

В этой связи укажем, что одна из моделей ( $n = 15$ ) испытывалась при нулевом угле атаки на другой установке при  $M_\infty = 3.85$  и существенно большем числе  $R = 3.6 \cdot 10^7$ . Результаты измерения давления, любезно представленные А. И. Зубковым показаны на фиг. 4 квадратами. Данные обеих продувок хорошо согласуются между собой, причем с увеличением числа Рейнольдса совпадение с теоретической кривой улучшается. Таким образом, теоретическая схема течения как в качественном, так и в количественном отношении подтверждается экспериментально в диапазоне  $n \leq 15$ .

Отметим также, что во всех случаях с опытом сравнивалось теоретическое решение [2], содержащее оба слабых скачка. Если предположить, что один из скачков является сильным, то данные расчета и эксперимента будут отличаться в два раза. В связи с этим укажем, что если в формулах работы [2] перейти к пределу при  $M_\infty \rightarrow \infty$  и  $\kappa \rightarrow 1$  ( $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей), то в случае слабых отраженных скачков получается ньютоновское приближение. Когда же отраженные скачки сильные, в точках сопряжения лепестков тела появляются дополнительно сосредоточенные силы конечной интенсивности. Следовательно, можно ожидать, что для рассмотренных звездообразных тел ньютоновское приближение при больших числах Маха окажется приемлемым. Видимо, при обтекании конических тел положение аналогично плоскому случаю, для которого, как известно, осуществляется в опытах регулярное отражение со слабым скачком.

На основании полученных данных по распределению давления нетрудно рассчитать коэффициент волнового сопротивления звездообразных тел. Экспериментальные значения  $C_x$  оказываются равными: 0.029 ( $n = 6$ ); 0.035 ( $n = 10$ ) и 0.042 ( $n = 15$ ); соответствующие теоретические величины  $C_x$  есть 0.026; 0.029 и 0.032. Отношения волнового сопротивления эквивалентного круглого конуса  $C_x^\circ$  к волновому сопротивлению испытанных моделей звездообразных тел получаются следующими:  $C_x^\circ / C_x = 3.9$  ( $n = 6$ ); 2.2 ( $n = 10$ ); 1.95 ( $n = 15$ ). Таким образом, имеется хорошая сходимость данных расчета и эксперимента, причем в случаях, предсказанных теорией, осуществляется уменьшение волнового сопротивления в несколько раз.

Поступила 25 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г о н о р А. Л. О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
2. Г о н о р А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.

#### ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ТОЛЩИНЫ УДАРНОГО ФРОНТА

В. А. Белоконь

(Москва)

Точно решить задачу о толщине скачка или структуре ударной волны не удастся даже в простейшем случае газа упругих шаров. Этим объясняется интерес к предположениям, упрощающим для ударной волны решение кинетического уравнения (как в известном решении Мотт-Смита). Ниже предпринимается попытка ограничиться общими принципами статистической механики для оценки толщины скачка (без количественного описания его структуры), используя простейшие, но не менее правдоподобные предположения. Конкретные примеры будут лишь грубыми иллюстрациями предлагаемого метода [1] оценки толщины скачка в различных средах.

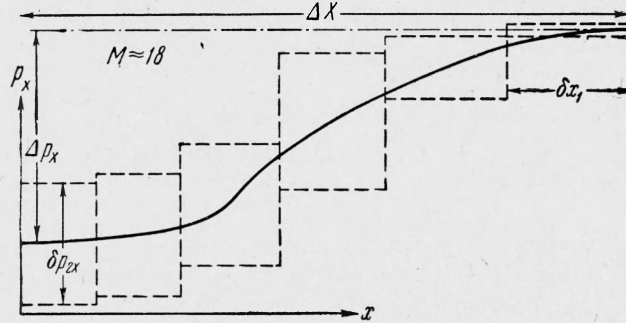
<sup>1</sup>°. Для некоторого класса процессов, к которому относятся и ударные волны, постулируем интуитивно ясное и достаточно общее <sup>1</sup> условие макроскопичности в виде

<sup>1</sup> Вообще говоря, определение макроскопичности не единственно (см. [2,3] и др.). Условие (1) удовлетворительно уже тем, что оно инвариантно относительно канонических преобразований переменных, входящих в него, в отличие от тривиального условия (2).

