

5. В. К. Баев, П. К. Третьяков. Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1969, 3, 1.
6. V. C. Baev, P. C. Tretjakov. Investigation of turbulent Flams. Heat and Mass transfer in turbulent boundary layers. International summer school on heat and mass transfer, 9—21 September, 1968. Herceg — Novi Jugoslavia.
7. В. К. Баев, П. К. Третьяков. ФГВ, 1968, 4, 3.
8. В. К. Баев, Ю. В. Серов, П. К. Третьяков. ФГВ, 1970, 6, 2.
9. G. Winterfeld. On process of turbulent exchange behind Flame Holders. Symposium on Combustion. Cembrids, 1964.
10. Э. Л. Солохин. В сб. «Стабилизация пламени и развитие процесса сгорания в турбулентном потоке». М., Оборонгиз, 1967.
11. Б. И. Обмоин, П. К. Третьяков. Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1969, 13, 3.
12. С. А. Гольденберг, В. С. Пелевин. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 2.
13. J. Mantou, V. B. Millikin. Proceedings of the gas dynamics Symposium on aerothermochemistry, Northwestern University, Illinois, 1956.
14. Н. Н. Иноземцев. ИФЖ, 1959, 11, 10.
15. А. Эджерстон, А. Лефевр. Вопросы ракетной техники. Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы, № 1, 1955.
16. В. Н. Груздев, А. В. Талантов. Изв. вузов. Авиационная техника, 1969, 2.

УДК 536.46+532.517.4

РАСЧЕТ РЕАГИРУЮЩЕЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ ВОДОРОДА

В. И. Головичев, В. А. Ясаков

(Новосибирск)

Для расчета некоторых простейших случаев горения в турбулентном потоке широкое распространение получили полуэмпирические методы, исключающие из рассмотрения химический механизм процесса и исследующие явление в целом с гидродинамической точки зрения.

В настоящей работе гидродинамическая сторона задачи о смешении исследуется путем использования для уравнения сохранения количества движения пограничного слоя преобразования Мизеса, практического предположения относительно кажущейся турбулентной вязкости, основанного на гипотезе Магера, и линеаризации, предложенной Кляйнштайном [1—4].

Рассматривается течение, которое можно описать аналитически в соответствии с двумя предельными моделями химического процесса: замороженной и химически равновесной.

Замороженное течение представляет интерес для оценки условий, при которых наступает химически равновесное течение, и для определения того, как нужно изменить характеристики потока для увеличения вероятности воспламенения и наступления равновесного течения. Приближение равновесного течения позволяет получить некоторые характеристики пламени.

АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваемое течение схематически представлено на рис. 1. Равномерная, однородная струя реагирующего газа (H_2) истекает со скоростью \vec{u}_j в неподвижное воздушное пространство, служащее окислительной средой.

В анализе используются следующие специфические предположения:

- 1) процессы смешения описываются системой уравнений пограничного слоя;
- 2) течение считается осесимметричным и турбулентным;
- 3) в потоке имеет место локальное термодинамическое равновесие;
- 4) пренебрегается влиянием излучения на течение реагирующих газов;
- 5) при анализе диффузионного пламени скорости химических реакций считаются очень быстрыми по сравнению со скоростями конвекции вдоль линии тока или со скоростями диффузии поперек линии тока;

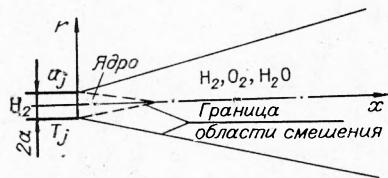


Рис. 1. Схема течения.

- 6) смесь принимается состоящей из окислителя (O_2), горючего (H_2), продукта горения (H_2O) и инертного газа (N_2);
- 7) давление в зоне смешения постоянно;
- 8) характеристики переноса таковы, что турбулентные числа Pg_t и Le_i^t равны единице;
- 9) течение установившееся;
- 10) газы считаются совершенными;
- 11) силы тяжести пренебрежимо малы;
- 12) макроскопическая неоднородность турбулентного потока не влияет на значение константы химического равновесия;
- 13) связь величины коэффициента турбулентного обмена с параметрами усредненного течения принимается классической (зависимость, предложенная Прандтлем [5]).

Основные уравнения идентичны соответствующим уравнениям для ламинарного течения, если заменить параметры установившегося ламинарного течения осредненными величинами для турбулентного течения, а параметры переноса заменить их феноменологическими аналогами. Тогда в системе цилиндрических координат вследствие предположения об осевой симметрии и нулевом потоке в направлении угловой координаты задача становится двумерной и описывается системой уравнений, которая, учитывая допущения 1—13, имеет вид:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\epsilon \rho r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (1)$$

уравнение сохранения энергии

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\epsilon \rho r \frac{\partial H}{\partial r} \right), \quad (2)$$

общее уравнение сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r) = 0, \quad (3)$$

уравнение сохранения массы i -ой компоненты

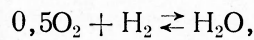
$$\rho u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y_i}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\epsilon \rho r \frac{\partial Y_i}{\partial r} \right] + \dot{\omega}_i. \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) — (4) дополняется алгебраическими выражениями уравнений состояния

$$p = \rho \frac{R_0 \cdot T}{W}, \quad h_i = h_i(T).$$

Аналитическое представление статической энтальпии компонентов смеси как функции температуры заимствовано из работы [6].

Граничные условия определяются сопряжением струи и внешнего потока на бесконечности. Замыкается вычислительная схема условием химического равновесия реакции



которое записывается как

$$K_p = \frac{p_{H_2} \cdot p_{O_2}}{p_{H_2O}}.$$

Для расчета турбулентной вязкости в сжимаемом потоке принята обычная модель, позволяющая преобразовать уравнение количества движения к такому же виду, как и для несжимаемого потока, и таким образом использовать методы решения задачи о смешении несжимаемых потоков для расчета течений сжимаемого газа. В соответствии с гипотезой Магера [2] связь между коэффициентами турбулентного обмена в сжимаемом и несжимаемом потоке выражается равенством $\epsilon r^2 = \epsilon^* \rho_0^2$ в плоском случае, или

$$\epsilon r^2 r^2 = \epsilon^* \rho_0^2 r^{*2} \quad (5)$$

в осесимметричном случае [7].

Допущения, приводящие к выражению (5) для коэффициента турбулентной вязкости, не являются очевидными. Поскольку основные уравнения (1) — (4) идентичны соответствующим уравнениям для ламинарного течения, вводится преобразование координат $(x, r) \rightarrow (x^*, r^*)$, сходное с тем, что используется для ламинарного пограничного слоя, и постулируется тождественность функций тока исходной и преобразованной систем координат. В обеих системах координат величина момента касательного напряжения остается инвариантом. С учетом этих допущений уравнения, описывающие течение сжимаемой жидкости (1) — (4), преобразуются к виду для несжимаемой, коэффициенты турбулентного обмена связаны соотношением (5), а связь между поперечными координатами в преобразованной и исходной системах координат выражается зависимостью

$$r^{*2} = \int_0^r 2 \frac{\rho}{\rho_0} r' dr'. \quad (6)$$

Далее коэффициент турбулентной вязкости в несжимаемом потоке ϵ^* принимается, как обычно, не зависящим от поперечной координаты. Благодаря этому уравнение сохранения количества движения линейризуется и имеет аналитическое решение.

ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Вводится функция тока $\tilde{\Psi}$ такая, что

$$\begin{aligned} \rho u r &= \rho_j u_j \tilde{\Psi} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r}, \\ -\rho v r &= \rho_j u_j \tilde{\Psi} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Тогда в плоскости $(\tilde{\Psi}, x)$ (плоскость Мизеса) уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u_j \tilde{\Psi}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\Psi}'} \left[\left(\frac{\varepsilon \rho^2 r^2 u}{\rho_j^2 u_j \tilde{\Psi}^2} \right) \tilde{\Psi} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}'} \right]. \quad (7)$$

Связь между $\tilde{\Psi}$ и r выражается соотношением

$$r^2 = \int_0^{\tilde{\Psi}} 2 \left(\frac{\rho_j u_j}{\rho \cdot u} \right) \tilde{\Psi}' d\tilde{\Psi}'. \quad (8)$$

В соответствии с (5) и (6)

$$\rho^2 r^2 \varepsilon = \varepsilon^* \rho_0^2 \int_0^r \left(\frac{2\rho}{\rho_0} \right) r' dr' = \varepsilon^* \rho_0 \rho_j \int_0^{\tilde{\Psi}} \frac{2u_j}{u} \tilde{\Psi}' d\tilde{\Psi}', \quad (9)$$

где $\varepsilon^* = \varepsilon^*(x)$ — турбулентная вязкость в несжимаемом потоке.

Подставляя (9) в (7), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u_j \tilde{\Psi}} \frac{\varepsilon^* \rho_0}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial \tilde{\Psi}'} \left(\left[\frac{u}{\tilde{\Psi}^2} \int_0^{\tilde{\Psi}} 2 \left(\frac{\tilde{\Psi}'}{u} \right) d\tilde{\Psi}' \right] \tilde{\Psi} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}'} \right). \quad (10)$$

Следуя [3], разложим $\int_0^{\tilde{\Psi}} 2 \left(\frac{\tilde{\Psi}'}{u} \right) d\tilde{\Psi}'$ в ряд Маклорена

$$\int_0^{\tilde{\Psi}} 2 \left(\frac{\tilde{\Psi}'}{u} \right) d\tilde{\Psi}' = \varphi(x, \tilde{\Psi}) = \varphi(x, 0) + \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\Psi}}(x, 0) \tilde{\Psi} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\Psi}^2}(x, 0) \tilde{\Psi}^2 + \dots \quad (11)$$

Непосредственным вычислением убедимся, что

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\Psi}}(x, 0) &= 2 \frac{\tilde{\Psi}}{u} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\Psi}^2}(x, 0) &= 2 \left(u - \tilde{\Psi} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}'} \right) \frac{1}{u^2} = \frac{2}{u}; \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tilde{\Psi}^3}(x, 0) &= -\frac{4u\tilde{\Psi}}{u^2} + \frac{2\tilde{\Psi} \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}'} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}'} \right)}{u^3} = 0; \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tilde{\Psi}^4}(x, 0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) использовано то обстоятельство, что вследствие симметрии относительно оси x $\frac{\partial u}{\partial \tilde{\Psi}'} = 0$. Таким образом, разложение (11) имеет вид:

$$\int_0^{\tilde{\Psi}} 2 \left(\frac{\tilde{\Psi}'}{u} \right) d\tilde{\Psi}' = \frac{\tilde{\Psi}^2}{u} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \tilde{\Psi}^4}(x, 0) \tilde{\Psi}^4 + \dots$$

Ограничившись первым членом, получаем

$$\int_0^{\tilde{\Psi}} 2 \left(\frac{\tilde{\Psi}'}{u} \right) d\tilde{\Psi}' = \frac{\tilde{\Psi}^2}{u}. \quad (13)$$

Таким образом, член в квадратных скобках в (10) равен единице с точностью до значения отбрасываемых членов.

Рассмотрим далее новую зависимую переменную $U = \frac{u}{u_j}$ и преобразование

$$\tilde{\xi} = \int_0^x \left(\frac{\rho_0}{\rho_j} \right) \frac{\varepsilon^*}{u_j a} dx', \quad (14)$$

где a — радиус сопла.

Тогда уравнение (10) с учетом (13) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{\xi}} = \left(\frac{a}{\tilde{\Psi}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\Psi}} \left(\tilde{\Psi} \frac{\partial U}{\partial \tilde{\Psi}} \right).$$

Вводя продольную и радиальную безразмерные координаты

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{a} \text{ и } \Psi = \frac{\tilde{\Psi}}{a},$$

получим окончательный вид уравнения сохранения количества движения в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\Psi \frac{\partial U}{\partial \Psi} \right). \quad (15)$$

Для течения, схематически показанного на рис. 1, для которого поток в струе равномерен, условия, накладываемые на U , таковы:

$$U(\xi, \Psi) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \Psi \leq 1, \\ 0 & \Psi > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\Psi \rightarrow \infty} U(\xi, \Psi) = \lim_{\Psi \rightarrow \infty} \Psi U(\xi, \Psi) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Psi}(\xi, 0) = 0 \quad U(0, \xi) < \infty.$$

Уравнение (15) с краевыми условиями (16) можно решить, используя преобразование Ханкеля нулевого порядка (см. приложение I). Распределение относительной скорости $U(\xi, \Psi)$ описывается круговой вероятностной функцией Мастера, известной под названием Р-функции

$$U(\xi, \Psi) \equiv P(\xi, \Psi) = \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{\Psi^2}{4\xi}\right) \int_0^1 \Psi' \exp\left(-\frac{\Psi'^2}{4\Psi}\right) I_0\left(\frac{\Psi \Psi'}{2\xi}\right) d\Psi', \quad (17)$$

где $I_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Это обстоятельство приводит к необходимости либо запоминать таблицу значений Р-функции [8], либо параллельно с решением основной задачи производить расчет требуемых значений функции. Первый путь приводит к значительному увеличению времени счета ввиду ограниченного объема памяти ЭВМ и малой скорости действия внешних запоминающих устройств и многократной интерполяции. В связи с этим в приложении II дается описание алгоритма, позволяющего рассчитывать поле значений Р-функции без применения табличных значений и интерполяции. Результаты расчета по описанному алгоритму приведены на рис. 2 и находятся в хорошем соответствии со значениями Р-функции, затабулированной в [8, 9].

