

УДК 622.1/2

**НЕЕВКЛИДОВА МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ ГЛУБОКОЗАЛЕГАЮЩЕГО  
ПОРОДНОГО МАССИВА В УСЛОВИЯХ НЕСОВМЕСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

**Кс. П. Чжоу<sup>1</sup>, Кв. Х. Цянь<sup>2,3,4</sup>**

<sup>1</sup>Главная лаборатория новых технологий строительства городов в горных районах,  
Университет Чонкин, Министерство образования Китая, Chongqing 400045, PR China

<sup>2</sup>Школа гражданского строительства, Университет Чонкин, Chongqing 400045, China

<sup>3</sup>Университет науки и технологий PLA, Nanjing 210007, China

<sup>4</sup>Государственная главная лаборатория предупреждения катастрофических событий  
и ослабления последствий взрывов и техногенных воздействий,  
Университет науки и технологий PLA, Nanjing 210007, China

Глубокозалегающий породный массив рассматривается как сыпучий материал, включающий равномерно распределенные дефекты. Дефекты характеризуются переменной нарушения, определяемой методами Мори–Танака или Сидорова, в которых рассматривается взаимодействие микротрещин. Исследовано влияние ранее имеющихся и вторичных микротрещин на скалярную кривизну и плотность свободной энергии. Разработана новая неевклидова модель деформирования массива для изучения влияния на развитие существующих и появление вторичных микротрещин. Установлен эффект влияния существующих и вторичных микротрещин на самоуравновешенные напряжения при условии несовместности свободной энергии и деформации. Определены поля напряжений во вмещающем породном массиве вокруг глубинного тоннеля круглого сечения с помощью новой неевклидовой модели.

*Дефекты, переменная нарушений, самоуравновешенные напряжения, новая неевклидова модель, глубокозалегающий породный массив, ранее существующие и вторичные микротрещины*

**ВВЕДЕНИЕ**

Глубокозалегающие породные массивы характеризуются наличием разномасштабных дефектов: контактов, систем трещин, разрывных нарушений, сформированных на стадии образования породного массива и последующих тектонических процессов микро- и макроскопического уровня. Контакты, трещиноватость и сбросы существенно влияют на характер поведения породного массива при деформации и разрушении. Более того, зарождение, развитие и укрупнение микротрещин является причиной “деградации” породы с последующим разрушением ее структуры. Итак, микродефект породного материала — это распространенный и очень важный элемент в механике горных пород. При наличии макротрещин, контактов и сбросов контакт-элемент Гудмана или ему подобные аппроксимации можно использовать для моделирования геологических нарушений в породных массивах. Во многих публикациях сделано предположе-

Работа выполнена при поддержке Китайского Национального фонда наук о Земле (проекты № 51021001, 51078371 и 51279218).

ние о том, что породный массив, содержащий микродефекты, можно рассматривать как непрерывную среду без учета влияния микродефектов на разрывную и несовместную деформацию. Однако с точки зрения механики неоднородных сред каждый тип микродефекта соотносится с континуальным состоянием с внутренними самоуравновешенными напряжениями [1] и его влияние можно не учитывать.

Данные исследования посвящены изучению влияния микротрещин на внутренние самоуравновешенные напряжения, индуцируемые несовместной деформацией, с помощью неевклидовой модели (Гузева–Мясникова). Известно, что величина деформации в результате взаимодействия микродефектов не удовлетворяет условиям совместности в отличие от деформаций, индуцируемых внешними нагрузками [1]. Отсюда для ненарушенных пород поле напряжений может содержать только упругие напряжения, в то время как при наличии микродефектов в породном массиве поле напряжений может состоять из упругих самоуравновешенных напряжений. Если деформация породного материала с дефектами удовлетворяет условиям несовместности, то описание напряжений следует выполнять с помощью “неевклидовых” геометрических объектов [1–4]. При описании механического поведения дефектосодержащих материалов в неевклидовых моделях для непрерывной среды приемлемы общие зависимости термодинамики [2, 3].

