалов в данной постановке характеризуются одним параметром K с размерностью $ML^{1/2}T^{-2}$.

Для приложения теории хрупких трещин к проблеме взрывного разрушения существенной представляется задача о статическом взаимодействии системы трещин. Простейшей из таких систем является бесконечный ряд параллельных трещин, расположенных симметрично оси y , нагруженных изнутри постоянным давлением p . Эту задачу решали многие авторы [1]. Решение получено в виде рядов или приближенно в конечном аналитическом виде [3]

$$K = p \left(\frac{h}{2\pi} \operatorname{th} \frac{\pi l}{h} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

где h — расстояние между трещинами, l — полудлина трещины.

Теория равновесных хрупких трещин не рассматривает процесс возникновения трещин. Поэтому в формуле (1.4) имеются два неизвестных параметра h и l . Величину l можно в качестве предположения фиксировать при помощи соотношения (1.3), считая величину дефекта характеристикой данного материала. Тогда (1.4) определит расстояние между трещинами при напряжениях σ , превышающих прочность материала.

Формулы (1.3) и (1.4) можно преобразовать к более удобному виду. Если в формуле Гриффитса (1.3) положить $l_* = b \approx 10^{-8}$ см (межатомное расстояние), то она определит так называемую теоретическую прочность σ_0 . При этом надо положить $\gamma = \gamma_0 = 1/2 \sigma_0 b$. Тогда нетрудно получить

$$\sigma_0 = \frac{E}{\pi(1-\nu^2)} \approx 0.1 E_2 \quad l_* = \frac{b(\gamma_0 + \gamma_p)}{\gamma_0} \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_*} \right)^2$$

а из (1.4)

$$\frac{h}{\pi l_*} \operatorname{th} \frac{\pi l_*}{h} = \left(\frac{\sigma_*}{p} \right)^2 \quad \text{при } l = l_*, K = K_0 \quad (1.5)$$

Из результатов, полученных в динамике хрупкого разрушения, отметим два.

1. Скорость трещин не может превышать некоторой предельной величины. Этот результат получен в ряде теоретических и экспериментальных работ, ссылки на которые можно найти в [1]. Теоретически предельная скорость развития трещин равна рэлеевской скорости. Экспериментально найденные ее значения составляют половину этой величины.

2. Напряженное состояние в окрестности носика движущейся трещины несущественно отличается от напряженного состояния неподвижной трещины при той же геометрии и одинаковых внешних силах.

Этот результат получен экспериментально в работе [2]. Опираясь на эти два результата, можно сконструировать следующую формулу для определения скорости движения трещины [3]:

$$C = C_* \sqrt{1 - K_0/K} \quad (1.6)$$

Здесь C_* — предельная скорость трещины, K — коэффициент интенсивности напряжений, K_0 — его равновесная величина.

Экспериментальная проверка этой формулы приведена в работе [4]. Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть в плоскости xu имеется бес-

конечная система параллельных трещин длиной $2l$, расположенных симметрично относительно оси y на расстоянии h_0 друг от друга. В начальный момент времени внутри трещин создается давление p , превышающее равновесное и остающееся постоянным во все время движения. Требуется определить движение трещин и, в частности, исследовать устойчивость этого движения. Решение этой задачи приведено в [3]. Скорость развития трещин определяется сразу формулами (1.4) и (1.6). Такая система трещин обладает неустойчивостью следующего типа. Пусть все трещины через одну получают одинаковое приращение длины. Тогда скорость трещин большой длины увеличивается, а скорость меньших трещин уменьшается до тех пор, пока не происходит их остановка.

Показано, что если длина больших трещин в e раз превышает длину маленьких, то напряженное состояние в окрестности больших трещин не зависит от наличия маленьких. Образуется новая система трещин с расстоянием $2h_0$ между ними, с которой можно проделать ту же процедуру. Таким образом с течением времени расстояние между трещинами имеет тенденцию к увеличению.

Если трещины проходят расстояние L , то число возможных актов удвоения N равно $\ln(L/l)$, а расстояние между трещинами составляет

$$h = h_0 2^N = h_0 (L/l_0)^{\ln 2} \quad (1.7)$$

2. Простая функция распределения осколков по размерам. Вероятностный характер развития трещин и образования осколков лежит в основе теории хрупкого разрушения.

В самом деле, если обратиться к первой из гипотез, лежащих в основе теории Гриффитса — Ирвина, то очевидно следующее утверждение: при деформировании упруго-хрупкого тела в нем всегда сколь угодно много дефектов, рассматриваемых как трещины.

Прочность материала при статическом нагружении определяется поведением одной, по-видимому, наибольшей трещины. При динамическом нагружении и, в частности, при взрыве в любом конечном объеме твердого тела одновременно развивается большое количество трещин, приводящее к образованию осколков самых разнообразных размеров, объемов и форм. Из предыдущего ясно, что адекватное описание осколочного (дробящего) действия взрыва должно быть основано на теоретико-вероятностных представлениях. Те детерминированные схемы разрушения, которые рассматривались в предыдущем пункте, должны определить линейный размер осколка, понимаемый в смысле «среднего».

С самого начала предполагается, что каждый осколок имеет некоторый характерный линейный размер, т. е. осколки типа «игла» не рассматриваются.