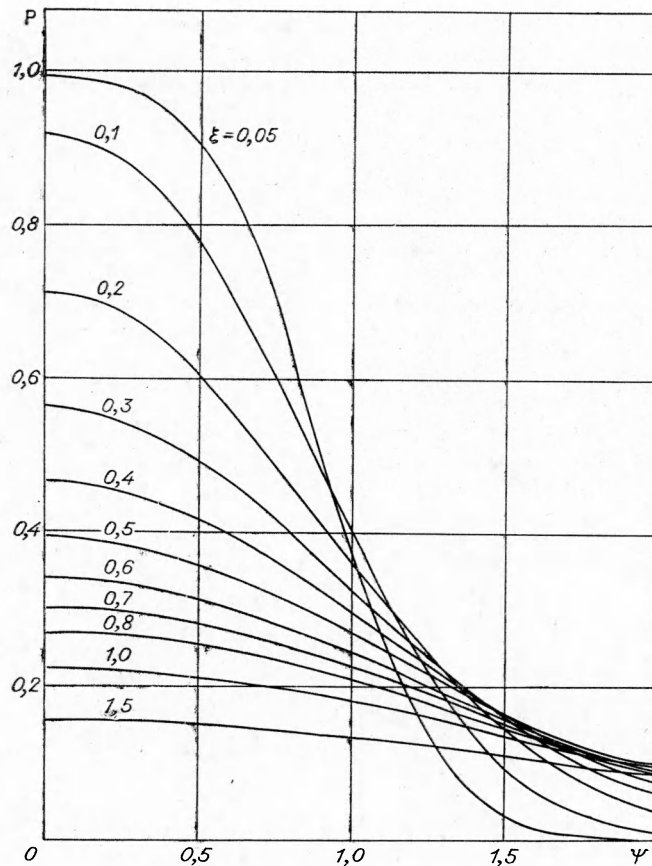


Рис. 2. Профили относительной скорости в плоскости Мизеса.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ФИЗИЧЕСКУЮ ПЛОСКОСТЬ

Чтобы воспользоваться решением (17) для описания течения в физической плоскости, нужно сделать два преобразования, обратные преобразованиям (8) и (14). Для преобразования продольной координаты требуется определить ε^* . По Прандтлю для свободной турбулентности кажущаяся кинематическая вязкость ε^* принимается равной произведению максимальной разности осредненных скоростей в рассматриваемом сечении на некоторую длину, пропорциональную ширине зоны смешения b , следовательно, принимается, что

$$\varepsilon^* = k_1 \cdot b (u_{\max} - u_{\min}),$$

где b — ширина зоны смешения, в которой скорость меняется от u_{\max} до u_{\min} , а k_1 — постоянная, определяемая из эксперимента. Таким образом, в данном решении

$$\varepsilon^* = k_1 b u_j U_c. \quad (18)$$

Для описания профилей при свободном смешении обычно [1] заменяют произведение $k_1 b$ произведением другой константы на половину ширины зоны смешения b_1 ; при смешении осесимметричных турбулентных потоков за b_1 принимают радиальное расстояние от оси до точки, где $U = U_c/2$.

В исследуемой струе можно различать две различные области смешения: ближнюю область, где смешение близко к плоскому, и дальнюю область, где смешение соответствует процессу, обычно рассматриваемому для круглой струи. За условную границу этих областей принимается $\xi_j = 0,05$. Таким образом, точное выражение для ε^* может быть аналитически сложным. В настоящем исследовании используются два приближения: одно, соответствующее [1], другое — дальнейшее упрощение выражения для ε^* , описывающее течение в дальней области.

В ближней области принимаем выражение, соответствующее плоскому случаю,

$$\varepsilon^* = 0,00137 u_j x U_c \quad (19)$$

или для $\xi \leq \xi_j$

$$\varepsilon^* = 0,00137 u_j x \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right) \right]. \quad (20)$$

В области, лежащей вниз по потоку, где процесс смешения распространяется поперек всей струи, предполагается, что

$$\varepsilon^* = 0,025 (r_{1/2}^*) u_j U_c, \quad (21)$$

где $r_{1/2}^*$ — половина радиуса для несжимаемого потока:

$$(r_{1/2}^*)^2 = 2 \int_0^{r_{1/2}^*} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) r' dr' = 2 \int_0^{\Psi_{1/2}^*} \left(\frac{\Psi'}{u} \right) \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right) d\Psi'. \quad (22)$$

Здесь $\Psi_{1/2}^*$ — значение Ψ , соответствующее $U = U_c/2$, ρ_0 считается постоянной в пределах каждой зоны смешения. Физически оправданным является следующий выбор ρ_0 : при

$$0 \leq \xi \leq 0,05 \quad \rho_0 = \rho_j; \quad \text{при } \xi > 0,05 \quad \rho = \rho_c.$$

Такие определения ρ_0 и будут использованы в дальнейшем.

Соотношения (19) — (22) позволяют обратить преобразование (14). В зависимости от рассматриваемой области течения получаем два выражения для перевода в физическую плоскость продольной координаты:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= 38,2 \left[\int_0^{\xi} \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right) \frac{d\xi}{1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right)} \right]^{1/2} j \quad \text{для } 0 \leq \xi \leq 0,05; \quad (23) \\ \frac{x}{a} &= 38,2 \left[\int_0^{0,05} \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right) \frac{d\xi}{1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right)} \right]^{1/2} + 40 \int_{0,05}^{\xi} \left(\frac{\rho_j}{\rho_0} \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left[\int_0^{\Psi'} \frac{2}{P} \Psi' d\Psi' \right]^{1/2} \frac{d\xi'}{1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi'}\right)}. \quad (24) \end{aligned}$$

Вместо выражений (23) и (24), справедливых в ближней области, в дальней области можно использовать более простую зависимость, предположив, что в этой области кажущаяся кинематическая вязкость является постоянной величиной [5]. В этом случае практический перевод преобразованной продольной координаты в физическую следует производить по формуле

$$\xi = \varepsilon^* \left(\frac{\rho_0}{\rho_j} \right) \frac{x}{u_j} + c(0). \quad (25)$$

Здесь ρ_0 — некоторая характерная плотность. Если для величины ε^* использовать зависимость (18), предложенную Прандтлем, то в этом случае (25) записывается как:

$$\xi = 0,025 (r_{1/2}^*) \rho_0 U_c \frac{x}{\rho_j} + c(0). \quad (26)$$

Из определения величины $\Psi_{1/2}$ следует, что

$$\frac{\rho u}{\rho_j u_j} = \bar{\rho} \bar{u} = \rho_0 U(\infty, \Psi_{1/2}) = \rho_0 \frac{U_c}{2}$$

и, следовательно,

$$U(\infty, \Psi_{1/2}) = \frac{1}{2} U_c.$$

Из асимптотических представлений Р-функции (см. (I.9) и (I.10)) делаем заключение, что

$$\exp\left(-\frac{\Psi_{1/2}^2}{4\xi^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Вычислим интеграл (22) в предположении асимптотического представления скорости U (см. (I.10))

$$\begin{aligned} (r_{1/2}^*)^2 &= \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right) \int_0^{\Psi_{1/2}} \frac{2\Psi'}{U} d\Psi' = \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right) \int_0^{\Psi_{1/2}} \frac{4\xi d\Psi'^2}{\exp\left(-\frac{\Psi'^2}{4\xi^2}\right)} = \\ &= \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right) 16\xi^2 \int_0^{\Psi_{1/2}} \exp\left(\frac{\Psi'^2}{4\xi^2}\right) d\left(\frac{\Psi'^2}{4\xi^2}\right) = 16\xi^2 \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right), \end{aligned}$$

откуда

$$r_{1/2}^* = 4\xi \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим

$$\xi = 0,025 \left(\frac{\rho_0}{\rho_j}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot x + c(0).$$

Здесь было использовано асимптотическое представление осевой скорости

$$U_c = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi^2}\right) \approx \frac{1}{4\xi^2}.$$

Для дальней области постоянную $c(0)$ можно считать несущественной. В таком случае

$$x = 40 \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \xi. \quad (28)$$

С учетом (28) выражение для осевой скорости может быть записано в виде

$$U_c = 1 - \exp\left[\left(-40 \frac{x}{a_0}\right)^{-1}\right]. \quad (29)$$

В этом уравнении величина a_0 представляет собой так называемый эффективный радиус струи и определяется как

$$a_0 = \left(\frac{\rho_j}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a.$$

В качестве характерного значения плотности для замороженного течения можно выбрать величину ρ_e . Таким образом, гомогенная сжимаемая струя описывается как несжимаемая, у которой фактически радиус a заменен эффективным радиусом a_0 [10].