Неевклидовы геометрические объекты введены Гузевым и Мясниковым для параметризации ненулевых внутренних самоуравновешенных напряжений [4]. Определены геометрическая структура поля смещений, уравнение состояния, точное решение для вихревого поля дислокаций [1]. Неевклидова континуальная модель используется для изучения механизма зональной дезинтеграции пород вокруг тоннелей круглого сечения в условиях гидростатического и негидростатического давлений [6]. С ее помощью изучено влияние осевого локального напряжения на зональную дезинтеграцию вмещающего породного массива вокруг круглого тоннеля [7]. Неевклидова континуальная модель используется также для изучения механизма зональной дезинтеграции\* поперечно-анизотропного породного массива вокруг глубокозалегающего тоннеля круглого сечения [8].

Следует подчеркнуть, что неевклидова континуальная модель не позволяет понять физический процесс и микроскопические механизмы внутренней метрической и скалярной кривизны в глубокозалегающих породных массивах. По мнению авторов работы, следует уделить еще значительное внимание изучению влияния переменной нарушения, индуцированного микротрещинами, на внутреннюю метрическую и скалярную кривизну, а также на неевклидову модель, чему собственно посвящено данное исследование.

#### АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

**Влияние микротрещин на скалярную кривизну неевклидова пространства.** Предположив, что глубокозалегающий породный массив содержит равномерно распределенные трещины одинаковой начальной протяженности  $2c_0$  и плотности  $\eta_0$ , суммарную деформацию тела можно выразить через тензор Альманси [10]:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - D_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

\*Открытие № 400 СССР. Явление зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок / Е. И. Шемякин, М. В. Курленя, В. Н. Опарин и др. // Оpubл. в БИ. — 1992. — № 1.

где  $D_{ij}$  — внешний метрический тензор;  $u_i = x_i - U_i(x, t)$ ,  $U_i(x, t)$  — поле смещений в евклидовом пространстве.

Тензор деформации, индуцированной внутренней геометрией породного материала, выражается в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - d_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right), \quad (2)$$

где  $d_{ij}$  — внутренний метрический тензор;  $u_i = x_i - U'_i(x, t)$ ,  $U'_i(x, t)$  — поле смещений относительно внутренней геометрии.

Для упругого породного массива внутренняя геометрия совпадает с геометрией евклидова пространства и внутренний метрический тензор идентичен внешнему метрическому тензору. Условие совместности деформации  $R = 2[\Delta\varepsilon_{ll} - (\partial^2\varepsilon_{ij})/(\partial x_i\partial x_j)] = 0$  при этом удовлетворяется, и классическая теория упругости приемлема для описания внутренней структуры породного материала [1, 9].

В породном массиве с дефектами в условиях высокого локального давления, например в глубокозалегающем породном массиве, имеет место несовместная деформация породного массива. Внутренняя геометрия не совпадает с геометрией евклидова пространства. Другими словами, внутренний метрический тензор не идентичен внешнему. Деформация глубокозалегающего породного массива не удовлетворяет условиям совместности. Тогда условие несовместности деформации можно записать как [1, 10]

$$R = 2\left(\Delta\varepsilon_{ll} - \frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}\right) \neq 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{ll} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — тензор деформации, определяемый внутренней геометрией породного материала;  $R$  — скалярная кривизна.

Согласно методу Мори – Танака [11], методу Сидорова [12] и работам Гузева [1], плотность свободной энергии глубокозалегающего породного массива, содержащего дефекты, выражается в виде

$$F = \frac{\lambda_1(1-D_0)^2 a_{kk}^2}{2} + \mu_1(1-D_1)^2 a_{ij}a_{ij} + \frac{\lambda_2(1-D_2)^2 \varepsilon_{kk}^2}{2} + \mu_2(1-D_3)^2 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + g a_{kk}\varepsilon_{ii}(1-D_0)(1-D_2) - \frac{\mu_3(1-D_3)^2 R^2}{4}, \quad (4)$$

где  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  — параметры Ламе относительно геометрии евклидова пространства;  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$  — параметры Ламе относительно внутренней геометрии породного материала;  $g$  и  $\mu_3$  — феноменологические параметры; переменные нарушения  $D_0 = \frac{\pi\omega_0}{1+\pi\omega_0}$ ,  $D_1 = \frac{\pi\omega_0}{1+\nu_0+\pi\omega_0}$ ,  $\omega_0 = \eta_0 c_0^2$ ,  $D_2 = \frac{\pi\omega}{1+\pi\omega}$ ,  $D_3 = \frac{\pi\omega}{1+\nu_1+\pi\omega}$ ,  $\omega = \eta c^2$ ;  $\nu_0 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)}$ ;  $\nu_1 = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2 + \mu_2)}$ ;  $\eta$ ,  $c$  — плотность и полудлина вторичных трещин;  $\eta_0$ ,  $c_0$  — плотность и полудлина первичных существующих микротрещин.