При статистическом анализе осколкообразования иногда используется нормальный закон распределения по размерам частиц, или по логарифмам размеров [5], а также закон Пуассона [6]. Кроме этих законов, полученных на основе теоретико-вероятностных представлений, существует еще ряд эмпирических соотношений, используемых в основном в горнообогатительной промышленности. Среди них следует отметить закон Розина — Раммлера

$$V(x) = V_0 e^{-ax^n} \quad (2.1)$$

Здесь V_0 — общий объем исследуемой массы разрушенного материала; x — характерный размер осколка; $V(x)$ — объем всех осколков, размер которых превышает x ; a , n — эмпирические параметры.

Обработка результатов промышленных взрывов [7] и экспериментов, проведенных в данной работе, показывает, что это соотношение может быть с достаточной точностью

применено к анализу гранулометрического состава взорванной массы, а также осколков, образующихся при разрушении некоторых простейших конструкций.

Покажем, что закон Розина — Рамлера получается как частный случай из общих вероятностных представлений, имеющих определенный физический смысл.

Пусть функция распределения (вероятность того, что осколок имеет линейный размер меньше некоторого значения x) имеет вид

$$\Phi(x) = 1 - e^{-F(x)}, \quad F(0) = 0, \quad F(\infty) = \infty \quad (2.2)$$

Здесь $F(x)$ — положительно определенная функция, производная которой может иметь конечное число разрывов первого рода на всем интервале изменения x .

Вероятность того, что осколок имеет длину в диапазоне $(x, x + dx)$, определяется как

$$dp = \Phi'(x) dx = F'(x) e^{-F(x)} \quad (2.3)$$

Количество осколков в том же диапазоне

$$dm = \frac{V_0}{v} dp = \frac{V_0}{v} F'(x) e^{-F(x)} dx \quad (2.4)$$

Здесь v — некоторый средний объем частицы, имеющей размеры в диапазоне $(x, x + dx)$.

Формула (2.4) проясняет понятие вероятности. В данном случае

$$dp = \frac{v}{V_0} dm = \frac{dV}{V_0}, \quad \Delta p_i = \frac{\Delta V_i}{V_0} \quad (2.5)$$

Таким образом, вероятность того, что частица имеет размер, лежащий в диапазоне значений от x до $x + \Delta x$, есть отношение объема всех частиц, имеющих данные размеры, ко всему объему анализируемой массы. Объем всех частиц, размеры которых больше, определяется из (2.3) и (2.4)

$$V(x) = \int_x^{\infty} v dm = V_0 e^{-F(x)} \quad (2.6)$$

Закон Розина — Рамлера получается отсюда, если положить $F(x) = ax^n$. Условие нормировки

$$\int_0^{\infty} dp = 1$$

которое выполнено вследствие ограничений, накладываемых на $F(x)$, определяет точность данного подхода. Так как в действительности размер осколков меняется не от 0 до ∞ , а от некоторого минимального размера x_{\min} до максимального x_{\max} , то точность должна определяться выполнением неравенств

$$\int_0^{x_{\min}} dp \ll 1, \quad \int_{x_{\max}}^{\infty} dp \ll 1$$

Покажем, как можно определить $F(x)$, исходя из теоретико-вероятностных представлений. Сформулируем гипотезы.

1. Предполагается, что все грани осколков плоские, причем всегда найдутся две параллельные грани. Это предположение позволяет свести «многомерную» задачу образования осколка к «одномерной», а именно рассмотреть процесс возникновения двух плоских трещин, находящихся на некотором расстоянии x .

Так как возникновение трещины в некотором месте сопровождается разгрузкой материала в ее окрестности, то очевидно, что условная вероятность $P_1(dx/x)$ появления второй трещины на расстоянии x от первой в диапазоне dx зависит от величины x . Кроме того, $P_1(dx/x)$ пропорциональна dx

$$P_1(dx/x) = \varphi(x) dx$$

Если рассматривать однородный материал, то ясно, что чем больше расстояние x от первой трещины, тем более вероятно появление второй трещины.

2. Для данного напряженного состояния существует характерный линейный размер x_0 такой, что вероятность возникновения второй трещины на расстоянии x_0 больше, чем на расстоянии $x < x_0$. Это предположение можно записать, например, в таком виде:

$$P_1\left(\frac{dx}{x}\right) = \frac{n}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} dx \quad (2.7)$$

где x_0 и n — некоторые параметры, причем $n > 1$. Если $n = 1$, то (2.7) приводит к основному соотношению, которое делается при выводе закона Пуассона о распределении точек на прямой. В этом случае вероятность попадания точки на отрезок dx не зависит от наличия точек в соседних отрезках.

3. Вероятность возникновения двух трещин на бесконечно малом отрезке dx равна нулю

$$P_2(dx) = 0, \quad P_0(dx) = 1 - P_1(dx) \quad (2.8)$$

Вычислим вероятность того, что на отрезке $(x + dx)$ нет ни одной трещины. По формуле умножения вероятностей

$$P_0(x + dx) = P_0(x) P_0(x^{-1}dx) \quad (2.9)$$

Подставляя сюда (2.7) и (2.8), получаем

$$P_0(x + dx) = P_0(x) \left[1 - \frac{n}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} dx\right]$$

Отсюда

$$\frac{dP_0}{dx} = -P_0 \frac{n}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}, \quad P_0 = \text{const} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right]$$

Постоянная определяется из условия $P_0(0) = 1$. Таким образом получаем

$$P_0(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right]$$

Очевидно, что $P_0(x)$ есть вероятность того, что осколок имеет длину большую x , т. е. функция распределения (2.2) связана с P_0 соотношением

$$\Phi(x) = 1 - P_0(x)$$

Дифференциальная вероятность dp есть вероятность одновременного осуществления двух событий: ни одной трещины на отрезке x и одна трещина на отрезке dx

$$dp = P_0(x) P_1(x^{-1}dx) = \frac{n}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right] dx \quad (2.10)$$

