

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАЩИТЫ ОТ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ

В. В. Токарев, В. И. Цветков (Москва)

Задача о построении оптимальной формы защитного барьера (минимум веса) рассматривалась ранее в работе [1] для линейного источника γ -излучения. Однако полученное там решение оказывается справедливым не во всем диапазоне изменения параметров: при увеличении допустимой дозы в защищаемой точке толщина защиты на краях источника становится отрицательной. Ниже, в тех же предположениях, что и в работе [1], найдено полное решение задачи об оптимальной форме защиты. Рассмотрены случаи линейного, дискового и цилиндрического источников.

1. Задан источник γ -излучения (его форма, величина и распределение интенсивности). Требуется построить защиту наименьшего веса, которая в фиксированной точке пространства снижает дозу радиации от этого источника до некоторого заданного уровня.

Делается ряд упрощающих предположений относительно характера излучения и поглощения. Излучение источника считается изотропным и монохроматическим. Многократное рассеяние в защите и рассеяние в окружающей среде, а также поглощение в материале источника (для объемных источников) не учитываются. Тогда, если обозначить через R расстояние от защищаемой точки до элементарного источника с объемом dV и удельной интенсивностью γ , а через x — путь луча в защите, то элементарная доза радиации $d\Sigma$ в этой точке будет равна (см., например, [2])

$$d\Sigma = k\gamma \frac{dV}{R^2} e^{-\mu x} \quad (1.1)$$

Здесь k — переводной коэффициент, μ — коэффициент ослабления в защите.

В основном рассмотрении будет проводиться для дискового источника с постоянной поверхностной интенсивностью Γ (квант/см²сек). Защищаемая точка O находится на оси симметрии, защита лежит на поверхности источника (фиг. 1). Полученное для дискового источника решение без труда переносится на случай линейного источника. В последнем разделе работы приводится решение для цилиндрического источника.

В случае дискового источника при вычислении дозы в точке O по формуле (1.1) вместо объемной интенсивности γ надо взять поверхностную Γ , а вместо элементарного объема dV — площадку $dS = R \sec \varphi d\varphi r d\theta$ (обозначения см. на фиг. 1), тогда

$$\Sigma = k\Gamma \int_0^{\varphi_0} d\varphi \int_0^{2\pi} \text{tg } \varphi e^{-\mu x} d\theta$$

или с учетом осевой симметрии

$$\Sigma = 2\pi k\Gamma \int_0^{\varphi_0} \text{tg } \varphi e^{-\mu x} d\varphi \quad (1.2)$$

Вес защиты G в предположении $x \ll R$ равен

$$G = 2\pi h^2 \rho \int_0^{\varphi_0} \text{tg } \varphi \sec \varphi x d\varphi \quad (1.3)$$

Здесь h — расстояние защищаемой точки до центра источника, ρ — удельный вес материала защиты.

Нужно найти такую форму защиты $x(\varphi)$, которая обеспечивает заданную дозу в защищаемой точке $O \Sigma = \Sigma_0$ с минимальным весом G , причем путь луча в защите x , по физическому смыслу, должен быть неотрицателен.

Перейдем к безразмерным переменным.

$$\sigma = \Sigma / 2\pi k\Gamma, \quad g = G\mu / 2\pi h^2 \rho, \quad \zeta = \mu x \quad (1.4)$$

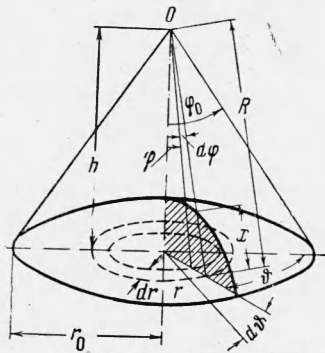
и запишем интегралы (1.2) и (1.3) через эти переменные в виде системы уравнений¹

$$\sigma' = \text{tg } \varphi e^{-\zeta}, \quad g' = \text{tg } \varphi \sec \varphi \zeta \quad (1.5)$$

(точка обозначает дифференцирование по φ) с граничными условиями

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(\varphi_0) = \sigma_0, \quad g(0) = 0 \quad (0 < \varphi_0 < 1/2 \pi) \quad (1.6)$$

¹ Для линейного источника в правых частях соответствующих уравнений отсутствует $\text{tg } \varphi$



Фиг. 1

Окончательно вариационная проблема формулируется в терминах задач оптимального управления: для системы (1.5) в классе кусочно-непрерывных функций выбрать такое управление $\zeta(\varphi) \geq 0$, которое дает минимум конечному значению координаты $g(\varphi_0)$ и обеспечивает выполнение граничных условий (1.6).