неравенства между характерным фазовым объемом всего макропроцесса и средним фазовым объемом частиц среды (фигура)

$$\Delta x \Delta p_x > \langle \delta x \delta p_x \rangle \approx \frac{h}{2\pi} \exp \left\langle \frac{S}{3Nk} \right\rangle \quad (1)$$

где знак  $\approx$  подразумевает приближение идеального газа. Состояния, разделенные искомой толщиной скачка  $\Delta x$  (скобки  $\langle \dots \rangle$  символизируют осреднение по этой толщине), на которой средний импульс частицы меняется на  $\Delta p_x$ , без выполнения этого условия



Карикатурный «мгновенный снимок» в фазовом  $\mu$  — пространстве структуры скачка — в приближении локального термодинамического равновесия. Прямоугольниками показана неопределенность нахождения молекулы в фазовом пространстве. Сплошная кривая — эволюция осредненных (гидродинамических) переменных. Ударная волна распространяется в газе упругих шаров ( $\Phi = 3 \cdot 10^{-10}$  м,  $(N/V)_1 \approx 10^{27}$  м $^{-3}$ ) с молекулярным весом аргона. Скорость волны  $\approx 5800$  м/сек, степень сжатия  $V_1/V_2 \approx 4$ ,  $T_2/T_1 \approx 100$ ,  $\delta p_{2x} \approx 10 \delta p_{1x} \approx m$  (2500 м/сек),  $\delta x_1 \approx 10^{-9}$  м,  $\lambda_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-9}$  м,  $\lambda_2 \approx \delta x_2 \approx 6,3 \cdot 10^{-10}$  м

неразличимы. Любопытно, что из необходимого условия (1) сразу выводится известное свойство слабых скачков, на которых энтропия частицы  $S/N$  будет меняться несущественно

$$\Delta x > \frac{\langle \delta x \delta p_x \rangle}{\Delta p_x} \rightarrow \frac{\text{const}}{u_1 - u_2} \rightarrow \infty, \quad \left\{ \begin{array}{l} M \rightarrow 1 \\ \Delta p_x \equiv m(u_1 - u_2) \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Соотношение Рэнкина—Гюгонио для сильных скачков дает  $\Delta p_x = \delta p_{2x} \sqrt{f}$  (здесь  $f$  — число степеней свободы частицы (молекулы) среды, которое предполагается неизменным), т. е. при числе Маха скачка  $M \rightarrow \infty$  неравенство (1) превращается в тривиальное условие макроскопичности или сплошности

$$\Delta x > \langle \delta x \rangle \approx \left\langle \frac{V}{N} \right\rangle^{1/3} \quad (2)$$

Здесь знак  $\approx$  обусловлен тем, что неопределенность положения молекулы не может быть меньше среднего расстояния между молекулами.

Для холодной среды (когда  $S/N \rightarrow 0$ ) общее условие макроскопичности совпадает с соотношением неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x > h/2\pi$$

2°. Наиболее простой зависимостью, удовлетворяющей условию (1), будет линейная, которая здесь принимается как постулат

$$\Delta x \Delta p_x \equiv A \langle \delta x \delta p_x \rangle \quad \text{или} \quad \Delta x \equiv A \frac{\langle \delta x \delta p_x \rangle}{\Delta p_x} \approx \frac{A}{\Delta p_x} \frac{h}{2\pi} \exp \left\langle \frac{S}{3Nk} \right\rangle \quad (3)$$

При центральных взаимодействиях молекул переход среды в новое равновесное состояние (точнее — хаотизация скоростей молекул по трем направлениям) требует минимум двух соударений в среднем на молекулу, так как одиночное столкновение может изменить скорости частиц только в плоскости взаимодействия, т. е., только испытыв еще одно столкновение, молекула (типа упругого шара) может «забыть» предыду-

шее распределение (ср. [4]). Отсюда — минимальная «степень огрубления» описания скачка на языке переменных  $(\Delta x, \Delta p_x)$

$$A \equiv \frac{\Delta x \Delta p_x}{\langle \delta x \delta p_x \rangle} \approx \frac{\Delta x}{\langle \delta x \rangle} \frac{\Delta p_x}{\delta p_{2x}}$$

составляет

$$\lim_{(M \rightarrow \infty)} A \approx \frac{2 \langle \lambda \rangle \sqrt{f}}{\langle \delta x \rangle} \approx \frac{2 \lambda_1}{(V/N)_1^{1/3}} \approx \left\{ \frac{1}{\Phi} \left( \frac{V}{N} \right)_1^{1/3} \right\}^2 \sim \left( \frac{V}{N} \right)_1^{2/3}$$

для газа шаров с фиксированным поперечником  $\Phi$ .