Согласно [1, 5], зависимость между плотностью свободной энергии, тензором деформации, индуцированной внутренней геометрией породного материала, и скалярной кривизной можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} + 2 \left( \delta_{ij} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial F}{\partial R} = 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем:

$$\lambda_2 \delta_{ij} \varepsilon_{kk} (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 \varepsilon_{ij} (1 - D_3)^2 + g \delta_{ij} a_{kk} (1 - D_0)(1 - D_2) - \mu_3 (1 - D_3)^2 \left( \delta_{ij} \Delta - \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_j} \right) R = 0. \quad (6)$$

В (6) объемная деформация, индуцируемая внутренней геометрией породного материала, может быть выражена через объемную деформацию Альманси и скалярную кривизну  $R$  по формуле

$$\varepsilon_{kk} = \frac{2 \mu_3 (1 - D_3)^2}{3 \lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2} \Delta R - \frac{3 g (1 - D_0)(1 - D_2)}{3 \lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2} a_{kk}. \quad (7)$$

Согласно (6) и (7), тензор деформации, индуцируемой внутренней геометрией породного материала, можно также выразить через объемную деформацию Альманси и скалярную кривизну:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \frac{\mu_3}{2 \mu_2} \left( \delta_{ij} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) R - \frac{g (1 - D_0)(1 - D_2)}{3 \lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2} a_{kk} \delta_{ij} - \\ & - \delta_{ij} \frac{\lambda_2 \mu_3 (1 - D_2)^2}{\mu_2 [3 \lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2]} \Delta R. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (3) и (8) зависимость между объемной деформацией Альманси и скалярной кривизной имеет вид

$$\frac{2 g (1 - D_0)(1 - D_2)}{3 \lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2} \Delta a_{kk} + \frac{R}{2} = \frac{\mu_3}{\mu_2} \frac{\lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2}{3 \lambda_2 (1 - D_2)^2 + 2 \mu_2 (1 - D_3)^2} \Delta R^2. \quad (9)$$

Согласно (4), тензор напряжений записывается так:

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = \sigma_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} a_{kk} (1 - D_0)^2 + 2 \mu_1 a_{ij} (1 - D_1)^2 + g \delta_{ij} \varepsilon_{kk} (1 - D_0)(1 - D_2). \quad (10)$$

В статике уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), получаем зависимость между объемной деформацией, определяемой внутренней геометрией, объемной деформацией Альманси и смещением относительно геометрии евклидова пространства:

$$[\lambda_1 (1 - D_0)^2 + \mu_1 (1 - D_1)^2] \nabla a_{kk} + \mu_1 (1 - D_1)^2 \Delta U + g (1 - D_0)(1 - D_2) \nabla \varepsilon_{kk} = 0, \quad (12)$$

где  $U$  — смещение относительно геометрии евклидова пространства.

Уравнение (12) переписывается следующим образом:

$$[\lambda_1 (1 - D_0)^2 + 2 \mu_1 (1 - D_1)^2] \nabla \operatorname{div} U + g (1 - D_0)(1 - D_2) \nabla \varepsilon_{kk} = \mu_1 (1 - D_1)^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} U). \quad (13)$$

Для глубокозалегающего породного массива безвихревое поле смещений означает, что  $\text{rot}U = 0$ , и тогда (13) упрощается:

$$[\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2]\nabla\text{div}U + g(1-D_0)(1-D_2)\nabla\varepsilon_{kk} = 0. \quad (14)$$

Более того, из (14) следует, что

$$\nabla\{[\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2]\text{div}U + g(1-D_0)(1-D_2)\varepsilon_{kk}\} = 0. \quad (15)$$

Интегрируя (15), находим

$$[\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2](1-\alpha)\text{div}U + g(1-D_0)(1-D_2)(1-\alpha)\varepsilon_{kk} = B, \quad (16)$$

где  $B$  — постоянная.