2. Сформулированная вариационная проблема решается при помощи метода Л. С. Понтрягина [3]. Как обычно, составляется функция Гамильтона

$$H = \operatorname{tg} \varphi (p_\sigma e^{-\zeta} + p_g \sec \varphi \zeta)$$

где импульсы p_σ и p_g оказываются постоянными

$$\dot{p}_\sigma = -\partial H / \partial \sigma = 0, \quad \dot{p}_g = -\partial H / \partial g = 0$$

Импульс p_g , соответствующий минимизируемой координате, можно положить равным минус единице [3], а импульс p_σ — некоторой константе p_0 , которая определится из граничных условий (1.6). Тогда функция H запишется в виде

$$H = \operatorname{tg} \varphi (p_0 e^{-\zeta} - \sec \varphi \zeta) \quad (2.1)$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление $\zeta(\varphi) \geq 0$ должно доставлять абсолютный максимум функции (2.1).

Из выражения для частной производной

$$\partial H / \partial \zeta = -\operatorname{tg} \varphi (p_0 e^{-\zeta} + \sec \varphi) \quad (2.2)$$

видно, что $p_0 < 0$, иначе $\partial H / \partial \zeta < 0$ для всех значений φ ($0 \leq \varphi \leq \varphi_0 < 1/2 \pi$) и $\zeta(\varphi) \equiv 0$.

Для $p_0 < 0$ максимум производной $\partial H / \partial \zeta$ при $\zeta \geq 0$ достигается при $\zeta = 0$

$$(\partial H / \partial \zeta)_{\max} = -\operatorname{tg} \varphi (p_0 + \sec \varphi)$$

Поэтому на тех участках, где $p_0 \geq -\sec \varphi$, производная $\partial H / \partial \zeta$ для всех $\zeta \geq 0$ отрицательна и максимум H достигается при $\zeta = 0$. Если же $p_0 \leq -\sec \varphi$, то максимум H по $\zeta \geq 0$ совпадает с точкой экстремума и ζ определяется из условия $\partial H / \partial \zeta = 0$

$$p_0 e^{-\zeta} + \sec \varphi = 0$$

Таким образом, оптимальная форма защиты определяется следующим уравнением¹

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \ln(-p_0 \cos \varphi) & \text{при } \cos \varphi \geq -1/p_0 \\ 0 & \text{при } \cos \varphi \leq -1/p_0 \end{cases} \quad (p_0 < 0) \quad (2.3)$$

Функция $\cos \varphi$ в диапазоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_0 < 1/2 \pi$ монотонно убывающая, поэтому выполнение равенства $\cos \varphi = -1/p_0$ возможно не более чем в одной точке $\varphi = \varphi_*$. Слева от этой точки (центральная область источника) толщина защиты больше нуля, а справа (периферийная область), если $\varphi_* < \varphi_0$, толщина защиты обращается в нуль (фиг. 2).

3. Величина p_0 находится интегрированием первого уравнения (1.5), где $\zeta(\varphi)$ определяется соотношением (2.3), с первыми двумя условиями из (1.6).

Если $\cos \varphi_0 \leq -1/p_0$, то оптимальный закон $\zeta(\varphi)$ включает оба участка (2.3)

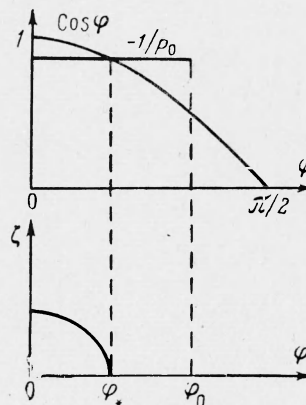
$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \ln(\cos \varphi \sec \varphi_*) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_* \\ 0 & \text{при } \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (\varphi_* = \arccos(-1/p_0)) \quad (3.1)$$

