О КРИВИЗНЕ НУЛЕВОГО ФОРМИРУЮЩЕГО ЭЛЕКТРОДА

В. А. Сыровой (Москва)

В работах [1,2] для случая эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, исследуются такие локальные характеристики, как угол, под которым частицы оставляют эмиттер, и угол θ, составляемый с границей пучка нулевой эквипотенциалью. Оказалось, что старт происходит по нормали, а $\theta = {}^3/_8\, \pi$. Настоящая заметка посвящена установлению связи между кривизнами эмиттирующей поверхности, траектории и формирующего электрода с нулевым потенциалом, а также вычислению производной последней для плоских и осесимметричных течений при отсутствии магнитного поля. Ниже будут использоваться результаты работ [3, 4], в которых решение уравнений регулярного пучка представлено в виде рядов по x^1, причем эмиссия осуществлялась с поверхности $x^1 = x_0^1 = \mathrm{const}$.

Для достижения поставленной цели необходимо получить уравнение траектории в окрестности точки старта O с точностью, обеспечивающей правильные значения кривизны и ее производной в этой точке; далее, следуя [5], совершить аналитическое продолжение потенциала, заданного на траектории, принятой за границу пучка, вместе со своей нормальной производной, в область, свободную от зарядов. Уравнение нулевой эквипотенциали, справедливое вблизи O, даст возможность установить искомое соотношение.

Пусть $x^1 = x^1(z, R)$, $x^2 = x^2(z, R)$ — ортогональная система координат в меридиональной плоскости z, R с метрическим тензором g_{ik}, а $x^1 = x_0^1$ определяет эмиттирующую поверхность. Плотность тока на ней $J = J(x^2)$ предполагается заданной. Переходя к физическим компонентам скорости v_{x^1}, v_{x^2} и длинам дуг S, P криволинейных осей x^1, x^2, получаем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3} S^{2/3}(1 + \Omega S), \qquad \Omega = \frac{4}{15} T, \qquad T = \varkappa_1 + \varkappa_2$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} = \left(\frac{9J}{2}\right)^{1/3} S^{5/3}(\Lambda + \Theta S), \qquad \Lambda = \frac{1}{5}\frac{J_P'}{J} - k_1 \tag{1}$$

$$\Theta = \frac{1}{10} T_P' - \frac{1}{2} k_{1S}' - \frac{23}{30}\varkappa_1 k_1 - \frac{4}{15}\varkappa_2 k_1 + \frac{7}{30}\varkappa_1 \frac{J_P'}{J} + \frac{1}{30}\varkappa_2 \frac{J_P'}{J}$$

Здесь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и k_1, k_2 — главные кривизны поверхностей $x^1 = \mathrm{const}$, $x^2 = \mathrm{const}$, вычисленные при $x^1 = x_0^1$. Таким образом, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, k_1, k_2 — функции от x^2.

Используя (1), приходим к дифференциальному уравнению траектории

$$\left(\frac{g_{11}}{g_{22}}\right)^{1/2} \frac{dx^1}{dx^2} = \frac{1}{S}\left[\frac{1}{\Lambda} + \left(\frac{\Omega}{\Lambda} - \frac{\Theta}{\Lambda^2}\right) S\right] \tag{2}$$

решение которого определяется выражением

$$x^2 - x_0^2 = \frac{a_0 \Lambda}{2 b_0^{1/2}}(x^1 - x_0^1)^2 + \frac{a_0^{3/2}\Lambda}{b_0^{1/2}}\left[\frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{1}{3}\varkappa_1 - \frac{1}{3}\left(\Omega - \frac{\Theta}{\Lambda}\right)\right](x^1 - x_0^1)^3 \tag{3}$$