Подставляя (7) в (16), получаем зависимость между объемной деформацией Альманси, скалярной кривизной и смещением относительно геометрии евклидова пространства:

$$\begin{aligned} & [\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2](1-\alpha)\text{div}U - \frac{2\mu_3g(1-D_3)^2(1-D_0)(1-D_2)(1-\alpha)}{3\lambda_2(1-D_2)^2 + 2\mu_2(1-D_3)^2}\Delta R = \\ & = B + \frac{3g^2(1-D_0)^2(1-D_2)^2(1-\alpha)}{3\lambda_2(1-D_2)^2 + 2\mu_2(1-D_3)^2}a_{kk}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{3g^2(1-D_0)^2(1-D_2)^2}{[\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2][3\lambda_2(1-D_2)^2 + 2\mu_2(1-D_3)^2]}.$$

Смещение  $U$  относительно геометрии евклидова пространства включает две составляющие: классическое упругое смещение  $U_0$  и смещение  $W$ , индуцируемое микротрещинами.

Из (17) и [1] классическое упругое смещение  $U_0$  можно представить как

$$\text{div}U_0 = \frac{B}{[\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2](1-\alpha)}. \quad (18)$$

Согласно (17), для смещения  $W$ , индуцированного микротрещинами, получаем

$$\text{div}W = \frac{2\mu_3g(1-D_0)(1-D_2)(1-2\alpha)(1-D_3)^2}{[3\lambda_2(1-D_2)^2 + 2\mu_2(1-D_3)^2][\lambda_1(1-D_0)^2 + 2\mu_1(1-D_1)^2](1-\alpha)}\Delta R. \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (17), находим объемную деформацию Альманси:

$$a_{kk} = \frac{2\alpha\mu_3(1-D_3)^2}{3g(1-D_0)(1-D_2)(1-\alpha)}\Delta R. \quad (20)$$

Из (20) и (9) имеем

$$\Delta^2 R = \gamma^2 R, \quad (21)$$

$$\text{где } \gamma^2 = \frac{3\beta[3\lambda_2(1-D_2)^2 + 2\mu_2(1-D_3)^2](1-\alpha)}{2[3\lambda_2(1-D_2)^2(1-\alpha) + 2\mu_2(1-D_3)^2(3-\alpha)]}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

**Влияние скалярной кривизны неевклидова пространства на поля напряжений вмещающего породного массива вокруг тоннеля круглого сечения.** Предположим, что глубокий тоннель круглого сечения радиусом  $r_0$  пройден в массиве с исходными горизонтальными и

вертикальными напряжениями  $\sigma_h$ ,  $\sigma_v$  (рис. 1). Если исходное напряженное состояние гидростатическое, то  $\sigma_h = \sigma_v = \sigma_\infty$ .

В случае плоской деформации уравнение (21) для условий гидростатического давления примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 R = \gamma^2 R. \quad (22)$$

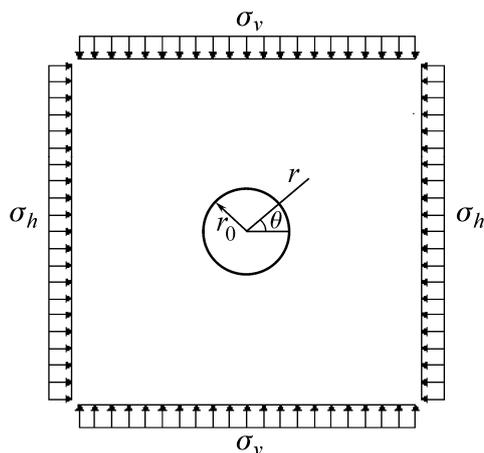


Рис. 1. Тоннель круглого сечения в глубокозалегающем породном массиве под действием горизонтальных и вертикальных напряжений

Интегрируя (22), находим

$$R = AJ_0(\sqrt{\gamma}r) + BN_0(\sqrt{\gamma}r) + CK_0(\sqrt{\gamma}r), \quad (23)$$

где  $J_0$ ,  $N_0$  и  $K_0$  — цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Макдональда нулевого порядка, постоянные  $A$  и  $B$  можно определить на основе граничных условий.