Это выражение естественно совпадает с (2.3), если в последнем положить

$$F(x) = (x/x_0)^n$$

Подставляя это выражение в (2.6), получаем закон Розина — Рамллера в виде

$$V(x) = V_0 \exp [-(x/x_0)^n] \quad (2.11)$$

Средний размер осколков вычисляется обычным способом

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x dp \quad (2.12)$$

отсюда после подстановки (2.10) и вычислений

$$\langle x \rangle = x_0 \Gamma(1 + 1/n), \quad \Gamma(1 + 1/n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/n} dt \quad (2.13)$$

Дисперсия величины x вычисляется обычным способом по формуле

$$D = \int_0^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 dp = \langle x \rangle^2 \left[\frac{1 + 1/n}{\Gamma(1 + 1/n)} - 1 \right] \quad (2.14)$$

Как отмечено выше, в рассматриваемом случае $n \gg 1$, так что аргумент Γ -функции в (2.13) и (2.14) изменяется в диапазоне от единицы до двух. При этих значениях аргумента Γ -функция имеет величину порядка единицы. Имеют место приближенные соотношения

$$\langle x \rangle \approx x_0, \quad D \approx \langle x \rangle^2/n \quad (2.15)$$

раскрывающие статистический смысл параметров n и x_0 в законе Розина — Рамллера в форме (2.11). Средний размер осколка вследствие (2.5) понимается при этом как «средневзвешенный». Экспериментальные величины будем обозначать индексом z . Экспериментальное определение среднего производится по формуле

$$\langle x_z \rangle = \sum_{i=1}^j x_{iz} \Delta p_i = \sum_{i=1}^j x_{iz} \frac{\Delta V_{iz}}{V_0} \quad (2.16)$$

Здесь x_{iz} — средний размер i -й группы, ΔV_i — объем (вес) i -й группы, V_0 — общий объем (вес) анализируемой массы, j — число групп.

Параметр n определяет равномерность дробления. Очевидно, что чем меньше дисперсия, тем более «кучно» расположены все значения x относительно точки $x = \langle x \rangle$, т. е. тем равномернее дробление. Из (2.15) следует, что равномерность дробления увеличивается с ростом n . С этим же параметром связан перерасход энергии на излишний перемол породы.

Предположим, что все образующиеся после взрыва осколки геометрически подобны. Тогда осколок, обладающий характерным размером x , имеет поверхность s и объем v , равные соответственно

$$s = k_s x^2, \quad v = k_v x^3$$

где k_s, k_v — постоянные коэффициенты. Общая поверхность всех осколков определяется выражением

$$S = \int_0^{\infty} s dm = V_0 \frac{k_s}{k_v} \int_0^{\infty} \frac{dp}{x} = \frac{V_0}{x_0} \frac{k_s}{k_v} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

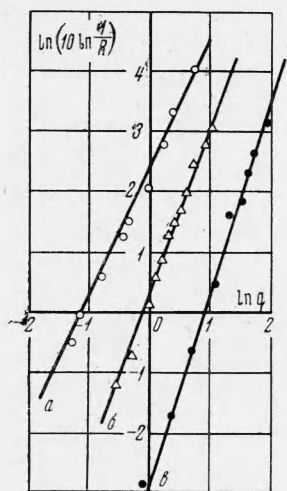
Оптимальный вариант дробления осуществляется, когда весь объем V_0 разрушается на одинаковые куски размером $\langle x \rangle$. При этом поверхность всех осколков

$$\langle S \rangle = \frac{V_0 k_s}{\langle x \rangle k_v}$$

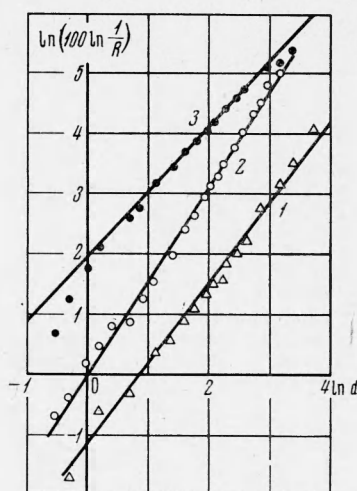
Относительная доля «лишней» поверхности

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{S - \langle S \rangle}{S} = \frac{x}{x_0} \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Случай $n = 1$, соответствующий пуассоновскому распределению, в этом смысле является самым невыгодным; общая поверхность всех частиц, а



Фиг. 1



Фиг. 2

следовательно, и энергия, идущая на ее образование, стремятся к бесконечности. С увеличением n эта величина быстро убывает и при $n = 1.5$ составляет 1.42. Отметим в заключение, что при больших значениях n (порядка 2—3) закон распределения (2.10) весьма близок к нормальному (гауссовскому) распределению.

3. Экспериментальная проверка простой функции распределения. Для предложенной выше одномерной модели разрушения хорошее экспериментальное приближение можно получить взрывным разрушением колец. Такие кольца для экспериментов изготавливались из алюминия.

При соответствующим образом подобранных параметрах ВВ и материала кольца основная масса осколков образуется радиальными трещинами. Сбор осколков после подрыва представляет значительные экспериментальные трудности. Для достаточно убедительного анализа осколков нужно уловить как можно большее их количество. Кроме того, торможение осколков должно осуществляться медленно, чтобы избежать вторичного дробления их. В проведенных опытах осколки затормаживались снегом. Эксперименты проводились в достаточно большой камере, заполнявшейся уплотненным снегом. Заряд ВВ (ТГ 50 / 50) в виде цилиндрической пашки устанавливался внутри кольца на бумажной подставке и помещался в центре камеры.