а интегрирование первого уравнения (1.5) дает

$$\sigma_0 = 1 - \cos \varphi_* + \ln \cos \varphi_* - \ln \cos \varphi_0 \quad (3.2)$$

Максимальная допустимая доза σ_0 , когда еще есть необходимость в защите, определяется из условия (3.2), если положить $\varphi_* = 0$. Минимальная доза σ_0 , при которой защита еще содержит участки нулевой толщины, находится из (3.2) при $\varphi_* = \varphi_0$

¹ Уравнение (2.3) без изменений переносится на случай линейного источника. В работе [1] получена только верхняя часть равенства (2.3). Видно, что для такого решения при $\cos \varphi \leq -1/p_0$ толщина защиты становится отрицательной.



Фиг. 2

Таким образом, решение (3.1) имеет место в диапазоне

$$1 - \cos \varphi_0 \leq \sigma_0 \leq -\ln \cos \varphi_0 \quad (3.3)$$

причем угол φ_* , вне которого толщина защиты обращается в нуль, определяется соотношением (3.2) (фиг. 3).

Если допустимая доза меньше, чем (3.3)

$$0 < \sigma_0 \leq 1 - \cos \varphi_0 \quad (3.4)$$

то толщина защиты всюду больше нуля ($\varphi_* \geq \varphi_0$), константа p_0 равна

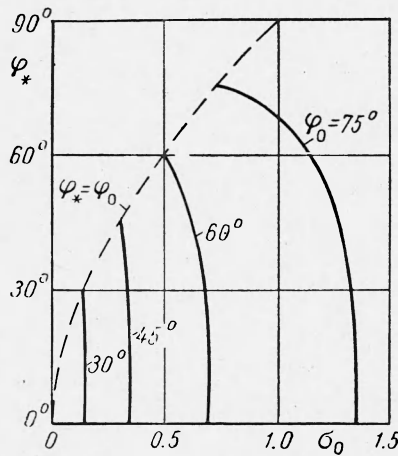
$$p_0 = (\cos \varphi_0 - 1) / \sigma_0 \cos \varphi_0$$

и оптимальная форма защиты такова

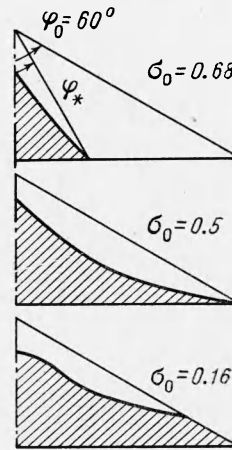
$$\zeta(\varphi) = \ln \left(\frac{1 - \cos \varphi_0}{\sigma_0 \cos \varphi_0} \cos \varphi \right) \quad \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \quad (3.5)$$

На фиг. 4 приведены примеры оптимальной формы защиты при последовательном уменьшении допустимой дозы σ_0 в защищаемой точке.

4. Определим вес оптимальной защиты, проинтегрировав второе уравнение (1.5). При этом $\zeta(\varphi)$ подставляется из (3.1) в диапазоне (3.3) и из (3.5) в диапазоне (3.4).



Фиг. 3



Фиг. 4

Проделав эту процедуру, приходим к следующему выражению для веса защиты оптимальной формы

$$g_0 = \sec \varphi_* - 1 + \ln \cos \varphi_* \quad \text{при } 1 - \cos \varphi_0 \leq \sigma_0 \leq -\ln \cos \varphi_0 \quad (4.1)$$

$$g_0 = \frac{\ln \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} + \frac{1 - \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} \left(1 + \ln \frac{1 - \cos \varphi_0}{\sigma_0 \cos \varphi_0} \right) \quad \text{при } 0 < \sigma_0 \leq 1 - \cos \varphi_0$$

где φ_* определяется соотношением (3.2).

Выражение (4.1) представлено на фиг. 5 в виде зависимости $g_0(\sigma_0)$ при фиксированных значениях φ_0 . Пунктиром нанесена кривая $\varphi_* = \varphi_0$, разделяющая области (3.3) и (3.4).