Если неопределенность импульса частицы [5] среды  $\delta p_x \equiv \sqrt{mkT}$ , то при  $A$ , не зависящем от силы скачка, получаем грубую оценку

$$\Delta x_{\min} \equiv \frac{\lim A}{\Delta p_x} \left\langle \left( \frac{V}{N} \right)^{1/3} (mkT)^{1/2} \right\rangle \approx 2 \lambda_1 \frac{\sqrt{fkT_2/m}}{u_1 - u_2} \rightarrow 2 \lambda_1 \quad (M \rightarrow \infty) \quad (4)$$

Однопараметрическая форма этой оценки минимальной толщины скачка

$$\Delta x_{\min} \approx \frac{2 \langle \lambda \rangle}{M^2 - 1} \sqrt{(M^2 - 1/5)(M^2 + 3)} \rightarrow 2 \langle \lambda \rangle \quad (M \rightarrow \infty) \quad (5)$$

получается<sup>1</sup> при более общем условии  $A \sim \langle \lambda \rangle$ , если использовать соотношения Рэнкина—Гюгонно и уравнение состояния идеального газа при  $f=3$ . В «равнораспределительном» приближении формулы, аналогичные (5), получаются для произвольного числа  $f$ -степеней свободы молекул при условии, что среда — однокомпонентный газ (см. ниже).

Минимальная оценка ширины изоэнтропической волны (когда равновесные состояния связаны инвариантом Римана) должна выводиться аналогично и представлять собою ограничение применимости изоэнтропического описания процесса нарастания крутизны волны Римана. Здесь роль, аналогичную соотношению неопределенностей Гайзенберга, играет теорема Лиувилля. Когда фронт изоэнтропической волны становится достаточно крутым, то, независимо от вида диссипативных «механизмов», следует ожидать развития достаточно сильного «фазового перемешивания», которое может (например, в плазме с магнитным полем) сопровождаться колебаниями параметров среды. Дальнейшее установление стационарного и равновесного состояния происходит, по-видимому, существенно дольше времени релаксации в скачке (ср. [7]). Подчеркнем, однако, что стационарность реальных скачков строго не доказана ни для одной среды.

В «бесстолкновительной» плазме при опрокидывании волны Римана образуются встречные пучки ионов. Судя по некоторым теоретическим ([8] и др.) и опытным ([9] и др.) данным, при этом возможно возникновение бесстолкновительного скачка, минимальную толщину которого оценивают величиной ларморовского, дебаевского или иного характерного радиуса  $r$ . Для такого скачка, движущегося в идеальной плазме поперек магнитного поля (когда одна трансляционная степень свободы заряженной молекулы выходит из игры), оценка имеет вид

$$\Delta x_{\min} \approx \frac{C \langle r \rangle}{M^2 - 1} \sqrt{(M^2 - 1/4)(M^2 + 2)} \rightarrow C \langle r \rangle \quad (M \rightarrow \infty) \quad (6)$$

При грубом учете двукомпонентности среды

$$C \approx \left( \frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2}$$

(здесь  $i$  — ионы,  $e$  — электроны), хотя эффекты, отмеченные в [10], наряду с другими эффектами, могут ограничивать применимость этой формулы для  $C$ .

Вопрос об опытной проверке подобных оценок пока открыт, поскольку интерпретация результатов астро- и геофизических наблюдений и опытов в ударных трубах и других установках весьма нетривиальна (достаточно напомнить пример [11] отказа от широко принятых ранее данных о структуре скачка в «бесстолкновительной» плазме).

<sup>1</sup> Это эквивалентно предположению о независимости числа Рейнольдса, отнесенного к толщине скачка (ср. [6])

$$\text{Re} \equiv \frac{\Delta u \Delta x}{\langle v \rangle} \approx \frac{\Delta u \Delta x}{\langle \delta u \rangle \langle \lambda \rangle} \approx \frac{\Delta u \Delta x}{\langle \delta u \delta x \rangle} \frac{\langle \delta x \rangle}{\langle \lambda \rangle} \approx \frac{\Delta p_x \Delta x}{\langle \delta p_x \delta x \rangle} \frac{1}{A} \equiv 1$$

от числа  $M$  начального потока в системе координат скачка.

