

**РЕШЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ  
В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЬНОГО  
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

*А. И. Ивановский, С. Х. Розенфельд*

(Москва)

Развивается метод, основанный на использовании модельного кинетического уравнения с частотой соударений  $\omega = v/l$  ( $l$  — средняя длина свободного пробега,  $v$  — модуль молекулярной скорости). Метод испытывается на нескольких классических задачах.

**1. Описание метода.** Будем основываться на модельном кинетическом уравнении

$$v \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\tau(v)} (f_0 - f) \quad (1.1)$$

Здесь  $v$  — молекулярная скорость,  $\tau^{-1}(v)$  — частота соударений, зависящая от скорости,  $f_0$  — локально-равновесная функция распределения. При рассмотрении внутренних течений разряженного газа в большинстве случаев можно ограничиться рамками линейного приближения (т. е. малыми числами Маха и малыми градиентами температур).

Поэтому примем

$$f_0(v, r) = N (2\pi m\theta)^{-3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2m\theta}\right) \left(1 + \frac{pu}{\theta}\right)$$

Разделим все частицы на два сорта: первичные — это частицы, только что слетевшие со стенки и не испытавшие ни единого соударения; и вторичные — частицы, испытавшие хотя бы одно соударение. Запишем кинетические уравнения для каждого сорта в отдельности

$$v \frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{1}{\tau} (f_{02} - f_2) + \frac{1}{\tau} f_{01}, \quad v \frac{\partial f_1}{\partial r} = -\frac{1}{\tau} f_1 \quad (1.2)$$

Здесь  $f_1$  и  $f_2$  — функции распределения соответственно первичных и вторичных частиц,  $f_{01}$  и  $f_{02}$  — локально-равновесные функции, нормированные соответственно на плотности числа первичных и вторичных частиц.

Необходимость такого разделения вызвана следующим. При соударениях вторичных частиц со вторичными импульс и энергия любого элемента объема сохраняются. При соударениях же первичных частиц со вторичными в каждом элементе объема появляется импульс и энергия, принесенные частицей с той точки поверхности, которой она испущена. Поэтому газ вторичных частиц в каждой точке объема имеет источники энергии и импульса, формируемые потоками первичных частиц в данной точке.

Конкретизируем вид функции  $\tau(v)$ . Примем  $\tau(v) = l/v$ . Здесь  $l$  — средняя длина свободного пробега,  $v$  — модуль молекулярной скорости. (Различные способы выбора  $\tau(v)$  обсуждались в работе [1].)

Запишем законы сохранения для вторичных частиц

$$\int d\mathbf{p}f_2v = \int d\mathbf{p}f_{02}v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_2v_0 \quad (1.3)$$

$$\int d\mathbf{p}f_2v\mathbf{v} = \int d\mathbf{p}f_{02}v\mathbf{v} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} N_2v_0\mathbf{u}, \quad v_0 = \left(\frac{2\theta}{m}\right)^{1/2} \quad (1.4)$$

$$\int d\mathbf{p}f_2vv^2 = \int d\mathbf{p}f_{02}vv^2 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} N_2v_0 \frac{v_0^2}{2} \quad (1.5)$$

При сделанном выборе  $\tau(v)$  уравнения (1.2) можно переписать так:

$$f_1(\boldsymbol{\kappa}v, \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\kappa}s) = f_1(\boldsymbol{\kappa}v, \mathbf{r}_s) e^{-s/l} \quad (1.6)$$

$$f_2(\boldsymbol{\kappa}v, \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\kappa}s) = f_2(\boldsymbol{\kappa}v, \mathbf{r}_s) f^{-s/l} + \int_0^s ds' e^{-(s'-s)/l} f_0(\boldsymbol{\kappa}v, \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\kappa}s') \quad (1.7)$$

Здесь  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{v}/v$ ,  $f_0 = f_{01} + f_{02}$ ,  $\mathbf{r}_s$  — радиус-вектор точки на поверхности;  $f_s$  — функция распределения частиц, летящих с поверхности, которую примем локально-максвелловской.