Здесь a_k, b_k — коэффициенты разложения элементов метрического тензора по $(x^1 - x_0^1)$; под всеми величинами в (3) имеются в виду их значения в O. Введем в плоскости z, R локальные декартовы координаты X, Y, связанные с эмиттирующей поверхностью, причем X направлена по нормали, а Y — по касательной к ней в точке старта

$$X = (z - z_0)\cos\vartheta + (R - R_0)\sin\vartheta, \qquad \cos\vartheta = \sqrt{g_{11}}\,\partial x^1/\partial z = \sqrt{g_{22}}\,\partial x^2/\partial R$$

$$Y = -(z - z_0)\sin\vartheta + (R - R_0)\cos\vartheta, \qquad \sin\vartheta = \sqrt{g_{11}}\,\partial x^1/\partial R = -\sqrt{g_{22}}\,\partial x^2/\partial z \tag{4}$$

Заметим, что ϑ суть угол между нормалью к эмиттеру в O и осью вращения z.

Для дальнейшего необходимо располагать разложениями функций $x^1 - x_0^1$, $x^2 - x_0^2$ по X, Y. Легко видеть, что

$$s_0 = a_0^{1/2}(x^1 - x_0^1) = X + k_1 XY - \frac{1}{4}\frac{a_1}{a_0^{3/2}} X^2 - \frac{\varkappa_1}{2} Y^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{6}\left(\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2}\right) - \frac{1}{3} k_1^2\right] X^3 - \left(\frac{1}{6}\varkappa_{1P}' + \frac{1}{2}\varkappa_1 k_1\right) Y^3 + \ldots \tag{5}$$

$$p_0 = b_0^{1/2}(x^2 - x_0^2) = Y + \varkappa_1 XY - \frac{1}{4}\frac{b_{02}'}{b_0^{3/2}} - \frac{k_1}{2} X^2 - \left(\frac{1}{6} k_{1S}' + \frac{1}{2}\varkappa_1 k_1\right) X^3 + \ldots$$

Используя (5), получаем уравнение траектории в X, Y-представлении

$$Y = aX^2 + bX^3, \qquad a = {}^1/_{10} (\ln J)_P', \qquad b = {}^1/_{150} (4\varkappa_1 - \varkappa_2)(\ln J)_P' + {}^1/_{30} T_P' \tag{6}$$

Таким образом, кривизна траектории в точке старта зависит только от плотности тока эмиссии

$$k_t = {}^1/_5 (\ln J)_P'$$

Представим (6) в параметрической форме

$$X = X_e(u) = u, \qquad Y = Y_e(u) = au^2 + bu^3$$

и построим функцию, осуществляющую отображение действительной оси в плоскости $w = u + iv$ на границу пучка в плоскости течения $Z = X + iY$

$$Z = X + iY = w + i(aw^2 + bw^3) \tag{7}$$

$$X = u - k_t uv + b(v^3 - 3u^2 v), \qquad Y = v + {}^1/_2 k_t (u^2 - v^2) + b(u^3 - 3uv^2)$$

Приближенное обратное отображение $Z \to w$, совпадающее с точным вплоть до кубических членов, задается формулами

$$w = Z - {}^1/_2 i k_t Z^2 - ({}^1/_2 k_t^2 + ib) Z^3$$

$$u = X + k_t XY + {}^1/_2 k_t^2 (3XY^2 - X^3) + b(3X^2 Y - Y^3) \tag{8}$$

$$v = Y - {}^1/_2 k_t (X^2 - Y^2) + {}^1/_2 k_t^2 (Y^3 - 3X^2 Y) + b(3XY^2 - X^3)$$

Перейдем к определению потенциала и его нормальной производной на траектории. При этом, имея в виду вычисление кривизны k_φ нулевого формирующего электрода и ее производной k_φ' в начале координат и учитывая, что главными членами разложений s_0, p_0 и u, v по X, Y будут линейные члены, достаточно ограничиться следующим представлением нулевой эквипотенциали в плоскости w:

$$v = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = \text{const}) \tag{9}$$

а в потенциале и его нормальной производной на границе оставлять выражения, дающие в комплексном потенциале $W(u, v, w)$ слагаемые порядка $u^{4/3}$, $u^{7/3}$, $u^{10/3}$.