Для описания диффузионного пламени часто используют модель поверхностного горения, в которой течение разделяется на две области: в одной отсутствует топливо, в другой — окислитель. На границе этих областей, принимаемой за поверхность пламени, концентрации топлива и окислителя равны нулю. Это «пламя», таким образом, существует в точках, где соотношение между топливом и окислителем стехиометрическое. В этом случае характерное состояние ρ_0 отнесем к фронту пламени, считая, что его положение, по крайней мере вблизи оси симметрии, описывается приближением $\xi \gg 1$. Для изобарического процесса горения в предположении идеальности реагирующих газов имеем:

$$(\rho T)_f = (\rho T)_j.$$

Зная расчетную температуру на фронте пламени, зависимость между продольными координатами в физической плоскости и плоскости Мизеса выразим соотношением, аналогичным (28)

$$x_f = 40 \left(\frac{T_f}{T_j} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \xi_f, \quad (30)$$

которое существенно проще выражения (24).

Так же, как и ранее, можно отметить, что диффузионное пламя описывается в таком приближении введением эффективного радиуса a'_0 , который теперь равен

$$a'_0 = \left(\frac{T_f}{T_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot a, \quad (31)$$

в связи с чем осевое распределение скорости в пламени описывается соотношением (29), в котором вместо a_0 стоит a'_0 , определенное по (31), т. е. осевая скорость в пламени затухает быстрее, чем в струе.

Положение границы пламени можно определить по максимальной концентрации воды, по максимальному значению температуры либо использовать тот факт, что вблизи поверхности горения концентрации горючего и окислителя малы.

Таким образом, выражение (30) может служить для определения длины пламени, если вместо ξ_f подставить некоторое характерное значение ξ_{fb} , соответствующее определенному тем или иным способом положению фронта пламени.

В общем случае преобразование решения для поля скоростей к физической плоскости следует производить по соотношениям (8), (23) и (24), предварительно выбрав исходное значение для ρ_0 и определив распределение плотности в плоскости Мизеса. В связи с этим необходимо рассматривать химическую модель течения. Перевод поперечной координаты в физическую плоскость осуществляется по выражению:

$$r^2 = 2 \int_0^{\Psi} \frac{\Psi' d\Psi'}{\rho u} \approx \frac{\Psi^2}{\rho c u_c}, \quad (8')$$

в связи с чем при численном интегрировании (8') необходимо интерполировать функцию двух переменных $\rho u(\xi, \Psi)$.

Для того чтобы окончательно завершить переход в физическую плоскость, необходимо знать распределение плотности в поле течения. Для этого рассмотрим решение уравнения энергии.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Из уравнений (1) и (2) непосредственно следует, что если $Le_i^t = Pr^t = 1$, то решение (2), в предположении о равномерности течения в струе и во внешнем воздушном потоке, имеет вид

$$H = C_1 u + C_2, \quad (32)$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Уравнение (32) идентично интегралу Крокко. Постоянные C_1 , C_2 определяются соотношениями, вытекающими из начальных условий, аналогичных (16)

$$H(0, r) = \begin{cases} H_j & 0 \leq r \leq a \\ H_e & r > a \end{cases}. \quad (33)$$

Из (33) и (32) следует, что

$$C_2 = H_e, \quad C_1 = \frac{H_j - H_e}{u_j}. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32), получим:

$$H = H_j u + H_e (1 - u). \quad (35)$$

Здесь $H \equiv \frac{u^2}{2} + h$. Таким образом, соотношение Крокко для энтальпии торможения имеет вид (35). Аналогичные выражения могут быть записаны и для концентраций, определяющих состав смеси.

РАСЧЕТ ЗАМОРОЖЕННОГО ТЕЧЕНИЯ

Для замороженного течения $\dot{\omega}_i = 0$. При равномерном распределении параметров внешнего воздуха и струи водорода снова можно воспользоваться интегральными соотношениями Крокко между массовыми долями компонентов смеси, которые отвечают решению уравнения сохранения массы, и относительной скоростью U (4). Далее предполагаем, что в смеси присутствуют только молекулярные кислород, водород и азот.

Обозначим через Y_i различные компоненты: индекс $i=1$ присвоим кислороду, $i=2$ — водороду, $i=3$ — воде (в газообразном состоянии) и $i=4$ — азоту. Соответствующие интегральные соотношения для замороженного течения имеют следующий вид:

$$Y_1 = Y_{1e} (1 - U),$$

$$Y_2 = U,$$

$$Y_3 = 0,$$

$$Y_4 = Y_{4e} (1 - U).$$

Таким образом, состав зависит только от относительной скорости U .

Теперь для удобства расчетов можно ввести аналитическое представление функций $h_i = h_i(T)$, заимствованное из [6]

$$h_i = A_i + B_i T^* + C_i (T^* - T_{0i}^*)^2, \quad (36)$$

где T_{0i}^* — некоторая характерная температура. Выражения (36) и (35) можно разрешить относительно температуры в виде:

$$T^3 + \left(\frac{\sum B_i Y_i - 2 \sum C_i Y_i T_{0i}^*}{\sum C_i Y_i} \right) T - \frac{H_j U + H_e (1-U) - \frac{1}{2} u_j^2 U^2}{\sum C_i Y_i} - \frac{\sum Y_i A_i + \sum C_i Y_i T_{0i}^{*2}}{\sum C_i Y_i} = 0$$

Входящее в выражение (8) отношение плотностей, получается из уравнения состояния

$$\frac{\rho_j}{\rho} = \frac{T}{T_j} \left(\frac{1}{W} \right),$$

где

$$W = \left(\frac{\sum Y_i}{W_i} \right)^{-1}.$$

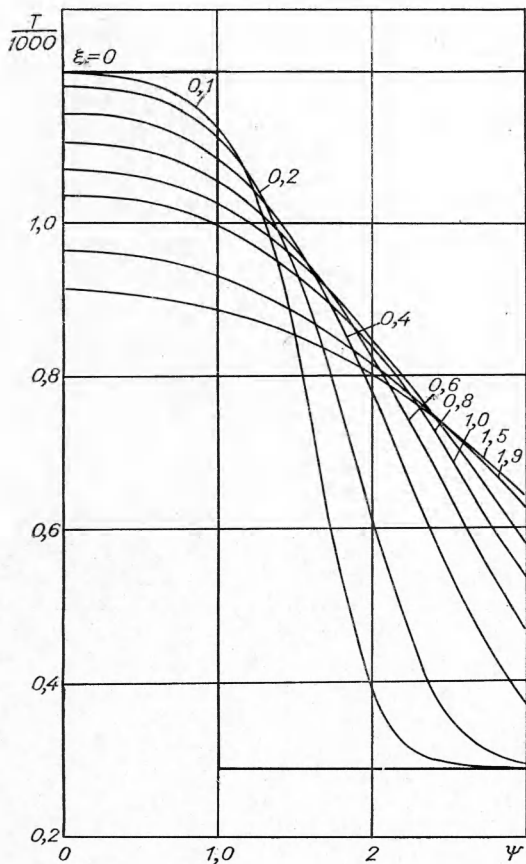


Рис. 3. Профили температуры в плоскости Мизеса (замороженное течение; $T_{0e} = 290^\circ \text{K}$; $T_{0j} = 1200^\circ \text{K}$).