Однако возможна проверка в случае среды типа газа упругих шаров (т. е. для (4), (5)), которая не обнаруживает существенных отклонений от результатов расчета структуры скачка методом Монте-Карло [12] (вычислительный эксперимент с молекулами-шарами). Например, формула (5) дает для толщины скачка (при  $\langle \lambda \rangle = \lambda_1$ ):

|                          |       |         |        |        |          |
|--------------------------|-------|---------|--------|--------|----------|
| $M$                      | $= 1$ | $1.5$   | $2$    | $3$    | $\infty$ |
| $X_{(5)} \approx \infty$ |       | $2.625$ | $1.72$ | $1.28$ | $1.00$   |
| $X_{[12]} \approx 10$    |       | $2.425$ | $1.53$ | $1.3$  | $?$      |

(здесь  $X \equiv \Delta x / 2\lambda_1$ ). Подобные подтверждения основного предположения (3) заставляют исследовать его применимость и для прочих сред, например — кристаллов (тогда  $\lambda$  — свободный пробег квазичастиц).

3°. Определение диапазона применимости и более строгое рассмотрение следствий постулата (3) позволит указать класс механизмов диссипации, на который распространяется правило разложения типа

$$\Delta x = \langle \lambda \rangle F(M), \quad \left\{ \begin{array}{l} \infty > F \geq 2 \\ 1 \leq M \leq \infty \end{array} \right\} \quad (7)$$

и другие утверждения, связанные с постулатом (3).

Стремление толщины скачка, по мере роста числа  $M$ , к некоторой характерной длине (например свободного пробега) обуславливается, по-видимому, двумя основными конкурирующими факторами: макроскопической (гидродинамической) тенденцией ко все меньшим толщинам скачка (множитель  $F$ ) и фактом существования микроскопического механизма установления нового, все более далекого<sup>1</sup> равновесного состояния (в (7) множитель  $\langle \lambda \rangle$ ). Поэтому, для диссипации при центральных взаимодействиях, т. е. силах  $\sim 1/R^3$  между молекулами, абсолютная толщина скачка может быть минимальной при умеренных  $M$ , так как свободный пробег

$$\lambda(T, N/V) \sim (T^{2/(s-1)}) / (N/V) \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} M \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty \\ N/V \neq \infty \end{array} \right.$$

( $\infty > s > 2$ )

(ср. [13,14]). Степень огрубления или «безразмерное число состояний»  $A$  при этом ведет себя как и толщина скачка

$$A \sim \Delta x \approx \langle \lambda \rangle \rightarrow \infty$$

В частности, для максвелловских молекул ( $s = 5$ ) в этом приближении получается особенно простой вид зависимости от  $M$  (ср. [15,16])

$$\lim \Delta x_{\min} \approx \lambda_2 \sim T_2^{1/2} \sim M \rightarrow \infty$$

Наибольшие градиенты профиля скачка с «термодинамической» толщиной  $\lim \Delta x \approx \lambda_1 + \lambda_2$  будут определяться, очевидно, наименьшим из пробегов, т. е. пробегом  $\lambda_1$  в рассматриваемом случае (ср. [17]).

4°. Любопытным следствием постулата (3) является предсказание уширения скачка в силу чисто неравновесного эффекта, существование которого не зависит от механизма диссипации. Пояснить этот эффект можно при помощи следующего грубого рассуждения. Если средний фазовый объем, приходящийся на молекулу внутри скачка, оценить (как при упрощенном переходе от (3) к (4)) по конечным, не зависящим от структуры скачка, значениям  $(S/N)_2$  и  $\delta p_{2x}$ , то большим отклонениям от локального равновесия — внутри более интенсивных скачков — соответствуют и большие оценки толщины  $\Delta x_{\min}$ . Поэтому минимальная толщина должна получаться в локально-равновесных моделях структуры ударного фронта.

Это утверждение основано на том, что энтропия достигает максимума при равновесном распределении Гиббса по фиксированной фазовой области. Отсюда ясно, что фиксированной (как у нас) оценке энтропии должна соответствовать минимальная оценка величины фазового объема, т. е. и минимальное значение  $\Delta x$  (при фиксированной неопределенности импульса) именно при локально-равновесной структуре скачка. Разница оценок толщины скачка по Навье—Стоксу и по кинетическим моделям [17-21] подтверждает это. Аналогичные общие аргументы говорят в пользу того, что при все больших отклонениях от локального равновесия внутри скачка уменьшается пик энтропии, предсказываемый локально-равновесными моделями (ср. фиг. 10 в [12a]).

5°. Для таких, во многом еще проблематичных сред, как плазма и др., точность оценки толщины скачка зависит от знания, по крайней мере, равновесного состояния. Это эквивалентно знанию статистической суммы или фазового объема рассматриваемой подсистемы. Для перехода от (3) к (4) — (6) необходимо знать число степеней сво-

<sup>1</sup> Скачок по определению разделяет равновесные состояния, поэтому, строго говоря,  $\Delta x = \infty$  при любом числе Маха скачка. Однако нас интересует эффективная толщина скачка, разделяющая состояния, достаточно близкие к крайним равновесным.