На траектории для s_0, p_0 имеем

$$s_0 = u - \frac{1}{4} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} u^2 + \left[ak_1 + \frac{1}{6}\left(\frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2}\right) - \frac{1}{3} k_1^2\right] u^3 \tag{10}$$

$$p_0 = \left(a - \frac{k_1}{2}\right) u^2 + \left[b + a\varkappa_1 - \left(\frac{1}{6} k_{1S}' + \frac{1}{2} \varkappa_1 k_1\right)\right] u^3$$

В области, заполненной зарядами, потенциал определяется выражением

$$2\varphi = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} s^{4/3} \left\{1 + \left(\frac{1}{3} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} + \frac{8}{15} T\right) s + \right.$$

$$+ \left[\frac{14}{45} \frac{a_1}{a_0^{3/2}} T - \frac{1}{24} \frac{a_1^2}{a_0^3} + \frac{2}{9} \frac{a_2}{a_0^2} + \frac{83}{225} (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \frac{157}{450} \varkappa_1 \varkappa_2 - \frac{2}{9} k_1^2 + \right. \tag{11}$$

$$\left. \left. + \frac{1}{3} k_1 \frac{J_P'}{J} + \frac{4}{45} k_2 \frac{J_P'}{J} + \frac{13}{450} \frac{J_P'^2}{J^2} - \frac{4}{45} \frac{J_P''}{J}\right] s^2 \right\}$$

При этом для некоторого упрощения формул, приведенных в [3], были использованы условия эвклидовости пространства, записанные в терминах главных кривизн координатных поверхностей; в осесимметричном случае эти условия имеют вид

$$\varkappa_{1S}' + k_{1P}' = \varkappa_1^2 + k_1^2, \qquad \varkappa_{2S}' = \varkappa_2^2 + k_1 k_2, \qquad k_{2P}' = k_2^2 + \varkappa_1 \varkappa_2$$

$$\varkappa_{2P}' - k_2 (\varkappa_2 - \varkappa_1) = 0, \qquad k_{2S}' - \varkappa_2 (k_2 - k_1) = 0 \tag{12}$$

Заметим, что, если в формулах (3) — (8), (10) кривизны и коэффициенты разложений элементов метрического тензора вычисляются в точке старта, то в (11) все эти величины являются функциями x^2. Учитывая этот факт, для потенциала на траектории получаем

$$2\varphi = V(u) = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} u^{4/3} \left\{1 + \frac{8}{15} Tu + \left[\frac{83}{225} (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{157}{450} \varkappa_1 \varkappa_2 + \frac{43}{450} \frac{J_P'^2}{J^2} - \frac{4}{45} \frac{J_P''}{J} + \frac{4}{45} k_2 \frac{J_P'}{J}\right] u^2 \right\} \tag{13}$$

Подчеркнем то обстоятельство, что $V(u)$, как и следовало ожидать, не зависит от системы координат, в которой велось рассмотрение при решении уравнений пучка, и определяется только геометрией эмиттирующей поверхности и законом изменения плотности тока на ней (k_2 выражается через $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_2{'}_P$).

Для получения нормальной производной потенциала на траектории воспользуемся справедливым на ней соотношением

$$k_t\,(v_{x^1}{}^2 + v_{x^2}{}^2) = \partial\varphi\,/\,\partial n$$

С точностью до квадратичных членов $k_t = 2a + 6bu$, а $v_{x^1}{}^2 + v_{x^2}{}^2 = 2\varphi$ в силу существования интеграла энергии. Окончательно

$$2\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\bigg|_{v=0} = F(u) = \left(\frac{9J}{2}\right)^{2/3} u^{4/3}\left\{\frac{2}{5}\,\frac{J_P{'}}{J} + \frac{2}{5}\left[T_P{'} + \frac{1}{3}\,\frac{J_P{'}}{J}(4\varkappa_1 + \varkappa_2)\right]u\right\} \tag{14}$$

В дальнейшем для коэффициентов в фигурных скобках в (13), (14) примем обозначения A, B и C, D соответственно.