Зафиксируем теперь точку  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\kappa}s$  и поставим выражение (1.7) последовательно в уравнения сохранения (1.3) — (1.5)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} N_2v_0 = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} Nv_0 + 3\boldsymbol{\kappa}\mathbf{Q} \right\} \quad (1.8)$$

$$\frac{8}{3\sqrt{\pi}} Q_2v_0 = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{8}{3\sqrt{\pi}} v_0\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{Q}) + 3\boldsymbol{\kappa} \frac{Nv_0^2}{2} \right\} \quad (1.9)$$

$$\frac{8}{\sqrt{\pi}} N_2v_0 \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{l} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{8}{\sqrt{\pi}} N \frac{v_0^2}{2} v_0 + \frac{15}{4} Nv_0^2(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{Q}) \right\} \quad (1.10)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad \mathbf{Q} = N\mathbf{u}$$

Уравнения (1.8) — (1.10) выражают плотность, потоки и давление вторичных частиц через полные значения этих величин во всем объеме. Найдём теперь вклад первичных частиц. Интегрируя уравнение (1.6) по пространству импульсов в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s + \boldsymbol{\kappa}s$ , находим

$$N_1(\mathbf{r}) = - \iint dS' \boldsymbol{\kappa} \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s + \frac{1}{\sqrt{\pi}} N_s \frac{u_s \boldsymbol{\kappa}}{v_{0s}} \right\} \quad (1.11)$$

$$Q_1(\mathbf{r}) = - \iint dS' \boldsymbol{\kappa} \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 N_s \boldsymbol{\kappa} + 3\boldsymbol{\kappa} (N_s u_s \boldsymbol{\kappa}) \right\} \quad (1.12)$$

$$N_1 \frac{v_0^2}{2} = - \iint dS' \boldsymbol{\kappa} \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s \frac{v_{0s}^2}{2} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} v_{0s} (N_s u_s \boldsymbol{\kappa}) \right\} \quad (1.13)$$

Здесь  $u_s$  — скорость стенки,  $v_{0s} = (2\theta_s/m)^{1/2}$ ,  $\theta_s$  — температура стенки.

Полные плотность, потоки и давление выразятся формулами

$$N = \frac{1}{lv_0} \int \bar{d}\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ Nv_0 + \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \kappa \mathbf{Q} \right\} - \iint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s + \frac{\kappa \mathbf{u}_s}{v_{0s}} N_s \right\} \quad (1.14)$$

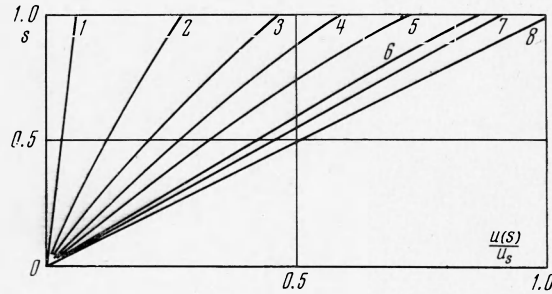
$$\mathbf{Q} = \frac{1}{lv_0} \int \bar{d}\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ 3\kappa v_0 (\kappa \mathbf{Q}) + \frac{9\sqrt{\pi}}{8} \kappa \frac{Nv_0^2}{2} \right\} - \iint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} N_s v_{0s} \kappa + 3\kappa (\kappa N_s \mathbf{u}_s) \right\} \quad (1.15)$$

$$N \frac{v_0^2}{2} = \frac{1}{lv_0} \int \bar{d}\mathbf{r}' \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N \frac{v_0^2}{2} v_0 + \frac{15\sqrt{\pi}}{32} v_0^2 \kappa \mathbf{Q} \right\} - \iint dS' \kappa \frac{e^{-R/l}}{4\pi R^2} \left\{ N_s \frac{v_{0s}^2}{2} + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} v_{0s} (N_s \mathbf{u}_s \kappa) \right\} \quad (1.16)$$

Параметры  $N_s$  и  $Q_s$  определяются из условия непротекания

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}_s) \mathbf{n}(\mathbf{r}_s) = 0 \quad (1.17)$$

Система уравнений (1.14) — (1.17) представляет собой замкнутую систему интегральных уравнений, в принципе достаточную для решения любой задачи о течениях разреженного газа.



