ПМТФ, № 6, 1964

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ НА ПОЛУЧЕНИЕ СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ПУТЕМ БЫСТРОГО ОБЖАТИЯ ПРОВОДЯЩИХ ОБОЛОЧЕК

Е. И. Биченков (*Новосибирск*)

Использование быстрого обжатия проводящих оболочек с захваченным магнитным потоком для получения сверхсильных магнитных полей было предложено Я. П. Терлецким [1]. В экспериментах, использующих этот принцип [2], достигнуты рекордные напряженности магнитного поля ($14.3 \cdot 10^6$ *гс*).

Явления, происходящие при обжатии, обычно рассматриваются в предположении бесконечной проводимости материала оболочки (сверхпроводник). Тем самым не учитываются диффузия поля в проводник, разогрев его, возможное испарение, изменение в связи с этим электропроводности и другие эффекты.

Ниже формулируется общая постановка задачи и рассматриваются явления, связанные с наличием конечной проводимости. В предположении постоянства проводимости вычислены предельное поле и эффективная глубина проникновения поля в проводник для случая обжатия однородного магнитного поля двумя плоскими параллельными поверхностями, движущимися навстречу с постоянной скоростью.

§ 1. Общая постановка задачи об обжатии магнитного поля. Пусть область D_1 представляет собой вакуумную полость, заключенную внутри проводника (область D_2), Γ — граница области D_1 (фиг. 1). Проводник предполагаем однородным, диэлектрическую и магнитную проницаемости полагаем равными единице. Поле скоростей $\mathbf{v}(t, M)$, $M \in D_2$, а также проводимость σ считаем заданными функциями. Задача состоит в том, чтобы отыскать поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, удовлетворяющие уравнениям:

в области $D_1 + D_2$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.1}$$

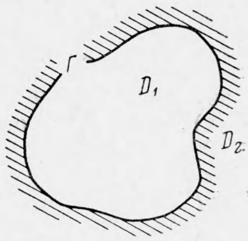
в области D_1

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.2}$$

в области D_2 ($|\mathbf{v}| / c \ll 1$) [3]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$j = \sigma [\mathbf{E} + (1/c)\, \mathbf{v} \times \mathbf{H}] \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Начальные условия заключаются в задании напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ всюду. Граничные условия: 1) непрерывность $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе Γ области D_1; 2) задание $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на бесконечности.

Для хороших проводников и скоростей движения $v / c \ll 1$ токами смещения в уравнениях (1.2) и (1.3) можно пренебречь. При этом вместо (1.2) и (1.3) надо удовлетворить соответственно

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad \text{в обл. } D_1, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c)\, \mathbf{j} \quad \text{в обл. } D_2 \tag{1.5}$$

Задача при этом существенно меняется. Предполагая, что электрическое поле не имеет потенциальных слагаемых, можно исключить $\mathbf{E}$ из уравнений и сформулировать задачу только для магнитного поля $\mathbf{H}$. Эта задача оказывается эллиптической в D_1 и параболической в D_2. В связи с этим в начальных условиях и на бесконечности надо задавать только $\mathbf{H}$. На Γ остается прежнее условие непрерывности. В дальнейшем будет рассматриваться упрощенная таким образом задача.

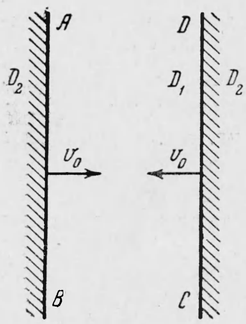
Замечания. 1. Обычно электропроводность σ задается как функция содержащегося в единице объема проводника тепла. Поэтому к системе уравнений в D_2 необходимо дописать уравнение теплопроводности с источниками тепла джоулевого типа и решать такую расширенную систему.

2. Не обязательно предполагать заданным поле скоростей в проводнике. Однако тогда в общем случае надо решать задачу совместно с уравнениями движения проводника, учитывая развиваемые полем пондеромоторные силы наряду с инерциальными и внешними силами, действующими на проводник. Отметим, что обе эти задачи окажутся нелинейными.

§ 2. Плоская задача об обжатии магнитного поля. Рассмотрим, пожалуй, самую простую из возможных задач об обжатии магнитного поля. Пусть вакуумная полость представляет собой полосу $ABCD$ (в дальнейшем будем называть щель), ограниченную параллельными плоскостями AB и CD, движущимися с постоянной скоростью v_0 навстречу (фиг. 2).