Запишем теперь параметрические уравнения траектории в координатах z, R и введем некоторые дополнительные символы

$$\begin{aligned} z &= z_e(u) = z_0 + X_e(u)\cos\vartheta - Y_e(u)\sin\vartheta, \qquad \beta(u) = -dz_e\,/\,du \\ R &= R_e(u) = R_0 + X_e(u)\sin\vartheta + Y_e(u)\cos\vartheta, \qquad \alpha(u) = -dR_e\,/\,du \end{aligned} \tag{15}$$

В [5] дано решение задачи Коши в осесимметричном случае, основывающееся на переходе в комплексную область, в которой уравнение Лапласа становится гиперболическим, и использовании метода Римана

$$\begin{aligned} 2\varphi(u, v) = \operatorname{Re} W(u, v, w) = \operatorname{Re}\Bigg\{\left[\frac{R_e(w)}{R}\right]^{1/2} V(w) + {} \\ + \frac{2}{\pi}\int_0^v \left[2R_e\boldsymbol{K}(\sigma)F + 2R_e[\boldsymbol{K}(\sigma) - \boldsymbol{E}(\sigma)]V\,\frac{\alpha(z_e - z) - \beta(R_e - R)}{(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2} - \beta\boldsymbol{E}(\sigma)V\right] \times \\ \times \frac{d\xi}{[(R_e + R)^2 + (z_e - z)^2]^{1/2}}\Bigg\}, \qquad \sigma = \left[\frac{(R_e - R)^2 + (z_e - z)^2}{(R_e + R)^2 + (z_e - z)^2}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\boldsymbol{K}(\sigma)$ и $\boldsymbol{E}(\sigma)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, R_e, z_e, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{F}$, α и β — сокращенные обозначения для $R_e(u + i\xi)$, $z_e(u + i\xi)$, $V(u + i\xi)$, $\boldsymbol{F}(u + i\xi)$, $\alpha(u + i\xi)$, $\beta(u + i\xi)$ соответственно

$$\begin{aligned} z &= z_0 + [\operatorname{Re} X_e(w) - \operatorname{Im} Y_e(w)]\cos\vartheta - [\operatorname{Im} X_e(w) + \operatorname{Re} Y_e(w)]\sin\vartheta \\ R &= R_0 + [\operatorname{Im} X_e(w) + \operatorname{Re} Y_e(w)]\cos\vartheta + [\operatorname{Re} X_e(w) - \operatorname{Im} Y_e(w)]\sin\vartheta \end{aligned} \tag{17}$$

При рассмотрении первого слагаемого в (16) следует учитывать, что R соответствует точке, близкой к O, а при оценке интеграла в коэффициентах при V, F сохранять члены, линейные по u, ξ. Воспользуемся при этом разложениями для полных эллиптических интегралов [6] в случае малых значений аргумента

$$\boldsymbol{K}(\sigma) = {}^1/_2\,\pi\,(1 + {}^1/_4\,\sigma^2 + \ldots), \qquad \boldsymbol{E}(\sigma) = {}^1/_2\,\pi\,(1 - {}^1/_4\,\sigma^2 + \ldots)$$
$$\boldsymbol{K}(\sigma) - \boldsymbol{E}(\sigma) = {}^1/_2\,\pi\cdot{}^1/_2\,\sigma^2$$

В результате в окрестности точки старта получаем следующее выражение для решения уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} 2\varphi(u, v) = \Bigg[1 - \frac{\sin\vartheta}{2R_0}\,u - \frac{\cos\vartheta}{2R_0}\,v + \left(\frac{3\sin 2\vartheta}{8R_0^2} + \frac{a\sin\vartheta}{R_0}\right)uv + {} \\ + \left(\frac{3\sin^2\vartheta}{8R_0^2} - \frac{a\cos\vartheta}{2R_0}\right)u^2 + \left(\frac{3\cos^2\vartheta}{8R_0^2} + \frac{a\cos\vartheta}{2R_0}\right)v^2\Bigg](u^2 + v^2)^{2/3} \times \\ \times \cos\frac{4}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} + \Bigg[A + \frac{\sin\vartheta}{2R_0} - \left(\frac{A\sin\vartheta}{2R_0} + \frac{\sin^2\vartheta}{4R_0^2}\right)u - {} \\ - \left(\frac{A\cos\vartheta}{2R_0} + \frac{\sin 2\vartheta}{8R_0^2}\right)v\Bigg](u^2 + v^2)^{7/6}\cos\frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} + \end{aligned}$$