Из приведенных выше уравнений можно легко вычислить $\frac{\rho_j}{\rho}$ как функцию U , а поскольку $U(\xi, \Psi)$ известная функция, можно выполнить преобразования (8) и (14), если выбрано характеристическое состояние ρ_0 .

Параметрами, определяющими решение, являются начальные концентрации $Y_{1e}, Y_{2e}, Y_{4e}, H_e, H_j, u_j^2, T_j$. Графики распределения параметров течения в плоскости Мизеса приведены на рис. 2 и 3, а на рис. 4 — в физической плоскости.

Расчеты были выполнены для двух режимов:

- I. $p = 1,01 \text{ ата}$, $T_{0e} = 300^\circ \text{K}$,
 $u_j = 830 \text{ м/сек}$.

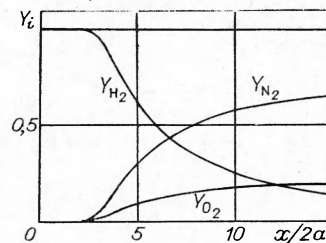


Рис. 4. Осевые распределения весовых долей компонентов смеси (замороженное течение).

II. Изменена температура струи и соответствующая ей плотность, $T_{0e} = 1200^\circ \text{K}$.

Из рис. 4 следует, что водород постепенно диффундирует в воздушный поток и концентрация воздуха в центре водородной струи постепенно увеличивается. Описание сравнения и результатов расчета с данными экспериментального исследования сделано ниже.

РАСЧЕТ РАВНОВЕСНОГО ТЕЧЕНИЯ

При рассмотрении химически равновесного течения, как и во всех химических расчетах, необходимо заранее предположить, какие продукты реакции являются существенными. В данном случае азот рассматривается как инертный разбавитель и единственным продуктом реакции считается вода в газообразном состоянии; такое предположение оправдано в силу ограничений, накладываемых равновесным характером химического процесса.

Введем вектор химической формулы k -го вещества

$$\vec{\alpha}_k \equiv (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_j}, \dots, \alpha_{k_s}),$$

рассматривая систему, состоящую из k компонентов и s элементов.

Количество молей i -го элемента в смеси определяется выражением

$$\rho \frac{Y_i}{W_i} = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} \rho \frac{Y_j}{W_j}$$

или, сокращая на ρ ,

$$Y_i = \sum_{j=1}^k \alpha_{ji} Y_j \frac{W_i}{W_j}.$$

Поскольку скорость изменения массовых концентраций элементов равна нулю, то справедливо соотношение

$$\dot{Y}_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ji} \frac{\dot{w}_j}{W_j}. \quad (38)$$

Для рассматриваемой системы, т. к. $i=1, 2$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Из (38) и (39) следует, что анализируемая система предполагает выполнение следующих требований:

$$\alpha_{11} \frac{\dot{w}_1}{W_1} + \alpha_{21} \frac{\dot{w}_2}{W_2} + \alpha_{31} \frac{\dot{w}_3}{W_3} = 0,$$

$$\alpha_{21} \frac{\dot{w}_1}{W_1} + \alpha_{22} \frac{\dot{w}_2}{W_2} + \alpha_{32} \frac{\dot{w}_3}{W_3} = 0$$

или

$$2 \frac{\dot{w}_1}{W_1} + \frac{\dot{w}_3}{W_3} = 0,$$

$$\frac{\dot{w}_2}{W_2} + \frac{\dot{w}_3}{W_3} = 0.$$

Введением в рассмотрение массовых долей элементов:

$$\tilde{Y}_1 = Y_1 + \left(\frac{W_1}{2W_3}\right) Y_3,$$

$$\tilde{Y}_2 = Y_2 + \left(\frac{W_2}{W_3}\right) Y_3.$$

Уравнения сохранения массы (4) можно заменить соотношениями:

$$\rho u \frac{\partial \tilde{Y}_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \tilde{Y}_i}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\varepsilon \rho r \frac{\partial \tilde{Y}_i}{\partial r} \right]; \quad i = 1, 2. \quad (40)$$

При равномерном течении во внешнем потоке воздуха и струе водорода сравнение уравнений (1) и (40) снова приводит к соотношениям

$$\tilde{Y}_1 = Y_{1e} (1 - U), \quad (41)$$

$$\tilde{Y}_2 = U.$$

Кроме того, поскольку азот является инертным разбавителем ($\dot{w}_4 = 0$), то в этом равновесном случае имеет место соотношение

$$\tilde{Y}_4 = Y_{4e} (1 - U), \quad (42)$$

справедливое в замороженном случае. Соотношения (41) и (42) справедливы и в аналогичной химически неравновесной системе.

Замыкается вычислительная схема для определения состояния газа в зависимости от относительной скорости U , как параметра, условием химического равновесия:

$$\prod_{i=1}^3 (p_i)^{\nu_i} = K_p(T), \quad (43)$$

где

$$\nu_1 = 1/2, \quad \nu_2 = 1, \quad \nu_3 = -1.$$

Через массовые доли соотношение (43) записывается как

$$\frac{(p_1)^{1/2} \cdot p_2}{p_3} = p_*^{1/2} \frac{\left(\frac{Y_1}{W_1}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{Y_2}{W_2}\right)}{\left(\frac{Y_3}{W_3}\right) \cdot \left(\frac{\sum Y_i}{W_1}\right)^{1/2}} = K_p(T), \quad (44)$$

где $p_* = \sum_1^N p_i$ — полное давление смеси, равное сумме парциальных давлений компонентов. Если воспользоваться приближенным аналитическим представлением $h_i = h_i(T^*)$, то можно применить следующую методику для определения параметров течения в плоскости Мизеса, как функции от Ψ и ξ . Зная параметры, относящиеся к течению и к термодинамическим свойствам газов, определяем \tilde{Y}_i ($i = 1, 2$) и \tilde{Y}_4 .

Введя новые переменные $y_i = \frac{Y_i}{W_i}$, определяем y_3 из условия равенства исходной энтальпии и суммарной энтальпии компонентов смеси, задавая приближение T_0^*

$$y_3 = \frac{H_e(1-U) + H_j U - 0,5(U \cdot u_j)^2 - h_4(T_0^*) Y_4 - h_1(T_0^*) \tilde{Y}_1 - h_2 \tilde{Y}_2}{h_3(T_0^*) - 0,5 h_1(T_0^*) W_1 - h_2(T_0^*) W_2}. \quad (45)$$

Используя вычисленное значение y_3 , определяем $K_p(T_0^*)$ по соотношению (44), записанному в форме

$$\lg K_p(T) = \lg \left[p_*^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{\tilde{y}_2}{y_3} - 1}{\left(1 + \frac{\tilde{y}_2 + y_1}{y_1 - 0,5y_3}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (46)$$

Значения $\lg K_p(T)$ как функции от температуры заимствованы из [11]. Интерполяцией определяется соответствующее $K_p(T^*)$ из (46) значение температуры T_1^* , которая сравнивается со значением температуры T_0^* . В случае отличия T_1^* от T_0^* на величину, большую заданной точности, выбирается новое значение T_0^* и процесс повторяется. Для задания приближений T_0^* используется простая поисковая методика, основанная на алгоритме половинного деления.