5. Найдем оптимальную защиту для случая цилиндрического источника. Доза радиации в точке O от цилиндрического источника (фиг. 6) с постоянной удельной интенсивностью равна [2]

$$\Sigma = 2\pi b k \gamma \left[\int_0^{\varphi_k} \operatorname{tg} \varphi e^{-\mu x} d\varphi + \int_{\varphi_k}^{\varphi_0} \left(\frac{r_0}{b} - \frac{r}{b} \operatorname{tg} \varphi \right) e^{-\mu x} d\varphi \right] \quad (5.1)$$

(обозначения см. на фиг. 6).

Выражение для веса защиты остается старым (1.3). Безразмерные переменные (1.4) также сохраняются, кроме первого, которое заменяется на $\sigma = \Sigma / 2\pi b k \gamma$.

В системе (1.5) первое уравнение, в соответствии с (5.1), примет следующий вид:

$$\sigma = f(\varphi) e^{-\zeta} \quad (5.2)$$

при $0 \leq \varphi \leq \varphi_k$

$$f(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi$$

при $\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$

$$f(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi_k (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi) (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_k)^{-1}$$

а второе уравнение останется без изменения.

Следовательно, особенность вариационной задачи об оптимальной форме защиты здесь состоит в том, что правая часть уравнения (5.2) при $\varphi = \varphi_k$ меняет вид. Однако из условия скачка [3] следует, что импульсы p_σ и p_g , которые в данном случае также постоянны, проходят через точку $\varphi = \varphi_k$ непрерывно. Поэтому оптимальное управление $\zeta(\varphi)$ определяется из условия абсолютного максимума следующих функций:

$$H^- = p_0 \operatorname{tg} \varphi e^{-\zeta} - \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \zeta \quad (\text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_k)$$

$$H^+ = p_0 \operatorname{tg} \varphi_k \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_k} e^{-\zeta} - \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi \zeta$$

(при $\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$)

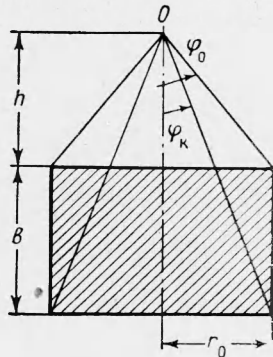
На первом участке ($0 \leq \varphi \leq \varphi_k$) это условие приводит, как и раньше, к соотношению (2.3), а на втором ($\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$) — к соотношению

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \ln [-p_0 T(\varphi) \cos \varphi] & \text{при } T(\varphi) \cos \varphi \geq -1/p_0 \\ 0 & \text{при } T(\varphi) \cos \varphi \leq -1/p_0 \end{cases} \quad (5.3)$$

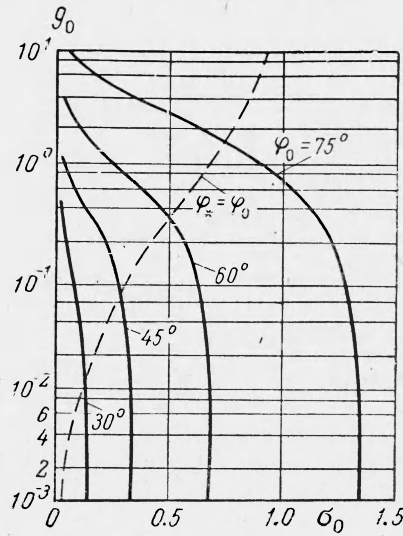
где

$$T(\varphi) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k \operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_k} \quad (0 \leq T(\varphi) \leq 1 \text{ при } \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0, T(\varphi_k) = 1, T(\varphi_0) = 0)$$

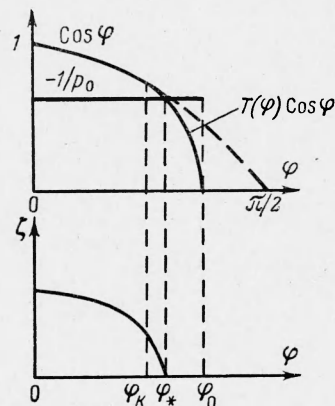
Таким образом, обращение толщины защиты в нуль для цилиндрического источника определяется точкой пересечения прямой $(-1/p_0)$ и кривых $\cos \varphi$ (при $0 \leq \varphi \leq \varphi_k$) и $T(\varphi) \cos \varphi$ (при $\varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_0$). Из-за того, что функция $T(\varphi)$ при $\varphi = \varphi_0$ обращается в нуль, точка пересечения $\varphi = \varphi_*$ всегда лежит в интервале $[0, \varphi_0]$ и периферийные области, в отличие от случая дискового источника, при любых значениях допустимой дозы σ_0 остаются незащищенными (фиг. 7).