$$+\left(B+\frac{A\sin\vartheta}{2R_0}+\frac{a\cos\vartheta}{2R_0}-\frac{\sin^2\vartheta}{8R_0^2}\right)(u^2+v^2)^{5/3}\cos\frac{10}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}+$$

$$+\frac{3}{7}\left[C+\frac{\cos\vartheta}{2R_0}-\left(\frac{\sin 2\vartheta}{8R_0^2}+\frac{C\sin\vartheta}{2R_0}\right)u-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{4R_0^2}+\frac{\cos 2\vartheta}{8R_0^2}+\frac{C\cos\vartheta}{2R_0}\right)v\right](u^2+v^2)^{7/6}\sin\frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}+$$

$$+\frac{3}{10}\left(D+\frac{A\cos\vartheta}{2R_0}-\frac{a\sin\vartheta}{R_0}+\frac{C\sin\vartheta}{2R_0}-\frac{\sin 2\vartheta}{8R_0^2}\right)(u^2+v^2)^{5/3}\sin\frac{10}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} \quad (18)$$

Коэффициенты, определяющие явное уравнение нулевой эквипотенциали в плоскости w, имеют вид

$$\alpha=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8},\quad \beta=\frac{3}{4}(1+\alpha^2)^{3/2}\left[-\left(A+\frac{\sin\vartheta}{2R_0}\right)\cos\frac{\pi}{8}+\frac{3}{7}\left(C+\frac{\cos\vartheta}{2R_0}\right)\sin\frac{\pi}{8}\right]$$

$$\gamma=\frac{2\alpha\beta^2}{1+\alpha^2}+\frac{\beta}{2R_0}\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{7}{4}(1+\alpha^2)\beta\sin\frac{\pi}{8}\left[\left(A+\frac{\sin\vartheta}{2R_0}\right)\sin\frac{\pi}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{7}\left(C-\frac{\cos\vartheta}{2R_0}\right)\cos\frac{\pi}{8}\right]+\frac{3}{8R_0}(1+\alpha^2)\,\alpha\left(A+\frac{\sin\vartheta}{2R_0}\right)\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{8}\right)-$$

$$-\frac{3}{4\sqrt{2}}\left[B+\frac{A\sin\vartheta}{2R_0}+\frac{a\cos\vartheta}{2R_0}-\frac{\sin^2\vartheta}{8R_0^2}+\frac{3}{10}\left(D-\frac{A\cos\vartheta}{2R_0}+\frac{a\sin\vartheta}{R_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{C\sin\vartheta}{2R_0}+\frac{\sin 2\vartheta}{8R_0^2}\right)\right]+\frac{2}{7R_0}(1+\alpha^2)\left[\frac{\alpha}{2R_0}-C\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{4R_0}\cos\left(2\vartheta-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

Для того чтобы записать уравнение $\varphi=0$ в локальных декартовых координатах

$$Y=\mu X+\nu X^2+\lambda X^3 \quad (19)$$

следует воспользоваться формулами (8). Кривизна нулевого формирующего электрода и ее производная определяются выражениями

$$k_\varphi=2\nu(1+\mu^2)^{-3/2},\qquad k_\varphi'=6\left[(1+\mu^2)\lambda-2\mu\nu^2\right](1+\mu^2)^{-5/2}$$

$$\mu=\alpha,\qquad \nu={}^1/_2(1+\alpha^2)k_t+\beta,\qquad \lambda=\alpha(1+\alpha^2)k_t^2+b(1-\alpha^4)+2\alpha\beta k_t+\gamma$$