После взрыва камера промывалась горячей водой и осколки свободно извлекались из нее. Таким путем удается извлекать осколки общим весом от 90 до 100% первоначального веса кольца. В каждой серии с фиксированными параметрами ВВ и кольца проводилось по 3—5 опытов в зависимости от количества образующихся осколков. Общее количество осколков в каждой серии составляло от 50 до нескольких сот штук. Результаты опытов оформлялись в виде таблиц значений $R(x) = V(x) / V_0$, соответствующих различным значениям x . В случае колец величина x измерялась весом ос-

колка q . Затем строились графики $R(x)$ в двойном логарифмическом масштабе. Согласно (2.11), в координатах $\ln \ln(1/R)$, $\ln x$ эта зависимость должна выражаться прямой

$$\ln \ln(1/R) = n(\ln x - \ln x_0) \quad (3.1)$$

Примеры таких графиков показаны на фиг. 1—4. На фиг. 1 представлены результаты опытов по разрушению дюралюминиевых колец. Разрушались кольца постоянного внутреннего диаметра 80 мм, постоянной высоты 10 мм, толщиной $\delta = 2, 4, 8$ мм, которые на фиг. 1 соответствуют кривые a, b, c . Заряд ВВ был в виде шашки ТГ весом 18 г, диаметром 35 мм и высотой 10 мм; значения параметров n, x_0 приведены в табл. 1. Как видно, все экспериментальные точки хорошо описываются формулой (3.1).

Таблица 1

	$\delta, \text{мм}$			$Q, \text{г}$			
	2	4	8	4	8	18	43
n	2.2	2.8	3.3	1.9	2.7	2.2	1.3
$x_0, \text{см}$	1.7	1.7	2.0	4.7	2.7	1.7	0.5
$\langle x \rangle, \text{см}$	1.4	1.4	1.8	4.1	2.4	1.5	0.4

Вторая группа экспериментов была проведена с кольцом постоянной толщины (2 мм), но с зарядами различного веса: $Q = 4, 8, 18$ и 43 г. Параметры распределения для группы опытов также приведены в табл. 1.

Средние значения $\langle x_z \rangle$, указанные в табл. 1, вычислены по формуле (2.13). Эти величины практически совпадают со средними значениями, вычисленными

по формуле (2.5). Расхождение во всех случаях не превышает 10%.

По данным 4, 5 и 6-го столбцов табл. 1 можно установить зависимость x_0 от веса заряда Q в виде

$$x_0 = \text{const } Q^{-2/3} \quad (3.2)$$

Четвертая точка дает отклонение в сторону уменьшения x_0 . До тех пор пока диаметр заряда мал по сравнению с диаметром кольца, можно считать, что давление на фронте ударной волны пропорционально корню кубическому из веса ВВ. Возникающие в кольце растягивающие усилия, очевидно, имеют величину, прямо пропорциональную давлению в ударной волне. Обозначив растягивающее напряжение через p , имеем

$$x_0 \sim p^{-2}$$

Этот результат согласуется с формулой (1.5), в которой нужно положить $h = x_0$; так как $\text{th}(\pi l/h) \approx 1$ при $l \geq h$, то из (1.5) имеем

$$x_0 = \pi l_* (\sigma_* / p)^2$$

Зависимость среднего размера от толщины кольца δ при постоянном весе ВВ по данным табл. 1 может быть представлена в виде $x_0 \sim \delta^{0.3}$. Качественно этот результат согласуется с формулой (1.7), расхождение в показателях степени можно объяснить сильной упрощенностью модельной задачи.

Для выяснения функции распределения в более общем случае были произведены лабораторные опыты с образцами более сложной конструкции. Взрывы производились в цилиндрических блоках с высотой, равной диаметру, изготовленных из оргстекла, а также из менделеевской замазки. Сосредоточенный заряд (гексоген) помещался в центре блока. Технология сбора осколков такая же, как и в случае с металлическими кольцами. Вследствие большого количества образующихся осколков (в некоторых опытах порядка 10^6) анализ гранулометрического состава проводился при помощи отсева через сита с калиброванными отверстиями от 0 до 24 мм.

Результаты трех серий опытов на плексигласовых блоках размером 140 мм с зарядами весом 3, 10, 100 г показаны графически на фиг. 2 (соответственно прямые 1, 2, 3). Как видно, и в этом случае функция распределения Розина — Рамллера хорошо описывает опытные данные.

Тот факт, что функция распределения (2.11) неплохо описывает результаты лабораторных опытов с цилиндрическими блоками, наводит на мысль о применимости закона Розина — Рамллера к анализу гранулометрического состава взорванной массы и в более сложных случаях. Следует ожидать, что точность такого анализа будет меньше, чем в предыдущих случаях.

4. Функция распределения осколков при взрывании конструкций произвольной формы. Рассмотрим действие сосредоточенного заряда в сплошном или ограниченном массиве горной породы. Физическая картина разрушения примерно следующая. Волны сжатия и растяжения, проходя по

среде, вызывают раскрытие микротрещин, распространение которых при последующем движении среды под действием продуктов детонации приводит к образованию осколков.

Так как интенсивность волн убывает с расстоянием от заряда, то убывают и напряжения, приводящие к разрушению.