Проводимость σ считаем постоянной. Магнитное поле предположим однородным в щели, вектор $\mathbf{H}$ — параллельным плоскостям AB и CD. Введем систему координат с началом в центре щели, ось x направим перпендикулярно к границе щели, ось z — параллельно $\mathbf{H}$. Пусть в начальный момент поле в проводнике отсутствует, поле в щели равно H_0. На бесконечности поле отсутствует всегда. В силу симметрии задачи достаточно найти решение при $x \geqslant 0$. Кроме того,

$$\mathbf{E}(0, t) = 0 \tag{2.1}$$



Фиг. 2

Решение ищем в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z H(x, t), \qquad \mathbf{E} = \mathbf{e}_y E(x, t)$$
$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_y j(x, t), \qquad \mathbf{v} = \mathbf{e}_x v_0 \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ — орты по соответствующим осям координат. Положение границы щели будем определять абсциссой $x_1 = x_{10} + v_0 t$, где x_{10} — начальная ширина щели. Скорость, направленную внутрь, считаем отрицательной.

Первые два уравнения (1.1) и первое уравнение (1.5) удовлетворены выбором функций (2.2). Третье уравнение (1.1) после интегрирования по x от 0 до x_1 при условии (2.1) сводится просто к закону электромагнитной индукции

$$\frac{x_1}{c}\frac{dH_1}{dt} = -E_1(t) \tag{2.3}$$

Здесь $H_1(t)$ — магнитное поле в щели, $E_1(t)$ — напряженность электрического поля на границе щели. В силу непрерывности E и H на границе из уравнений (2.3) и (1.4) получаем

$$\frac{d(x_1 H_1)}{dt} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_\Gamma \tag{2.4}$$

Из уравнения (1.1) и второго уравнения (1.5) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_\Gamma = -\frac{2\sqrt{\sigma}}{c}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{H_1(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{t-\zeta}} \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.4) и интегрируя по времени, получаем интегральное уравнение, описывающее процесс обжатия поля

$$1 - (1-\tau)\,h(\tau) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{h(\zeta)\,d\zeta}{\sqrt{\tau-\zeta}} \tag{2.6}$$

Здесь h — безразмерная напряженность магнитного поля в щели; τ — безразмерное время;

$$h = \frac{H_1}{H_0}, \qquad \tau = \frac{v_0}{x_{10}} t, \qquad \varepsilon = \frac{c}{\sqrt{4\pi\sigma}} \left(\frac{x_{10}}{v_0}\right)^{1/2} \frac{1}{x_{10}} \tag{2.7}$$

Смысл величины ε простой: она представляет собой отношение «толщины» скин-слоя, нарастающего за время обжатия x_{10} / v_0, к начальной ширине щели x_{10}. Уравнение (2.6) сводится к дифференциальному уравнению

$$2(1-\tau)^2 \frac{dh}{d\tau} - 3(1-\tau) h + 1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi\tau}} - 2\varepsilon^2 h = 0 \tag{2.8}$$

Примем за переменные безразмерную ширину щели $x = 1 - \tau$ и безразмерный поток магнитной индукции $\varphi = (1-\tau)h$. Тогда уравнение (2.8) сведется к виду

$$2x^2 \frac{d\varphi}{dx} + (x + 2\varepsilon^2)\varphi - x\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-x}}\right) = 0 \tag{2.9}$$

Его решение, удовлетворяющее условию $\varphi(1) = 1$, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{x}\right) \int_0^x \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-y}}\right) \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{y}\right) \frac{dy}{\sqrt{y}} \tag{2.10}$$

Можно доказать, что

$$\varphi = \frac{1 + 2\varepsilon/\sqrt{\pi}}{2\varepsilon^2} x + O(x^2) \tag{2.11}$$

Отсюда вытекает, что $\varphi \to 0$ при $x \to 0$, т. е. весь поток уходит в проводник. Предельное поле, получаемое в конце обжатия, оказывается

$$h_* = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \tag{2.12}$$

Отметим, что при быстром обжатии ($\varepsilon \ll 1$) предельное поле оказывается пропорциональным первой степени $v_0\sigma$, а не $\sqrt{v_0\sigma}$, как можно было бы предполагать, рассматривая обычное нарастание «толщины» скин-слоя и предполагая, что весь магнитный поток уходит в скин.

Несложно оценить эффективную глубину δ проникновения поля в проводник при обжатии магнитного поля. Она оказывается

$$\delta \sim \frac{1}{h_*} = \frac{2\sqrt{\pi}\varepsilon^2}{\sqrt{\pi} + 2\varepsilon} \tag{2.13}$$

Приведенный расчет показывает существенное различие решения задачи для сверхпроводника и для проводника с конечной проводимостью. До тех пор пока ширина щели x много больше эффективной глубины проникновения поля в проводник δ, результаты этих двух задач отличаются мало. Но при $x \leqslant \delta$ эффекты конечной проводимости становятся определяющими.

С математической точки зрения различие в этих двух задачах заключается в вырождении интегрального уравнения (2.6) в простое алгебраическое уравнение при $\varepsilon = 0$ (бесконечная σ).

Поступила 1 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Терлецкий Я. П. Получение сверхсильных магнитных полей путем быстрого обжатия проводящих оболочек. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, стр. 387.
2. Fowler C. M., Garn W. B., Caird R. S. Production of very high magnetic fields by implosion. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, p. 166.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат. 1957.