Согласно первому и второму закону термодинамики, имеем следующие граничные условия для функции  $R$  [5–8]:

$$R|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}|_{r=r_0} = 0. \quad (24)$$

При подстановке (23) в (24) определяем постоянные  $A$  и  $B$ :

$$A = (C/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_0(\sqrt{\gamma}r_0)N_1(\sqrt{\gamma}r_0) - K_1(\sqrt{\gamma}r_0)N_0(\sqrt{\gamma}r_0)], \quad (25)$$

$$B = -(C/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_0(\sqrt{\gamma}r_0)J_1(\sqrt{\gamma}r_0) - K_1(\sqrt{\gamma}r_0)J_0(\sqrt{\gamma}r_0)], \quad (26)$$

где  $J_1$ ,  $N_1$  и  $K_1$  — цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Макдональда первого порядка соответственно; детерминант  $C$  совпадает с вронскианом для линейно независимых решений  $J_0$  и  $N_0$ .

Отношение тензора деформаций к внутренней геометрии запишется выражением

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\sigma}{E}, \quad (27)$$

где  $\sigma = \sigma_{ii}$ ,  $\nu = \frac{\lambda_2(1-D_2)^2}{2[\lambda_2(1-D_2)^2 + \mu_2(1-D_3)^2]}$ ,  $E = \frac{\mu_2[3\lambda_2(1-D_2)^2 + 2\mu_2(1-D_3)^2](1-D_3)^2}{\lambda_2(1-D_2)^2 + \mu_2(1-D_3)^2}$ .

Подставляя (27) в (3), получаем соотношение

$$R = \frac{2(1-\nu)}{E} \Delta\sigma. \quad (28)$$

Из (23) и (28) при условии гидростатического давления находим

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta = -\frac{E}{2\gamma(1-\nu)} [AJ_1(\sqrt{\gamma}r) + BN_1(\sqrt{\gamma}r) + CK_1(\sqrt{\gamma}r)] + 2(1+\nu)\sigma_\infty. \quad (29)$$

Для плоской деформации уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (30)$$

Подстановка (29) в (30) дает выражения

$$\sigma_r = \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{E}{2\gamma^{3/2}(1-\nu^2)r} [AJ_1(\sqrt{\gamma}r) + BN_1(\sqrt{\gamma}r) + CK_1(\sqrt{\gamma}r)], \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{E}{2\gamma(1-\nu^2)} [AJ_0(\sqrt{\gamma}r) + BN_0(\sqrt{\gamma}r) - CK_0(\sqrt{\gamma}r)] + \\ & + \frac{E}{2\gamma^{3/2}(1-\nu^2)r} [AJ_1(\sqrt{\gamma}r) + BN_1(\sqrt{\gamma}r) + CK_1(\sqrt{\gamma}r)]. \end{aligned} \quad (32)$$

Подобным образом выражение для скалярной кривизны  $R$  определяется как

$$R = [A_1J_2(r\sqrt{\gamma}) + B_1N_2(r\sqrt{\gamma}) + C_1K_2(r\sqrt{\gamma})] \cos 2\theta. \quad (33)$$

Выражения для компонент напряжений во вмещающем породном массиве вокруг тоннеля круглого сечения можно записать в виде

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_v - \sigma_h}{2} \left(1 + 2\frac{r_0^2}{r^2} - 3\frac{r_0^4}{r^4}\right) \sin 2\theta + \frac{E}{r(1-\nu^2)\gamma^{3/2}} [A_1J_1(r\sqrt{\gamma}) + B_1N_1(r\sqrt{\gamma}) +$$