Будем рассматривать образование осколков в каждом элементарном сферическом слое радиуса r и толщиной dr . Очевидно, что средние размеры осколков в каждом слое увеличиваются с удалением от центра взрыва. Сделаем следующие предположения:

1) в каждом элементарном слое распределение осколков описывается функцией (2.11)

$$V_r(x) = 4\pi r^2 \exp[-(x/x_0)^n] dr$$

2) величина n не меняется с расстоянием, а x_0 увеличивается по закону

$$x_0 = Ar^\omega$$

Объем всех осколков, имеющих размер, больший, чем x , равен

$$V(x) = \int_{r_0}^R 4\pi r^2 \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0(r)}\right)^n\right] dr \quad (4.1)$$

Интегрирование производится в пределах от радиуса полости до радиуса разрушения R_0 в случае неограниченного массива. Если взрыв производится в ограниченной области, то под R_0 следует понимать ее характерный размер. Во всех практически важных случаях $R_0 \gg r_0$.

Проинтегрируем (4.1) по частям

$$V(x) = \frac{4\pi}{3} \left\{ R_0^3 \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0(R_0)}\right)^n\right] - r_0^3 \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0(r_0)}\right)^n\right] \right\} - \frac{4\pi\omega n}{3} \int_{r_0}^{R_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right] r^2 dr \quad (4.2)$$

Проведенная оценка показывает, что величиной второго слагаемого в правой части этого равенства можно пренебречь по сравнению с первым, если выполняется условие $\omega n > 2$. Так как здесь всюду $n \geq 1$, то такое пренебрежение возможно, если $\omega > 2$.

Предположим, что такое неравенство имеет место. Тогда из (4.2), принимая во внимание, что $R_0 \gg r_0$, получаем

$$V(x) = V_0 \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0(R_0)}\right)^n\right], \quad V_0 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \quad (4.3)$$

Таким образом, и в этом случае приходим к формуле Розина — Раммера.

Как видно, средний размер куска определяется напряженным состоянием на границе зоны разрушения при взрыве в неограниченной среде или на поверхности ограниченного массива. Результат этот следует понимать чисто условно, так как в первом случае нет четкого определения радиуса зоны разрушения, а во втором случае напряженное состояние вблизи свободной границы, вообще говоря, неизвестно. Обычно под границей зоны разрушения понимается такая поверхность, на которой выполняется некий статический критерий разрушения, например равенство растягивающего напряжения прочности на разрыв. В теории хрупкого разрушения это означает, что имеется одна предельная трещина, длина которой определяется выражением (1.3). Ясно, что для статистического анализа осколков, когда подразумевается наличие большого количества трещин, такое определение не подходит. Тем не менее выражение (4.3) может оказаться полезным для построения эмпирической формулы с целью уменьшения числа параметров, подлежащих экспериментальному определению.

Предположим, что растягивающее напряжение, возникающее в среде при взрыве заряда весом Q на расстоянии r от центра взрыва, определяется как

$$\sigma_r = B_0 (Q^{1/3}/r)^{\xi} \quad (B_0 = \text{const}) \quad (4.4)$$

Здесь константа зависит от свойств ВВ и среды. Далее предположим, что хрупкие свойства среды определяются параметром K_0 (1.1). Тогда из соображений размерности имеем

$$x_0 = B_2 \frac{K_0^2}{\sigma_r^2} \quad (B_2 = \text{const}) \quad (4.5)$$

Из этих выражений получаем при $r = R_0$

$$x_0 = B_3 K_0^2 \left(\frac{R_0}{Q^{1/3}} \right)^{2\xi}$$

или, вводя удельный расход ВВ $w = Q / V_0$ имеем

$$x_0 = B_4 K_0^2 (V_0/Q)^{2/\xi} = B_5 K_0^2 w^{-2/\xi} \quad (B_4, B_5 = \text{const}) \quad (4.6)$$

В этом выражении x_0 не зависит от масштаба взрыва, что в общем случае соответствует опытным данным. Дело в том, что рассуждения, приводящие к формуле (4.6), по существу основаны на статических рассуждениях. Масштабный же фактор, оказывается, непосредственно связан с кинетикой трещин. Предположим, что рассматриваются два взрыва сферических зарядов Q и k^3Q в неограниченном массиве или геометрически подобных кусках. Тогда на подобных расстояниях: r в первом случае и kr во втором — напряжения, возникающие при прохождении волны в соответствующие моменты времени, будут просто одинаковыми. Согласно статическим представлениям первоначально создающаяся система трещин должна быть одной и той же.

Однако время действия этих напряжений во втором случае больше. Если грубо предположить, что длина волны во втором случае в k раз больше, чем в первом, и что развитие трещин происходит на определенной постоянной части длины волны, то отсюда получаем, что возникающая сетка трещин во втором случае развивается в течение времени, в k раз большем, чем в первом. В конце п. 4 было показано, что развитие системы трещин обладает неустойчивостью: если какая-то трещина случайно стала больше соседних, то ее скорость увеличивается, а скорость соседних убывает. Для простейшей системы трещин расстояние между ними при прохождении длины L увеличивается в отношении $(L/l_0)^{1/n}$, где $2l_0$ — первоначальная длина трещин.

В общем случае показатель степени может быть и другим, так как первоначальная сетка трещин имеет более сложную структуру.