боды частиц среды (чтобы решить задачу хотя бы в приближении равномерного распределения энергии). В плазме учет, например, электростатического взаимодействия частиц дает меньшее значение равновесной энтропии (дебаевское приближение — см. [22]), т. е. меньшую оценку толщины скачка с той же конечной температурой. Существенный вклад в энтропию плазмы могут вносить квазичастицы, в том числе — флуктуации электромагнитного поля (ср. [23] и др.). Отметим также, что «гидродинамическое время релаксации» в плазме может оказаться существенно меньшим времени установления локального термодинамического равновесия [24]. Это потребует уточнение понятия толщина скачка и, вероятно, затруднит интерпретацию опытных данных.

Опытная проверка оценок толщины скачка нетривиальна не только из-за неоднозначности понятия толщина [6], но и в силу возможного вмешательства процесса измерения в процесс ударного сжатия. Например, зонд типа проволочки-сопротивления может приблизить состояние внутри скачка к локальному равновесию и даже «подтвердить» теорию структуры скачка в приближении Навье — Стокса.

Наиболее чистые измерения следует ожидать в результате применения квантовых генераторов на различных длинах волн (при исследовании структуры скачка в твердых телах в гамма- и рентгеновом диапазоне).

За стимулирующую критику благодарю К. Е. Губкина, В. С. Имшенника и сотрудников теоретического отдела Института физики АН Латвийской ССР.

Поступила 12 VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоконь В. А. О выводе оценки толщины скачка из принципов статистической механики. Аннотации докл. на II Всесоюзном съезде по теор. и прикл. механике. Изд-во АН СССР, 1964, стр. 31.
2. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. Изд. «Мир», 1965.
3. Вупеманн О. Models of Collisionless Shock Fronts. Phys. Fluids, 1964, Suppl., S. 8.
4. Bird G. Approach to Translational Equilibrium in Rigid Sphere Gas. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 10, p. 1518.
5. Schrödinger E. Statistical Thermodynamics. Cambridge, 1957, p. 64.
6. Липман Г., Рошко А. Элементы газовой динамики. Изд. иностр. лит., 1960.
7. Chu G. Kinetic Description of Formation of Shock Wave. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 1, p. 12; No. 8, p. 1450.
8. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в плазме, СО АН СССР, Новосибирск, 1963.
9. Cahill L. J. Magnetosphere. Sci. Amer., 1965, vol. 212, No. 3, p. 62—63.
10. Wu C., Klewans E., Primack J. Temperature Relaxation in a Fully Ionized Plasma. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 6, p. 1126.
11. Gerry E., Kantrovitz A., Petschek H. Alternate Explanation of Shock Thickness Measurements. Bull. Amer. Phys. Soc., 1963, vol. 8, No 2, p. 158.
12. Haviland J. Determination of Shock Wave Thickness by the Monte-Carlo Method. a) Rarefied Gas Dynamics, 1963, vol. 1, AP; b) Methods in Computational Physics, 1965, vol. 4, AP.
13. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. Изд. «Мир», 1965.
14. Snider R., McCourt F. Kinetic Theory of Moderately Dense Gases. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 7, p. 1025.
15. Muckenfuss C. Some Aspects of Shock Structure According to the Bimodal Model. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11.
16. Salwen H., Groch C., Ziering S. Extension of Mott-Smith Method for Shock Wave. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 2, p. 186.
17. Grad H. Principles of Kinetic Theory of Gases. Handbuch der Physik. Band XII, Springer, 1958, p. 289.
18. Любарский Г. Я. К кинетической теории ударных волн. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, No. 7, стр. 1051.
19. Samac M. Argon Shock Thickness. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 7, p. 1080.
20. Whang Y.-C., Chang C.-C. Structure of Weak Shock Wave in a Plasma. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 2, p. 228.
21. Oguchi H. Molecular Beam Approximation for Shock-Structure Problem. «Rarefied Gas Dynamics» (ed. by de Leeuw), AP 1965.
22. Balescu R. Statistical Mechanics of Charged Particles. Intersc., 1963.
23. Белоконь В. А. О тенденции волн сжатия к «прокидыванию». Сб. «Вопросы МГД и динамики плазмы», Рига, 1962, т. 2, стр. 351.
24. Uhlenbeck G. Some Aspects of Kinetic Theory. «Fluid Dynamics and Applied Mathematics». (ed. by J. Diaz and Pai S. I.), Gordon and Beach, 1962.