Кроме описанного способа, можно также решать систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными Y_1, Y_2, Y_3, T методом Ньютона — Рафсона [12], предварительно линеаризовав исходную систему алгебраических уравнений логарифмированием.

В настоящей работе использовалась следующая расчетная методика. Подставляя (45) в (46), получим алгебраическое уравнение относительно T^* . Непосредственное применение алгоритма Ньютона — Рафсона является не очень удобным, так как помимо значений функции необходимо вычислять значения ее производной. Для удобства реализации указанного алгоритма задается начальное приближение T_0^* (Ψ) или T_0^* (ξ) при фиксированном ξ (фиксированном Ψ) дискретным набором значений T_0^* , соответствующим Ψ (или ξ). Значения $f(\Psi, \xi, T_0^*)$ аппроксимируются с заданной степенью точности некоторым полиномом методом наименьших квадратов. В таком случае вычисление производной $f'(\Psi, \xi, T_0^*)$ является очень простой процедурой и последующие приближения в точках Ψ (или ξ) вычисляются по рекуррентному соотношению алгоритма Ньютона — Рафсона. Определив действительное распределение $T^*(\Psi)$ (или $T^*(\xi)$), легко определяем другие параметры течения в плоскости Мизеса. На рис. 5 приведены распределения концентраций Y_i поперек реагирующей струи для сечения $\xi = 0, 1$, полученные описанным методом. Определив отношение ρ_f/ρ_0 и выбрав характерное состояние ρ_0 , используя (8), (23) и (24), находим распределение интересующих величин в физической плоскости.

Так как кислород и водород вступают в реакцию мгновенно, сразу же образуя воду, то во внешней области смешения поток обогащен кислородом, поэтому газ состоит из водяного пара, азота и кислорода.

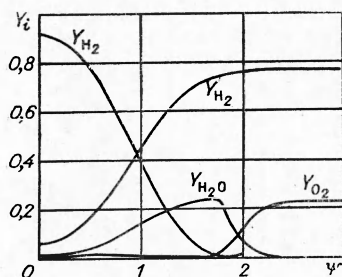


Рис. 5. Профили весовых долей компонентов смеси (химически равновесное течение).

Во внутренней части области смешения в потоке имеет место избыток водорода, и газ состоит из водяного пара, азота и водорода. Эти области разделены поверхностью, на которой соотношение компонент стехиометрическое.

В этих условиях часто используется модель поверхностного горения [1]. Поверхность горения определяется так, чтобы $(Y_1)_f \approx (Y_2)_f \approx 0$. В соответствии с этим приближением уравнение (37) заменяется утверждением, что либо $Y_1 \approx 0$, либо $Y_2 \approx 0$. В результате для U_f получается уравнение

$$U_f = \frac{1}{1 + \frac{W_1}{2W_2 Y_{1e}}} \approx 0,028,$$

т. е. положение поверхности горения в пространстве не отличается от положения поверхности, на которой отношение компонент стехиометрическое. На поверхности горения массовые доли азота и воды принимают следующие значения:

$$(Y_4)_f = \frac{Y_{4e}}{1 + \frac{2W_2 Y_{1e}}{W_1}},$$

$$(Y_3)_f = \frac{2W_3 Y_{1e}}{W_1}.$$

Подводя итог расчетной части работы, хотелось бы отметить, что использование подобных полуэмпирических теорий дает хорошие результаты лишь при расчете распределений газодинамических параметров в центральной части слоя смешения, а в граничных областях приводит к существенным неточностям.

Для этих областей турбулентного потока характерна перемежаемость, т. е. нерегулярное колебание границ, отделяющих зону смешения от невозмущенных потоков. Вовлекаемая из-за искривления границы струи нетурбулентная жидкость в течение какого-то времени обладает интенсивностью пульсаций, меньшей интенсивности пульсаций турбулентного потока, сформировавшегося ранее. Измеренная интенсивность пульсаций складывается, таким образом, из значений интенсивности пульсаций вполне турбулентной жидкости и соответствующих значений нетурбулентной жидкости. Вследствие этого следует ожидать, что поперечный размер струи, измеренный экспериментально, превысит расчетный, определенный по осредненной скорости.

СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ ДАННЫХ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ

Решения, приведенные в предшествующих разделах, были сравнены с некоторыми экспериментальными данными. При этом была сделана попытка уточнить константу, входящую в соотношение, описывающее кажущуюся турбулентную вязкость, в соответствии с имеющимися экспериментальными распределениями параметров струи.

Нереагирующие потоки. В экспериментальном исследовании процесса смешения затопленной струи водорода с воздухом измерялись распределения концентрации водорода и динамического напора по оси и поперек струи. Отбор газа для определения концентрации в данной точ-

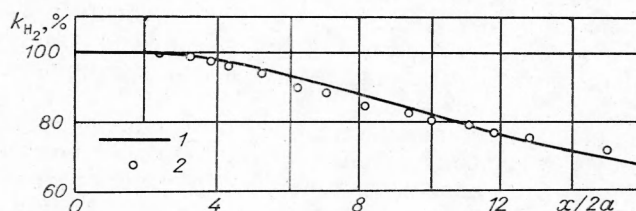


Рис. 6. Сравнение осевых распределений объемной концентрации водорода.

1 — расчет; 2 — эксперимент.

ке и измерение ρu^2 в этой же точке производились трубкой полного давления с наружным диаметром 0,47 и внутренним 0,17 мм. Положение ее фиксировалось координатным устройством с точностью до 0,1 мм в каждом направлении. Продолжительность отбора газовой пробы составляла от 10 до 60 сек, после чего в этой же точке определялся динамический напор. Анализ проб производился методом газовой хроматографии на приборе ХЛ-4. Динамический напор измерялся в зависимости от положения насадка (область границы струи или область вблизи оси струи) либо U-образным манометром, заполненным спиртом, либо образцовым манометром со шкалой 0—1 атм.

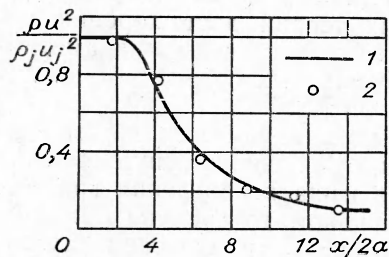


Рис. 7. Сравнение осевых распределений динамического напора. 1 — расчет; 2 — эксперимент.

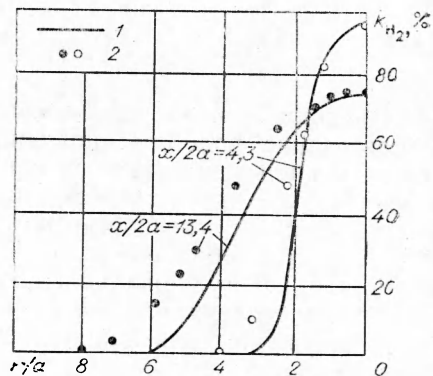


Рис. 8. Радиальные профили объемной концентрации водорода. 1 — расчет; 2 — эксперимент.