Если под величиной L понимать длину волны, пропорциональную $Q^{1/3}$, то, вводя дополнительный множитель в (4.6), получаем эмпирическую формулу

$$x_0 = B (V_0/Q)^{2/\xi} Q^{1/3\beta} \quad (4.7)$$

Здесь β — масштабный фактор, ξ — коэффициент затухания напряжений. Постоянную B на данном этапе исследования вряд ли стоит конкретизировать на основании формул (4.4) и (4.5) в силу их грубой приближенности. Кроме того, величина K_0 , например, для большинства горных пород просто неизвестна, так как в соответствии с формулами (1.1) и (1.2) включает в себя удельную работу пластических деформаций. Таким образом, в формуле (4.7) подлежат определению параметры B , ξ , β .

5. Экспериментальные взрывы в горных породах. Экспериментальная проверка применимости закона Розина — Раммера при статистическом анализе гранулометрического состава взорванной массы горной породы была впервые проделана в работе [7].

На основе анализа большого количества промышленных взрывов было показано, что формула (2.1) довольно хорошо описывает опытные данные. Однако при вычислении среднего размера куска авторы работы [7] не получили удовлетворительных результа-

тов. Расхождение между теоретическими и экспериментальными значениями составляло 50—60%. Для уточнения этого обстоятельства нами были проведены дополнительные эксперименты.

Опыты производились в известняке восьмой категории прочности. Было проведено две серии опытов. В одной из них взрывы производились в отдельных камнях, в другой на выброс из сплошного массива. Применялись заряды гексогена. Вес заряда изменял-

Таблица 2

№ опыта	Q	Q°	x ₀	n
1	0.5	538	6.36	1.92
2	0.5	4866	19.3	2.04
3	0.2	2353	26.6	1.73
4	0.2	1250	13.7	2.05
5	0.1	1727	23.3	1.8
6	0.1	1221	23.3	1.77
7	0.04	855	55	1.32
8	0.04	1388	52	1.52
9	0.02	859	39.6	1.68
10	0.0005	2.13	4.7	1.29
11	0.0005	0.8	1.5	1.28

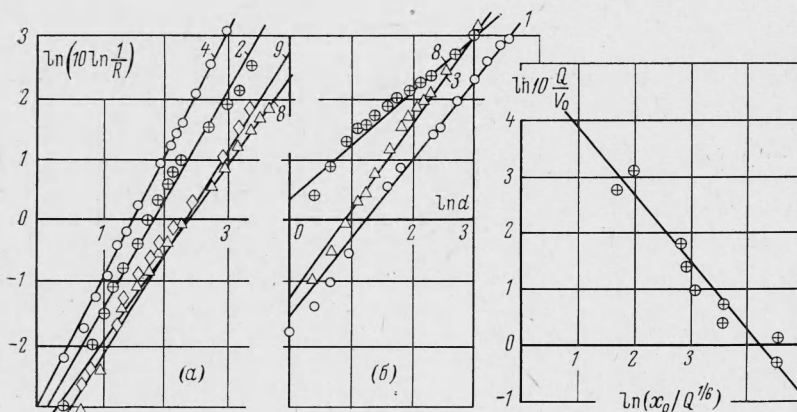
Таблица 3

№ опыта	Q	Q°	x ₀	H	n
1	0.5	1711	28.2	87	1.59
2	0.5	1862	19.9	70	1.3
3	0.2	465	14.6	48	1.7
4	0.1	500	20.7	50	1.56
5	0.1	220	13.5	40	1.5
6	0.05	161	15.6	30	1.44
7	0.05	332	11.2	30	1.47
8	0.02	79	8	20	0.91
9	0.02	29	31.2	20	1.32

ся в диапазоне от 20 до 500 г. Каждый опыт с одним и тем же весом ВВ и приблизительно одинаковыми размерами камней и проводился 2—3 раза. Гранулометрический состав взорванной массы анализировался при помощи ситового отсева и взвешивания соответствующих фракций. Отношение этого веса к общему весу собранных осколков определяет величину

$$R(x) = V(x) / V_0$$

Параметр x в данном случае есть диаметр отверстия в соответствующем сите d . Аналогично обрабатывались все эксперименты. Параметры взрывов и результаты обработки приведены в табл. 2 и 3, а также на фиг. 3, а и б соответственно для взрывов в отдельных камнях и на выброс.



Фиг. 3

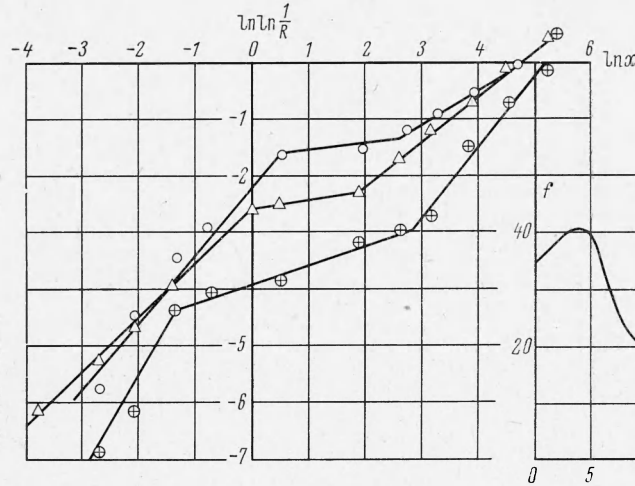
Фиг. 4

Прямые через экспериментальные точки при наличии существенного разброса точек проводились по методу наименьших квадратов. Номер прямой на фигурах соответствует номеру опыта. Кроме того, определялось среднее значение $\langle x_2 \rangle$, вычисленное непосредственно из экспериментов по формуле (2.16).