Фиг. 6



Фиг. 5



Фиг. 7

Интегрируя уравнения (5.2) и второе уравнение (1.5), аналогично разделам 3 и 4, получаем окончательное выражение для формы и веса защиты.

В диапазоне $\tau(\varphi_0, \varphi_k) + 1 - \cos \varphi_k \leq \sigma_0 \leq \tau(\varphi_0, \varphi_k) - \ln \cos \varphi_k$

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \ln(\cos \varphi \sec \varphi_*) & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_* \\ 0 & \text{при } \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases}$$

$$g_0 = \sec \varphi_* - 1 + \ln \cos \varphi_*$$

где

$$\tau(\varphi_0, \varphi_k) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_k} \left[(\varphi_0 - \varphi_k) \operatorname{tg} \varphi_0 - \ln \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi_0} \right]$$

$$\sigma_0 = 1 - \cos \varphi_* + \ln \cos \varphi_* - \ln \cos \varphi_k + \tau(\varphi_0, \varphi_k)$$

В диапазоне $0 < \sigma_0 \leq \tau(\varphi_0, \varphi_k) + 1 - \cos \varphi_k$

$$\zeta(\varphi) = \begin{cases} \ln [T^{-1}(\varphi_*) \cos \varphi \sec \varphi_*] & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_k \\ \ln \{ [T(\varphi) / T(\varphi_*)] \cos \varphi \sec \varphi_* \} & \text{при } \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_* \\ 0 & \text{при } \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases}$$

$$g_0 = \frac{\ln \cos \varphi_*}{\cos \varphi_*} + \frac{1 - \cos \varphi_*}{\cos \varphi_*} \{ 1 - \ln [T(\varphi_*) \cos \varphi_*] \} + \int_{\varphi_k}^{\varphi_*} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \ln T(\varphi) d\varphi$$

где

$$\sigma_0 = T(\varphi_*) (1 - \cos \varphi_*) + \operatorname{tg} \varphi_k (\operatorname{tg} \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_k)^{-1} [(\varphi_0 - \varphi_*) \operatorname{tg} \varphi_0 + \ln (\cos \varphi_0 \sec \varphi_*)]$$

Поступила 23 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м е л ь Л. Р. Определение оптимальной формы защитного барьера. Атомная энергия, 1959, т. 7, № 3.
2. О с а н о в Д. П. Защита от гамма-излучения, выходящего через основание цилиндрического источника. Атомная энергия, 1959, т. 6, № 3.
3. П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНУЮ ПЛАЗМУ

И. В. Каменев, В. А. Погосян

(Москва)

Распространению электромагнитных волн через неоднородные среды в свободном пространстве посвящено большое число работ. В то же время задача о волноводном распространении решалась только в предположении однородности плазмы вдоль оси волновода [1]. Однако в реальных условиях это требование часто не выполняется. Положительный столб газового разряда, используемый в качестве плазменной среды, в большинстве случаев имеет слоистую структуру [2-4]. Ниже рассматривается волноводное распространение электромагнитных волн через неоднородную плазму.

§ 1. *Постановка задачи.* Рассмотрим распространение электромагнитных волн по волноводу с идеально проводящими стенками, заполненному неоднородной вдоль оси волновода плазмой. Выбираем декартову систему координат и совместим ось z с осью волновода, тогда для недиссипативной плазмы диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ выражается формулой

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} N(z) \quad (1.1)$$

причем проводимость $\sigma = 0$. Здесь $N(z)$ — концентрация электронов, ω — круговая частота распространяющейся волны, e и m — соответственно заряд и масса электрона. Магнитная проницаемость плазмы $\mu = 1$. Рассмотрим распространение волн в неоднородной среде в случае нормального падения волны на слой неоднородной среды. В этом случае поля E и H зависят лишь от координаты z , тогда из системы уравнений Максвелла для поля E в предположении простой гармонической зависимости от вре-