Фиг. 1

Ниже рассматривается ряд задач, решения которых хорошо известны и на примере которых будет показано корректность и весьма высокая эффективность развиваемого здесь метода.

**2. Течение Куэтта.** Имеются две бесконечные плоские пластины, движущиеся параллельно друг другу со скоростями  $\pm u_s$ . Расстояние между пластинами равно  $2a$ . Ищется плотность потока числа частиц вдоль оси пластин (фиг. 1).

Интегральное уравнение (1.15) для потока и в этом случае может быть преобразовано к следующему виду:

$$Q(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') Q(s') ds' + \frac{3}{2} N_s u_s \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) e^{-\lambda t} \text{sh } \lambda t s$$

где

$$K(s, s') = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) e^{-\lambda t |s-s'|} \quad (2.1)$$

Здесь  $s = z/a$ . Параметр  $\lambda = a/l = \text{Kn}^{-1}$  характеризует степень разрежения. Интегральное уравнение (2.1) решалось численно в широком диапазоне чисел  $\lambda$  от  $10^{-3}$  до 5. Типичные профили потока представлены на фиг. 1, где значениям  $\lambda = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0, \infty$  соответствуют кривые 1—8.

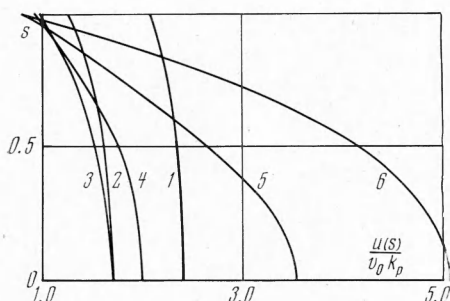
Предельные случаи могут быть исследованы аналитически. Так, при  $\lambda \rightarrow 0$  имеем  $Q(s) \equiv 0$ . При  $\lambda \rightarrow \infty$  воспользуемся асимптотической формулой

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} f(s') ds' \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^n} e^{-\lambda t |s-s'|} = \frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{n} f(s) + \frac{1}{n+2} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 f}{\partial s'^2} \right\} \quad (2.2)$$

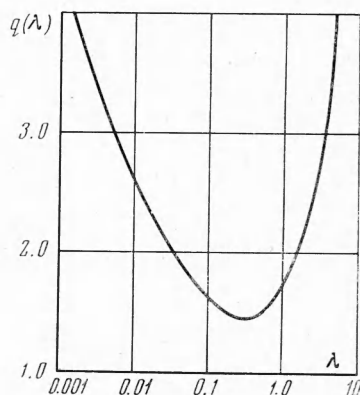
Применяя (2.2) к уравнению (2.1), получаем при  $\lambda \rightarrow \infty$   $\partial^2 u / \partial s^2 = 0$  с условиями скольжения на границе

$$u(1) = u_s - \frac{3}{8} l \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3)$$

Решением уравнения (2.3) являются линейные профили, проходящие через начало координат. Сопоставление условий (2.3) с фиг. 1 показывает, что уже при  $\lambda = 5$  решение интегрального уравнения (2.1) совпадает со своей континуальной асимптотикой.



Фиг. 2



Фиг. 3

Изложенные здесь результаты хорошо согласуются с известными представлениями (см., например, [2]).