$$+ C_1K_1(r\sqrt{\gamma})] \sin 2\theta - \frac{3E}{r^2(1-\nu^2)\gamma^2} [A_1J_2(r\sqrt{\gamma}) + B_1N_2(r\sqrt{\gamma}) + C_1K_2(r\sqrt{\gamma})] \sin 2\theta;$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \left(1 - 4\frac{r_0^2}{r^2} + 3\frac{r_0^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - \frac{E}{2\gamma^{3/2}(1-\nu^2)r} [AJ_1(\sqrt{\gamma}r) + \\ & + BN_1(\sqrt{\gamma}r) + CK_1(\sqrt{\gamma}r)] + \frac{E}{2(1-\nu^2)r\gamma^{3/2}} [A_1J_1(\sqrt{\gamma}r) + B_1N_1(\sqrt{\gamma}r) + \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ C_1K_1(\sqrt{\gamma}r)] \cos 2\theta - \frac{3E}{r^2(1-\nu^2)\gamma^2} [A_1J_2(\sqrt{\gamma}r) + B_1N_2(\sqrt{\gamma}r) + C_1K_2(\sqrt{\gamma}r)] \cos 2\theta;$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \frac{\sigma_v + \sigma_h}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} \left(1 + 3\frac{r_0^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - \frac{E}{2\gamma(1-\nu^2)} [AJ_1(\sqrt{\gamma}r) + BN_1(\sqrt{\gamma}r) + \\ & + CK_1(\sqrt{\gamma}r)] + \frac{E}{2\gamma^{3/2}(1-\nu^2)r} [AJ_1(\sqrt{\gamma}r) + BN_1(\sqrt{\gamma}r) + CK_1(\sqrt{\gamma}r)] + \frac{E}{2(1-\nu^2)\gamma} \times \\ & \times [A_1J_0(r\sqrt{\gamma}) + B_1N_0(r\sqrt{\gamma}) + C_1K_0(r\sqrt{\gamma})] \cos 2\theta - \frac{3E}{2r(1-\nu^2)\gamma^{3/2}} [A_1J_1(r\sqrt{\gamma}) + B_1N_1(r\sqrt{\gamma}) + \end{aligned} \quad (36)$$

$$+ C_1 K_1(r\sqrt{\gamma})] \cos 2\theta + \frac{3E}{r^2(1-\nu^2)\gamma^2} [A_1 J_2(r\sqrt{\gamma}) + B_1 N_2(r\sqrt{\gamma}) + C_1 K_2(r\sqrt{\gamma})] \cos 2\theta,$$

где  $C$  совпадает с вронскианом для линейно независимых решений  $J_0(\sqrt{\gamma}r)$  и  $N_0(\sqrt{\gamma}r)$ . Детерминант  $C_1$  совпадает с вронскианом для линейно независимых решений  $J_2$  и  $N_2$ ;  $J_2$ ,  $N_2$  и  $K_2$  — цилиндрические функции Бесселя, Неймана и Макдональда второго порядка;  $J_3$ ,  $N_3$  и  $K_3$  — те же функции третьего порядка. Параметры  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  и  $B_1$  можно записать так:

$$A = (C/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_0(\sqrt{\gamma}r_0)N_1(\sqrt{\gamma}r_0) - K_1(\sqrt{\gamma}r_0)N_0(\sqrt{\gamma}r_0)];$$

$$B = -(C/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_0(\sqrt{\gamma}r_0)J_1(\sqrt{\gamma}r_0) - K_1(\sqrt{\gamma}r_0)J_0(\sqrt{\gamma}r_0)];$$

$$A_1 = (C_1/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_2(\sqrt{\gamma}r_0)N_3(\sqrt{\gamma}r_0) - K_3(\sqrt{\gamma}r_0)N_2(\sqrt{\gamma}r_0)];$$

$$B_1 = -(C_1/2)\pi\sqrt{\gamma}r_0[K_2(\sqrt{\gamma}r_0)J_3(\sqrt{\gamma}r_0) - K_3(\sqrt{\gamma}r_0)J_2(\sqrt{\gamma}r_0)].$$

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлены результаты расчетов напряжений согласно уравнениям (34)–(36). Напряжения получены при следующих исходных данных:  $\sigma_h = 40$  МПа,  $\sigma_v = 20$  МПа,  $C = C_1 = 802.5 \text{ м}^{-2}$ ,  $r_0 = 7 \text{ м}$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\lambda_1 = 3.2 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_1 = 3.2 \text{ ГПа}$ ,  $\lambda_2 = 4.1667 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_2 = 6.25 \text{ ГПа}$ ,  $\mu_3 = 710 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ ,  $g = 90 \text{ МПа}$ ,  $\eta_0 = 5000$ ,  $c_0 = 0.8 \text{ мм}$ .