Опуская промежуточные вычисления, получаем

$$k_\varphi=-\left(\frac{4}{5}T+\frac{3}{4}\frac{\sin\vartheta}{R_0}\right)\cos\frac{\pi}{8}+\left(\frac{16}{35}\frac{J'_P}{J}+\frac{9}{28}\frac{\cos\vartheta}{R_0}\right)\sin\frac{\pi}{8}$$

$$k_\varphi'=6\cos\frac{\pi}{8}\left[-\frac{37}{150}T_P'-\frac{9}{50}(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+\frac{67}{300}\varkappa_1\varkappa_2-\frac{4}{75}\varkappa_1\frac{J_P'}{J}+\right.$$

$$+\frac{29}{150}\varkappa_2\frac{J_P'}{J}-\frac{2}{15}k_2\frac{J_P'}{J}+\frac{2}{15}\frac{J_P''}{J}-\frac{17}{105}\frac{J_P'^2}{J^2}+\left(\frac{3}{10}T+\frac{9}{50}\frac{J_P'}{J}\right)\frac{\sin\vartheta}{R_0}+$$

$$+\left(\frac{9}{50}T+\frac{3}{140}\frac{J_P'}{J}\right)\frac{\cos\vartheta}{R_0}-\frac{1}{R_0^2}\left(\frac{1}{7}-\frac{9}{64}\sin^2\vartheta+\frac{27}{448}\cos^2\vartheta-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{63}{320}\sin 2\vartheta\right)\right]-6\sin\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{14R_0^2}\cos\left(2\vartheta-\frac{\pi}{8}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R_0}\left(\frac{1}{20}\frac{J_P'}{J}+\frac{9}{112}\frac{\cos\vartheta}{R_0}\right)\cos\left(\vartheta-\frac{\pi}{8}\right)\right] \quad (20)$$

Формулы (20) могут быть полностью переписаны в терминах кривизн эмиттирующей поверхности, если учесть, что

$$k_2=\varkappa_{2P}'(\varkappa_2-\varkappa_1)^{-1},\qquad R_0^{-2}=\varkappa_2^2+k_2^2,\qquad \sin\vartheta=-\varkappa_2R_0$$

Устремляя R_0 к бесконечности и полагая $\varkappa_1=\varkappa$, $\varkappa_2=k_2=0$ в (20), приходим к выражениям для k_φ, k'_φ в плоском случае

$$k_\varphi=-\frac{4}{5}\varkappa\cos\frac{\pi}{8}+\frac{16}{35}\frac{J_P'}{J}\sin\frac{\pi}{8}$$

$$\varkappa_\varphi'=6\cos\frac{\pi}{8}\left(-\frac{37}{150}\varkappa_P'-\frac{9}{50}\varkappa^2-\frac{4}{75}\varkappa\frac{J_P'}{J}+\frac{2}{15}\frac{J_P''}{J}-\frac{17}{105}\frac{J_P'^2}{J^2}\right) \quad (21)$$

В заключение рассмотрим вопрос о x^1-течениях [7,8], уравнением траектории для которых будет $p_0 = 0$ или

$$Y = aX^2 + bX^3, \quad a = {}^1/_2 k_1, \quad b = {}^1/_6 k_{1S}', \quad k_t = k_1 = {}^1/_5 (\ln J)_P' \tag{22}$$

На плоскости они допускаются системами координат с метрикой

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} = \exp(\varepsilon x^1 + \tau x^2) \qquad (\varepsilon, \tau = \mathrm{const}) \tag{23}$$