**3. Течение Пуазейля.** Исследуется изотермический поток, возникающий под влиянием постоянного градиента давления, приложенного вдоль оси  $X$ . В этом случае уравнение (1.15) преобразуется к виду

$$Q^*(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') Q^*(s') ds' - \frac{9\sqrt{\pi}}{8} \left\{ \frac{k_p}{\lambda} \left( \frac{1}{3} - \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^4} e^{-\lambda t} \text{ch } \lambda t s \right) - \frac{16}{9\pi} \frac{k_p}{\lambda} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} \left( 1 - \frac{3}{t^2} \right) e^{-\lambda t} \text{ch } \lambda t s \right\} \quad (3.1)$$

Здесь

$$Q^* = \frac{2u}{v_0}, \quad k_p = \frac{a}{P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

Это интегральное уравнение решалось численно от  $\lambda = 10^{-3}$  до  $\lambda = 5.0$ . На фиг. 2 показаны характерные профили потока для значений

$\lambda = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 3.0, 5.0$  (кривые 1—6 соответственно). Сопоставление с данными, имеющимися в [2], показывает почти полное их совпадение. При  $\lambda \rightarrow \infty$  из уравнения (3.1) можно получить известное уравнение Пуазейля

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.2)$$

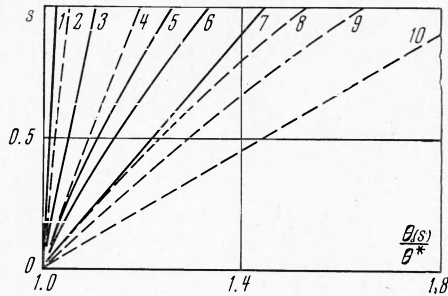
с условиями скольжения на границе

$$u(1) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} v_0 \frac{k_p}{\lambda} - \frac{3}{8} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial s} \quad (1) \quad (3.3)$$

Коэффициент вязкости при этом равен

$$\eta = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \rho v_0 l \quad (3.4)$$

Важной особенностью плоского течения Пуазейля является существование минимума объемного расхода при некоторых числах  $\lambda$  (парадокс Кнудсена). На фиг. 3 показана полученная нами кривая расхода. При  $\lambda \rightarrow 0$  она имеет логарифмическую особенность, при  $\lambda \rightarrow \infty$  линейно растет и достигает минимума при  $\lambda = 0.36-0.4$ . В работе [3] указывается значение  $\lambda = 0.42-0.55$ . Близкие значения получены в недавно проведенных экспериментах [4].



Фиг. 4

**4. Теплопередача между плоскими пластинами.**

Рассчитаем сначала профиль температуры между бесконечными плоскими пластинами, из которых верхняя имеет температуру  $\theta_+$ , а нижняя —  $\theta_-$ . Интегральное уравнение (1.16) преобразуется к виду

$$\theta(s) = \int_{-1}^{+1} K(s, s') \theta(s') ds' + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} e^{-\lambda t} \left\{ \frac{\theta_+ + \theta_-}{2} \operatorname{ch} \lambda t s + \frac{\theta_+ - \theta_-}{2} \operatorname{sh} \lambda t s \right\}$$

$$K(s, s') = \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-\lambda t |s-s'|} \quad (4.1)$$

Результаты численного расчета  $\theta(s)$  представлены на фиг. 4. Кривые 1—10 соответствуют следующим парам значений:  $\lambda, \delta = 0.01, 0.5; 0.01, 1.0; 0.1, 0.5; 0.1, 1.0; 0.5, 0.5; 1.0, 0.5; 50.05, 0.5, 1.0; 1.0, 1.0; 5.0, 1.0; \delta = (\theta_+ - \theta_-) / (\theta_+ + \theta_-)$ .

Тепловой поток выражается через температуру следующим образом:

$$J(s) = -\frac{4}{(2\pi m)^{1/2}} \int_{-1}^{+1} ds' \frac{\partial}{\partial s'} \theta^{3/2}(s') \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^3} e^{-\lambda t |s-s'|} \quad (4.2)$$

В свободно-молекулярном пределе это выражение переходит в

$$J(s) = -\frac{2}{(2\pi m)^{1/2}} (\theta_+^{3/2} - \theta_-^{3/2}) \quad (4.3)$$