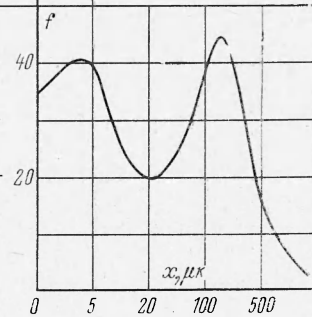
Максимальное расхождение между величинами $\langle x \rangle$ и $\langle x_2 \rangle$, вычисленное по формуле (2.13), составляет не более 15%, а в большинстве случаев не более 4—6%.

Сравним данные для двух взрывов в камнях (табл. 2). Заряд весом 500 г в камне весом 5000 кг дает средний осколок размером ≈ 19 см.

При взрыве заряда весом 0.5 г в камне весом 2.130 кг образуются осколки со средним размером ≈ 50 см. При возрастании масштаба примерно в 10 раз размер осколка увеличивается в четыре раза. Можно считать, что при увеличении масштаба взрыва в k раз средний размер осколка растет как $k^{1/2}$. Таким образом, в формуле (4.7) $\beta = 1/2$.



Фиг. 5



Фиг. 6

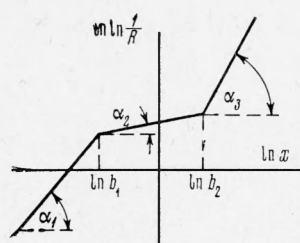
Зависимость среднего размера осколка от удельного расхода можно получить, если все данные таблицы представить на графике в координатах $\ln(10Q/V_0)$, $\ln(x_0/Q^{1/2})$. Этот график показан на фиг. 4 и окончательный результат может быть представлен в виде формулы

$$x_0 \approx 10Q^{1/2} (V_0/Q)^{1/2} \quad (5.1)$$

Здесь Q — вес ВВ в кг, V — объем разрушенного грунта в m^3 , x_0 — средний размер куска в см.

При взрывах на выброс получить формулу, аналогичную (5.1), в настоящее время не удалось, так как диапазон изменения x_0 в опытах был весьма невелик.

6. Влияние неоднородностей среды на структуру функции распределения.



Фиг. 7

Если разрушаемый взрывом материал содержит неоднородности и предварительно нарушен микроскопическими трещинами, то распределение осколков по размерам становится более сложным. Рассмотрим для примера результаты одного из опытов, приведенных в работе [8]. Взрывались образцы из песчаника, состоящего, как известно, из очень прочных зерен, расположенных внутри менее прочной скрепляющей массы. Обработка данных работы [8] в координатах $\ln \ln R^{-1}$ и $\ln x$ приводит к графику, показанному на фиг. 5. Если же, как и в [8], построить графически зависимость

плотности распределения от размеров фракций, то получится кривая с двумя максимумами (фиг. 6). Один из них соответствует среднему размеру прочных зерен, второй — среднему размеру осколков, образующихся от внешнего воздействия.

Формально, здесь рассматриваются два совокупных распределения: одно задано структурой среды, другое вызвано взрывным воздействием. Изложенный выше статистический подход к определению гранулометрического состава взорванной массы может быть распространен и на этот более сложный случай.

Рассмотрим функцию распределения $1-R(x)$ в виде (2.2), где $F(x)$ — произвольная функция.

Для случая, подобного изображенному на фиг. 5, когда график зависимости $\ln \ln R^{-1}$ от $\ln x$ представлен тремя прямыми, функцию $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \exp \left(a + \frac{n_1 + n_3}{2} \ln x + \frac{n_2 - n_1}{2} |\ln b_1 x| + \frac{n_3 - n_2}{2} \left| \ln \frac{x}{b_2} \right| \right)$$

где $a, b_1, b_2, n_1, n_2, n_3$ — параметры распределения. Схематически такой график показан на фиг. 7, на которой приведено также обозначение характерных точек через параметры распределения. Подставляя $F(x)$ в (2.2), получаем после двойного логарифмирования

$$\ln \ln R^{-1} = \begin{cases} n_1 \ln x + C_1 & \text{при } \ln x \leq -\ln b_1 \\ n_2 \ln x + C_2 & \text{при } -\ln b_1 \leq \ln x \leq \ln b_2 \\ n_3 \ln x + C_3 & \text{при } \ln x \geq \ln b_2 \end{cases}$$

$$C_1, C_2, C_3 = \text{const}$$

Для дифференциала вероятности dp имеем

$$dp = F'(x) e^{-F(x)} dx = f(x) dx$$

Функция $F(x)$ определяется следующими выражениями:

$$F(x) = e^a b_1^{(n_1 - n_2) / 2} b_2^{(n_3 - n_2) / 2} x^{n_1} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1/b_1$$

$$F(x) = e^a b_1^{(n_2 - n_2) / 2} b_2^{(n_3 - n_2) / 2} x^{n_2} \quad \text{при } 1/b_1 < x \leq b_2$$

$$F(x) = e^a b_1^{(n_2 - n_1) / 2} b_2^{(n_3 - n_1) / 2} x^{n_3} \quad \text{при } b_2 < x < \infty$$

В соответствии с этим плотность распределения

$$f(x) = \frac{n_i}{x_{0i}} \left(\frac{x}{x_{0i}} \right)^{n_i - 1} \exp \left[- \left(\frac{x}{x_{0i}} \right)^{n_i} \right] \quad (i = 1, 2, 3)$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют интервалам изменения x : $(0, 1/b_1)$, $(1/b_1, b_2)$, (b_2, ∞) .