Сравнение расчетных и экспериментальных данных по изменению концентрации вдоль оси для изотермического случая $\left(\frac{T_{0j}}{T_{0e}} = 1, T_{0e} = 290^\circ \text{K}\right)$ и скорости истечения струи $u_j = 830 \text{ м/сек}$, а также изменению динамического напора вдоль оси для тех же условий эксперимента приведено на рис. 6 и 7 соответственно. Согласие с экспериментом является удовлетворительным при значении константы k_1 в (24), равной 0,037, рекомендованном в [13], а не 0,025, как в оригинале [1].

Рассчитанное распределение концентрации H_2 поперек струи (рис. 8) совпадает с экспериментальным несколько хуже, что, по-видимому, является следствием того, что величина ρu не сохраняется поперек потока, а именно это допущение использовано при переводе в физическую плоскость радиальной координаты.

Водородные пламена. На этой же установке была проведена серия экспериментов по определению длин диффузионных затопленных пламен водорода. Длины пламен определялись фотометрированием негатива на микрофотометре МФ-4.

Пламена были вертикальными, поэтому вдали от начала струи становились существенными конвективные подъемные силы. В связи с этим с увеличением скорости истечения струи водорода (уменьшение влияния подъемных сил) u_j экспериментальные значения длины пламени приближаются к расчетным, как показано на рис. 9.

На рис. 10 приведено сравнение расчетного профиля ρu^2 по оси факела с экспериментальным.

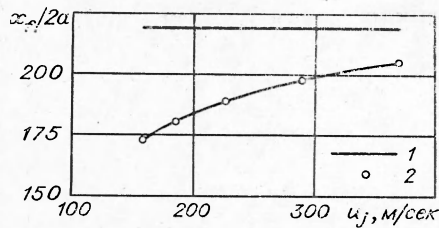


Рис. 9. Сравнение расчетной и экспериментальной длин пламени.
1 — расчет; 2 — эксперимент.

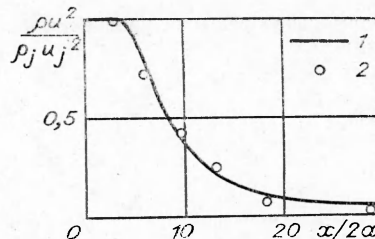


Рис. 10. Сравнение осевых распределений динамического напора (химически равновесное течение).
1 — расчет; 2 — эксперимент.

Из рассмотренных здесь сравнений следует, что подобные расчеты позволяют удовлетворительно оценить характеристики реагирующих турбулентных потоков и что использованное выражение для ϵ является приемлемым.

ВЫВОДЫ

Проведен анализ алгоритма расчета турбулентного смешения сжимаемых реагирующих газов. Для кажущейся турбулентной вязкости в сжимаемом потоке принята обычная модель, позволяющая преобразовать уравнение количества движения к такому же виду, как и для несжимаемого потока. Получено приближенное решение, описывающее поле скоростей, и предложен численный алгоритм его расчета.

Использованы обычные допущения о распределении энергии и концентраций. Обсуждаются два предельных химических процесса: замороженное течение и химически равновесное течение.

Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными по струям нереагирующего газа (замороженное течение) и с данными по водородным пламенам с малой скоростью. Совпадение оказалось удовлетворительным, из чего можно заключить, что подобные расчеты позволяют правильно оценивать характеристики как нереагирующих, так и реагирующих турбулентных потоков.

При малых скоростях истечения реагирующих газов существенными становятся подъемные силы.

Приложение I

Уравнение (15) с крайевыми условиями (16) можно решить, используя преобразование Ханкеля m -го порядка [14]:

$$K_m [R(\Psi); z] = \int_0^{\infty} \Psi R(\xi, \Psi) J_m(z\Psi) d\Psi = \tilde{R}(\xi, z). \quad (I.1)$$

Здесь

$$R(\xi, \Psi) = \frac{1}{\Psi} \frac{\partial U}{\partial \Psi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \Psi^2}.$$

Отметим следующее свойство преобразования Ханкеля:

$$K_m \left[f''(\Psi) + \frac{1}{\Psi} f'(\Psi) - \frac{m^2}{\Psi^2} f(\Psi); z \right] = -z^2 K_m [f(\Psi); z]. \quad (I.2)$$

Сравнивая (I.2) и (I.1), приходим к заключению, что для $f(\Psi, \xi) \equiv R(\xi, \Psi)$ необходимо $m=0$, а для изображения $\tilde{U}(\xi, \Psi)$ справедливо следующее дифференциальное выражение

$$\tilde{U}'(\xi, z) + z^2 \tilde{U}(\xi, z) = 0. \quad (I.3)$$

Формальное решение уравнения (1.3) с некоторым начальным условием $\tilde{U}_0(0, z)$ имеет вид:

$$\tilde{U}(\xi, z) = \tilde{U}(0, z) \exp(-z^2\xi), \quad (1.4)$$

где

$$\tilde{U}(0, z) = \int_0^\infty U(0, \Psi) \Psi \cdot I_0(z, \Psi) d\Psi = \int_0^1 \Psi I_0(z\Psi) d\Psi,$$

так что общее решение уравнения (1.5) с условиями, налагаемыми на функцию $U(\xi, \Psi)$, выражается соотношением:

$$U(\xi, \Psi) = \int_0^\infty z \exp(-z^2\xi) \left[\int_0^1 \Psi' I_0(z\Psi') d\Psi' \right] I_0(z\Psi) dz. \quad (1.5)$$

В предложении сходимости кратного интеграла порядок интегрирования в (1.5) может быть произвольным:

$$U(\xi, \Psi) = \int_0^1 \Psi' \left[\int_0^\infty \exp(-z^2\xi) z I_0(z\Psi) I_0(z\Psi') dz \right] d\Psi'. \quad (1.6)$$

Представляя цилиндрические функции $I_0(z\Psi)$ и $I_0(z\Psi')$ в виде рядов и последовательно меняя порядок суммирования, внутренний интеграл в (1.6) преобразуем к виду:

а) при $\left| \frac{\Psi}{\Psi'} \right| < 1$

$$\int_0^\infty z \exp(-z^2\xi) I_0(z\Psi) I_0(z\Psi') dz = \frac{1}{2\xi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left(-\frac{\Psi'^2}{2\xi} \right)^\lambda {}_2\Gamma_1\left(-\lambda, -\lambda, 1, \left(\frac{\Psi}{\Psi'}\right)^2\right); \quad (1.7)$$

б) при $\left| \frac{\Psi'}{\Psi} \right| > 1$

$$\int_0^\infty z \exp(-z^2\xi) I_0(z\Psi) I_0(z\Psi') dz = \frac{1}{2\xi} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left(-\frac{\Psi^2}{2\xi} \right)^\lambda {}_2\Gamma_1\left(-\lambda, -\lambda, 1, \left(\frac{\Psi}{\Psi'}\right)^2\right), \quad (1.8)$$

где ${}_2\Gamma_1\left(-\lambda, -\lambda, 1, \left(\frac{\Psi}{\Psi'}\right)^2\right)$ — гипергеометрический ряд.

Используя соотношения (1.7) и (1.8), легко получить асимптотические представления функции $U(\xi, \Psi)$ при $\Psi=0$ и при $\Psi \gg 1$:

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{2\xi} \int_0^1 \Psi' \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left(-\frac{\Psi'^2}{4\xi} \right)^\lambda d\Psi' = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right), \quad (1.9)$$

$$U(\xi, \Psi) = \frac{1}{2\xi} \int_0^1 \Psi' \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} \left(-\frac{\Psi^2}{4\xi} \right)^\lambda d\Psi' = \frac{1}{4\xi} \exp\left(-\frac{\Psi^2}{4\xi}\right), \quad (1.10)$$

$\Psi \gg 1$.