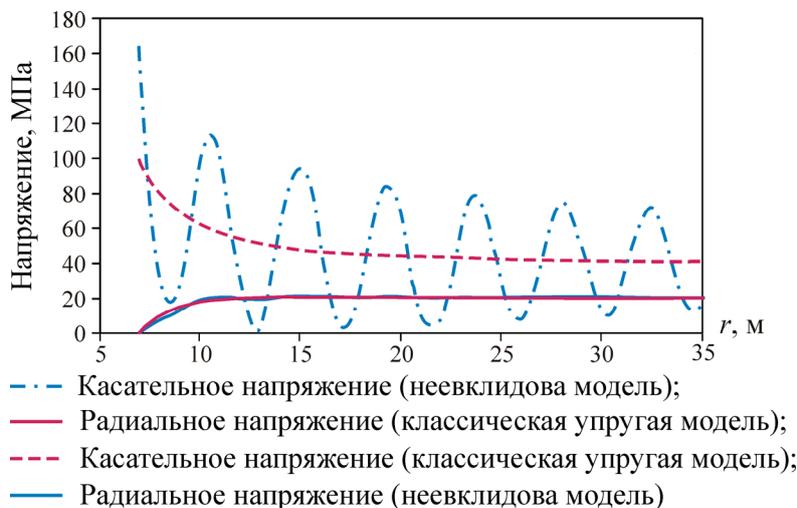


Рис. 2. Поле напряжений вмещающего породного массива вокруг глубоко пройденного тоннеля круглого сечения

Красные линии представляют классические упругие решения, синие — неевклидовы решения. Очевиден нестабильный характер распределения напряжений во вмещающем породном массиве при использовании неевклидовой модели. Радиальное и касательное напряжения имеют экстремумы и монотонно приближаются к естественному напряжению на бесконечности в рамках классической модели, в то время как радиальное и касательное напряжения во вмещающем массиве вокруг глубоко пройденного тоннеля — волновые по характеру. Амплитуда

радиального и касательного напряжений в рамках неевклидовой модели максимальна на контуре выработки и постепенно снижается до нуля в бесконечности.

### ВЫВОДЫ

Разработана новая неевклидова модель породного массива на основе использования условия несовместности деформаций, уравнения равновесия и плотности свободной энергии. Исследованы зависимости скалярной кривизны неевклидова пространства на микротрещинах, а также самоуравновешивающихся напряжений. С применением неевклидовой модели определены поля напряжений вмещающего породного массива, содержащего микротрещины вокруг глубоко пройденного тоннеля круглого сечения. На основе численных результатов установлено, что распределение напряжений во вмещающем породном массиве вокруг глубинного круглого тоннеля неравномерное и волнообразное по характеру.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Guzev M. A.** Structure of kinematic and force fields in the riemannian continuum model, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, Vol. 52, No. 5.
2. **Guzev M. A., and Myasnikov V. P.** Thermomechanical model of an elastic-plastic material with structural defects, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela*, 1998, No. 4.
3. **Myasnikov V. P., and Guzev M. A.** Non-euclidean model of deformation of materials at different structural levels, *Fiz. Mezomekh.*, 2000, Vol. 3, No. 1.
4. **Myasnikov V. P., and Guzev M. A.** Geometric model of internal self-equilibrated stresses in solids, *Dokl. Ross. Akad. Nauk*, 2001, 380(5).
5. **Guzev M. A., and Paroshin A. A.** Non-euclidean model of the zonal disintegration of rocks around an underground working, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, Vol. 42, No. 1.
6. **Qian Q. H., and Zhou X. P.** Non-euclidean continuum model of the zonal disintegration of surrounding rocks around a deep circular tunnel in a non-hydrostatic pressure state, *Journal of Mining Science*, 2011, Vol. 47, No. 1.
7. **Qian Q. H., and Zhou X. P.** Effects of the axial in-situ stresses on the zonal disintegration phenomenon in the surrounding rock masses around a deep circular tunnel, *Journal of Mining Science*, 2012, Vol. 48, No. 2.
8. **Zhou X. P., Chen G., and Qian Q. H.** Zonal disintegration mechanism of cross-anisotropic rock masses around a deep circular tunnel, *Theor. Appl. Fracture Mech.*, 2012, Vol. 57, No. 1.
9. **Godunov S. K., and Romensky E. I.** Elements of continuum mechanics and conservation laws, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
10. **Dubrovin B. A., Novikov S. P., and Fomenko A. T.** Modern geometry: methods and applications, Moscow, Nauka, 1986.
11. **Benvensite Y.** On the Mori-Tanaka's method in cracked solids, *Mechanics Research Communications*, 1986, Vol. 13, No. 4.
12. **Sidoroff F.** Description of anisotropic damage application to elasticity, *Proc. of IUTAM Colloquium, Physical Nonlinearities in Structural Analysis*, 1981.

*Поступила в редакцию 15/1 2013*