Величины x_{0i} имеют при этом следующие значения:

$$x_{01} = [e^{-a} b_1^{(n_2 - n_1) / 2} b_2^{(n_3 - n_1) / 2}]^{1/n_1}$$

$$x_{02} = [e^{-a} b_1^{(n_1 - n_2) / 2} b_2^{(n_2 - n_3) / 2}]^{1/n_2}$$

$$x_{03} = [e^{-a} b_1^{(n_1 - n_2) / 2} b_2^{(n_3 - n_1) / 2}]^{1/n_3}$$

Средний размер осколка, вычисляемый по (2.12), в данном случае представляется в виде следующей формулы:

$$\langle x \rangle = x_{01} G_1 \left[\left(\frac{1}{b_1 x_{01}} \right)^{n_1}, 1 + \frac{1}{n_1} \right] + x_{02} \left\{ G_1 \left[\left(\frac{b_2}{x_{02}} \right)^{n_2}, 1 + \frac{1}{n_1} \right] - G_1 \left[\left(\frac{1}{b_1 x_{02}} \right)^{n_2}, 1 + \frac{1}{n_2} \right] \right\} + x_{03} G_2 \left[\left(\frac{b_2}{x_{03}} \right)^{n_3}, 1 + \frac{1}{n_3} \right] \quad (6.1)$$

Здесь $G_1(x, a)$ и $G_2(x, a)$ — неполные Γ -функции

$$G_1(x, a) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad G_2(x, a) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$$

Рассмотрим результаты трех экспериментов, взятые из работы [8]. По этим данным построены графики, показанные на фиг. 5. Определенные по этим графикам величины параметров b_1 , b_2 , n_1 , n_2 , n_3 , $\ln b_1$, $\ln b_2$, а также средние значения $\langle x \rangle$, вычисленные по формуле (6.1), и $\langle x_z \rangle$, определенные непосредственно из опытных данных, приведены в табл. 4. Как видно из приведенных графиков, обобщенный закон Розина — Раммлера в форме (2.2) может быть с достаточной точностью применен для анализа гранулометрического состава взорванной массы и вычисления среднего размера осколка. Заметим, что фракции, обязанные своим происхождением структурной неоднородности материала, описываются правой частью графиков, приведенных на фиг. 5. При этом n_3 , как видно из табл. 4, всегда меньше единицы. Для разрушения однородных материалов распределение осколков описывается формулой (3.1) с $n > 1$. Этот факт был

Таблица 4

№	n_1	n_2	n_3	$\ln b_1$	$\ln b_2$	$\langle x \rangle$ (мм)	$\langle x_z \rangle$ (мм)
1	1.26	0.2	0.7	0.5	2.6	132	112.9
2	1.05	1.125	0.78	0	1.9	169	125.9
3	1.7	0.3	1	1.4	2.8	193	133.2

существенным при теоретическом построении простой функции распределения. В рассматриваемом случае величина n_3 должна быть меньше единицы, что вытекает из следующих рассуждений. Представим себе, что разрушаемый объект состоит из

очень прочных блоков со средним размером x_{03} , скрепленных между собой при помощи менее прочного материала. Ясно, что образование осколка размером меньше, чем x_{03} , будет менее вероятно, чем образование фрагмента, содержащего несколько прочных блоков. Иными словами, показатель степени в формуле (3.2) в данном случае должен быть отрицательным, или $n < 1$. В том случае, когда неоднородность среды обусловлена сильно развитой трещиноватостью, ситуация должна быть противоположной. Вероятность образования куска с размером, большим того, который заранее определен системой предварительных трещин, менее вероятно, чем куска меньшего размера.

В этом случае имеем две прямые с наклонами $\operatorname{tg} \alpha_1 = n_1 > 1$, $\operatorname{tg} \alpha_3 = n_3 > 1$, соединенные между собой отрезком с $\operatorname{tg} \alpha_2 = n_2 \approx 1$. Вообще говоря, вопрос о влиянии предварительной трещиноватости в настоящее время исследован еще недостаточно. Основная причина состоит, по-видимому, в том, что не существует удовлетворительного способа экспериментального определения трещиноватости внутри массива.

Поступила 4 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д. Д. О теории квазихрупкого разрушения. ПМТФ, 1967, № 6.
2. W e l l s A. A., P o s t D. The dynamics stress distribution surrounding a renning crack. A photoelastic analysis. Proc. Soc. Experimental Stress Analysis, 1958, vol. 16, No. 1.
3. К у з н е ц о в В. М. О нестационарном распространении системы трещин в хрупком материале. ПМТФ, 1968, № 2.
4. К у з н е ц о в В. М., М а р т ы н ю к П. А., П о т ы л и ц ы н А. И. Экспериментальное исследование развития изолированной трещины. ПМТФ, 1968, № 4.
5. К о л м о г о р о в А. Н. О логарифмически-нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении. Докл. АН СССР, 1941, т. 31, № 2.
6. G i l v a g g u J. J. Fracture of brittle solids. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 3.
7. Б а р о н Л. И., С и р о т ю к Г. Н. Проверка применимости уравнения Розина — Раммлера для исчисления диаметра среднего куска при взрывной отбойке горных пород. В сб. «Взрывное дело», М., «Недра», 1967, № 62/19.
8. Б а р о н В. Л. Исследование по дроблению каменных блоков действием взрыва в Англии. В сб. «Взрывное дело», М., «Недра», 1962, № 50/7.