Расчет значений функции $U(\xi, \Psi)$ суммированием рядов (1.7) и (1.8) едва ли возможен. В этой связи удобнее для преобразования внутреннего интеграла в (1.6) воспользоваться формулой сложения цилиндрических функций:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty z \exp(-z^2\xi) I_0(z\Psi) \cdot I_0(z\Psi') dz &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty \exp(-z^2\xi) z I_0 \times \\ &\times (z\sqrt{\Psi^2 + \Psi'^2 - 2\Psi\Psi' \cos \theta}) dz = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty z \exp(-z^2\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} \sqrt{\Psi^2 + \Psi'^2 - 2\Psi\Psi' \cos \theta} \right)^{2n} z^{2n} dz = \frac{1}{2\pi\xi} \int_0^\pi \exp\left(-\frac{\Psi^2}{4\xi}\right) \exp\left(-\frac{\Psi'^2}{4\xi}\right) \times \\ &\times \exp\left(\pm \frac{\Psi\Psi' \cos \theta}{2\xi}\right) d\theta = \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{\Psi^2}{4\xi}\right) \exp\left(-\frac{\Psi'^2}{4\xi}\right) I_0\left(\frac{\Psi\Psi'}{2\xi}\right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, распределение относительной скорости дается круговой вероятностной функцией Мастерса:

$$U(\xi, \Psi) = \frac{1}{2\xi} \exp\left(-\frac{\Psi^2}{4\xi}\right) \int_0^1 \Psi' \exp\left(-\frac{\Psi'^2}{4\xi}\right) I_0\left(\frac{\Psi\Psi'}{2\xi}\right) d\Psi' \quad (I.12)$$

Приложение II

Для вычисления значений подынтегральной функции в (I.12) использовалась аналитическая аппроксимация цилиндрической функции $I_0(x)$, найденная Алленом [15], согласно которой:

$$I_0(x) = \sum_{a=0}^8 a_n \left(\frac{x}{3,75}\right)^{2n} \text{ при } 0 \leq x \leq 3,75, \quad (II.1)$$

$$I_0(x) \sqrt{x} \exp(-x) \approx \sum_{n=0}^8 b_n \left(\frac{3,75}{x}\right)^n \text{ при } 3,75 < x < \infty. \quad (II.2)$$

Значения коэффициентов полиномов в (II.1), (II.2) приведены в таблице.

a_n	b_n
1,00	+0,398942280
3,5156229	+0,013285917
3,0899424	+0,002253187
1,2068,92	-0,001575649
0,2659732	+0,009162808
0,0360768	-0,020577063
0,0045813	+0,026355372
0,00	-0,016476329
0,00	+0,003923767

Интеграл (I.12) вычисляется далее любым приближенным квадратурным методом. Преимущество во времени реализации вышеприведенного алгоритма перед алгоритмом, использующим табличные значения Р-функции и интерполяцию, очевидно.

Полиномиальная аппроксимация (II.2), справедливая в практически важной области, допускает представление Р-функции в виде квадратуры, так как в этом случае интеграл (I.12) берется аналитически

$$P(\Psi, \xi) = \exp\left(-\frac{\Psi^2}{4\xi}\right) \left[q(0,0) + q'(0,0) + \dots + q^{(6)}(0,0) - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right) \left(q\left(0, \frac{1}{4\xi}\right) + q'\left(0, \frac{1}{4\xi}\right) + q''\left(0, \frac{1}{4\xi}\right) + \dots + q^{(6)}\left(0, \frac{1}{4\xi}\right) \right) \right]. \quad (II.3)$$

Здесь $q(x)$ — полином, получаемый из (II.2) алгебраическими преобразованиями; верхний индекс над q означает дифференцирование.

Отметим, что из выражения (II.3) следует известная асимптотика Р-функции при $\Psi=0$ (см. I.9):

$$P(0, \xi) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\xi}\right),$$

так как

$$q(0,0) = q\left(0, \frac{1}{4\xi}\right) = 1; \quad q'(0,0) = \dots = q^{(6)}(0,0) = q'\left(0, \frac{1}{4\xi}\right) = \dots = q^{(6)} = 0.$$

Представление Р-функции выражением (II.1) позволяет весьма просто построить изолинии этой функции, как решение задачи Коши

$$\frac{d\xi}{d\Psi} = (2\xi)^2 \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial \Psi}\right)_\xi}{\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_\Psi},$$

$$\xi(0) = \frac{1}{4} [\ln(1-P)]^{-1}, \quad (II.4)$$

что может оказаться полезным для приложений, так как задавая значение P , соответствующее предполагаемой границе струи или диффузионного факела, в таком случае просто определить их геометрические размеры.

Поступила в редакцию
1/XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Либби. Ракетная техника и космонавтика, 1962, 3, 90.
2. A. Mager. Jour. of the Aeronautical Sciences, 1958, 5, 305—311.
3. G. Kleinstein. Quarterby of Applied Mathematics, 1962, 20, 1, 49—54.
4. A. Chervinsky, Mannheim, Y. A. Timnat. Combustion and Flame, 1969, 13, № 2.
5. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
6. Г. Моретти. Ракетная техника и космонавтика, 1965, 3, 2, 18.
7. L. A. Ting, P. A. Libby. Jour. Acrospace Sci., October, 1960, v. 27, 10, p. 797.
8. J. I. Masters. Jour. Chem. Phys., October, 1955, 23, 1865—1874.
9. Л. А. Вулис, Т. А. Ершин, Л. П. Ярин. Основы теории газового факела. Л., «Энергия», 1968.
10. A. Ferri, P. A. Libby, V. Zakka. Third ICAS Congress, Stockholm, Sweden. (August 27—31, 1962); also: "High Temperatur in Aeronautics", N.—Y., Pergamon Press, 1962.
11. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Под ред. В. П. Глушко. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1962.
12. W. C. Moffatt, F. D. Skinner, R. J. Zaworski. Kinetics, equilibria and performance of high temperature system. London, Butterworths, 1960.
13. I. A. Schetz. Sypersonic flow, chemical Processes and radiative Transfer. Oxford, Pergamon Press, 1964.
14. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
15. E. E. Allen. MTAC, 1956, 10, 55.

УДК 536.46+532.517.4

СМЕШЕНИЕ СПУТНЫХ ПОТОКОВ В КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЗОНЫ РЕЦИРКУЛЯЦИИ

В. К. Баев, В. А. Константиновский, И. В. Сидоров

(Новосибирск)

Для анализа процессов горения в спутных потоках необходимо знание зависимостей геометрических характеристик течения и распределения концентраций от параметров потоков на входе и геометрии канала. Особый интерес представляет малоизученная область параметров, когда в результате взаимодействия потоков образуются рециркуляционные течения.

В качественном отношении картина течения спутных потоков в канале постоянного сечения при наличии зон рециркуляции и условия образования рециркуляционных зон изучены [1—5]. Однако экспериментальные исследования и обобщения касались главным образом случаев большого отношения площадей поперечного сечения потоков на входе в канал, когда активный поток (т. е. поток с большей скоростью) представлял собой осесимметричную струю в канале существенно большего диаметра [1—5], либо когда пассивный поток представлял собой