а в пространственном случае — сферическими координатами. Видно [3], что $v_2 \equiv 0$, если $U_{02}' = 0$, а $U_k / U_0 = \mathrm{const}$. Легко убедиться, что для (23) второе условие выполнено, а первое дает закон изменения плотности тока на эмиттере $x^1 = 0$

$$J = J_0 \exp(- {}^5/_2 \tau x^2)$$

Выражения для кривизны k_φ остаются без изменения. Учитывая (23), имеем

$$k_\varphi = {}^2/_5\ \varepsilon \cos \pi / 8 \pm {}^8/_7\ \tau \sin \pi / 8 \tag{24}$$

Здесь минус имеет место в случае, когда лапласовская область простирается в сторону возрастающих x^2, плюс — в противоположном. Например, для клиновидного пучка (часть цилиндрического диода) и при течении по окружностям получаем

$$g_{11} = g_{22} = \exp(2x^1), \quad x^1 = \ln R, \quad x^2 = \psi, \quad \varepsilon = 2, \quad \tau = 0, \quad J = \mathrm{const}, \quad k_\varphi = {}^4/_5 \cos \pi / 8$$

$$g_{11} = g_{22} = \exp(2x^2), \quad x^1 = \psi, \quad x^2 = \ln R, \quad \varepsilon = 0, \quad \tau = 2, \quad J = J_0 R^{-5}, \quad k_\varphi = \mp {}^{16}/_7 \sin \pi/8$$

Для k_φ' в сферических координатах и в системах (23), принимая во внимание формулы (22), имеем

$$\begin{aligned} k_\varphi' = 6 \cos \frac{\pi}{8} \Big[&- \frac{9}{50} T_P' - \frac{9}{50} (\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) + \frac{67}{300} \varkappa_1 \varkappa_2 + \frac{9}{50} \varkappa_2 \frac{J_P'}{J} - \\ &- \frac{2}{15} k_2 \frac{J_P'}{J} + \frac{2}{15} \frac{J_P''}{J} - \frac{17}{105} \frac{J_P'^2}{J^2} - \frac{1}{6} k_{1S}' + \left(\frac{3}{10} T + \frac{9}{50} \frac{J_P'}{J} \right) \frac{\sin \vartheta}{R_0} + \\ &+ \left(\frac{9}{50} T + \frac{3}{140} \frac{J_P'}{J} \right) \frac{\cos \vartheta}{R_0} - \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{1}{7} - \frac{9}{64} \sin^2 \vartheta + \frac{27}{448} \cos^2 \vartheta - \right. \\ &\left. - \frac{63}{320} \sin 2\vartheta \right) \Big] - 6 \sin \frac{\pi}{8} \Big[\frac{1}{14 R_0^2} \cos \left(2\vartheta - \frac{\pi}{8} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_0} \left(\frac{1}{20} \frac{J_P'}{J} + \frac{9}{112} \frac{\cos \vartheta}{R_0} \right) \cos \left(\vartheta - \frac{\pi}{8} \right) \Big] \end{aligned}$$

$$k_\varphi' = 6 \cos \frac{\pi}{8} \left(- \frac{9}{50} \varkappa_P' - \frac{9}{50} \varkappa^2 + \frac{2}{15} \frac{J_P''}{J} - \frac{17}{105} \frac{J_P'^2}{J^2} - \frac{1}{6} k_{1S}' \right)$$

Автор благодарит Ю. Е. Кузнецова за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 10 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Lucas A. R. The Relativistic Flow of Electrons in Parallel and Radial Straight Lines with no Externally Imposed Magnetic Field. J. Electr. Contr., 1958, vol. 5, No. 3.
2. Radley D. E. The Theory of the Pierce Type Electron Gun. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No 2.
3. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности. ПМТФ, 1966, № 2.
4. Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного пучка при произвольных условиях эмиссии на криволинейной поверхности. ПМТФ, 1966, № 3.
5. Harker K. J. Solution of the Cauchy Problem for Laplace's Equation in Axially Symmetric Systems. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No 7.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
7. Сыровой В. А. Об однокомпонентных пучках одноименно заряженных частиц. ПМТФ, 1964, № 3.
8. Сыровой В. А. К теории регулярных электростатических пучков заряженных частиц. ПМТФ, 1966, № 1.