стании нагрузки $p$ в первую очередь будет достигнуто напряженно-деформированное состояние, отвечающее этой ветви. При $\lambda^{-1} < \lambda_*^{-1}$ (или $a < 7{,}85b$) предельная нагрузка $p$ равна 1, что соответствует разрушению по достижении теоретического предела прочности. При $\lambda^{-1} \geqslant 55$ расхождение значений $p$, полученных по формуле Сака (3.11) и по формуле (1.6), не превосходит 3 %.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Александров В. М., Кудиш И. И. Асимптотические методы в задаче Гриффитса // ПММ.— 1989.— Т. 53, вып. 4.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1968.
3. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН.— 1955.— № 5.
4. Найфэ А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.



*г. Москва,* *Поступила 23/X 1992 г.*
*г. Ростов-на-Дону*


---


УДК 532.546



*С. А. Сафонов*


# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ТРЕЩИНОВАТОГО ГЕОТЕРМАЛЬНОГО КОЛЛЕКТОРА

В работе предлагается модель теплообмена в недеформируемом трещиноватом геотермальном коллекторе, в которой учитывается термическое сопротивление блоков породы, составляющих пласт и теплообмен с окружающим пласт массивом.

Тепловой режим вертикального геотермального трещиноватого пласта в условиях неизотермической фильтрации без учета термического сопротивления блоков породы исследовался в [1]. Полуаналитический метод учета теплопотерь в блоках породы был предложен в [2]. В его основу положено допущение, что температура в блоке породы по нормали к его поверхности изменяется по закону $T_b(n, t) = (a + bn + cn^2)\exp(-n/\sqrt{a_b t})$ ($n$ — нормаль, $a_b$ — температуропроводность блока).

Рассмотрим задачу определения теплового режима трещиноватого горизонтального геотермального пласта в условиях неизотермической фильтрации в следующей постановке. Введем систему координат $(x, y, z)$ так, чтобы плоскость $(z = 0)$ совпадала с кровлей пласта. Будем считать, что мощность пласта $h$ много меньше толщины породы над ним. В этом случае задача симметрична относительно плоскости $\{z = h/2\}$. Предположим, что:

1) мощность пласта много меньше его размеров в плоскости $Oxy$ и поле скорости фильтрации двумерно — отсутствует компонента скорости в направлении оси $z$, перпендикулярной пласту;

2) теплообмен на границе раздела твердой и жидкой фаз происходит настолько интенсивно (число Био $\mathrm{Bi} = \alpha L_b/\lambda_b \gg 1$, $\alpha$ — коэффициент межфазного теплообмена, $L_b$ — характерный размер блока породы, $\lambda_b$ — теплопроводность его материала), что температуры фаз на границе выравниваются практически мгновенно, по сравнению с характерным временем эксплуатации пласта;

3) блоки породы, составляющие пласт, представляются в виде регулярно уложенных параллелепипедов;

4) кондуктивным переносом тепла во вмещающем пласт массиве в направлении фильтрации можно пренебречь;

5) пласт является недеформируемым.

Анализ задачи основывается на уравнении теплового баланса фильтрующейся жидкости:

$$(1)\qquad mc_w\frac{\partial T}{\partial t}+c_w\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=Q_b+m\lambda_w\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Здесь $T$ — температура жидкости; $u$, $v$ — компоненты скорости фильтрации; $Q_b$ — источниковый член, обусловленный теплообменом жидкости с блоками породы; $m$ — пористость (трещиноватость); $\lambda_w$ и $c_w$ — коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости жидкости.

Осредняя (1) по $z$ от 0 до $h/2$, получим

$$(2)\qquad mc_w\frac{\partial \bar T}{\partial t}+c_w\left(u\frac{\partial \bar T}{\partial x}+v\frac{\partial \bar T}{\partial y}\right)=\bar Q_b+m\lambda_w\left(\frac{2}{h}\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}+\frac{\partial^2 \bar T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar T}{\partial y^2}\right)$$

(черта относится к среднему значению величины, в дальнейшем ее опускаем).

Движение жидкости описывается законом Дарси

$$(3)\qquad u=-\frac{k_e}{\mu(T)}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad v=-\frac{k_e}{\mu(T)}\frac{\partial p}{\partial y},$$

где $p$ — давление; $k_e$ — эффективная проницаемость изотропного пласта ([3]); $\mu(T)$ — вязкость жидкости. Согласно [4],

$$\mu(T)=241\cdot 10^{\frac{248}{133+T}-7}\ \text{Н}\cdot\text{с/м}^2.$$

Уравнение баланса массы для пласта, вскрытого двумя скважинами отбора и закачки воды с равными дебитами, имеет вид

$$(4)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{Q}{h}\left(\delta(x-x_{s0},\ y-y_{s0})-\delta(x-x_{si},\ y-y_{si})\right).$$

Здесь $(x_{s0}, y_{s0})$, $(x_{si}, y_{si})$ — координаты плоских источника и стока, моделирующих скважины; $Q$ — дебит скважин; $\delta$ — дельта-функция.

При $z = 0$ выполняются граничные условия 4-го рода:

$$T_r=T,\qquad \lambda_r\frac{\partial T_r}{\partial z}=m\lambda_w\frac{\partial T}{\partial z},$$

($T_r$ — температура вмещающего массива, $\lambda_r$ — коэффициент теплопроводности).

Тепловой поток со стороны массива определяется из уравнения теплопроводности

$$(5)\qquad \frac{\partial T_r}{\partial t}=a_r\frac{\partial^2 T_r}{\partial z^2}$$

($a_r$ — коэффициент температуропроводности) с краевыми условиями

$$T_r(z,0)=T_0,\qquad T_r(0,t)=T(x,y,t).$$

Осредненный по толщине пласта источниковый член в уравнении (2) будем определять из решения сопряженной задачи теплопроводности

$$(6)\qquad \frac{\partial T_b}{\partial t}=a_b\left(\frac{\partial^2 T_b}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 T_b}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 T_b}{\partial \zeta^2}\right),$$

$$-a/2<\xi<a/2,\quad -b/2<\eta<b/2,\quad -c/2<\zeta<c/2,\quad T_b(\xi,\eta,\zeta,0)=T_0,$$

$$T_b(\pm a/2,\eta,\zeta,t)=T_b(\xi,\pm b/2,\zeta,t)=T_b(\xi,\eta,\pm c/2,t)=T(x,y,t)$$

($T_b$ — температура в блоке породы).

На бесконечном удалении от скважин температура жидкости равна $T_0$ в течение всего процесса фильтрации, а скорость фильтрации равна нулю. Полагаем, что на границе нагнетательной скважины мгновенно устанавливается температура нагнетаемой жидкости $T(x_{si}, y_{si}, t) = T_s$.

Решение краевой задачи (6) имеет вид [5]

(7)

$$T_b(\xi, \eta, \zeta, t) = T_0 f(\xi, \eta, \zeta, t) + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t T_b(\xi, \eta, \zeta, t-\chi)\,[1 - f(\xi, \eta, \zeta, \chi)]\,d\chi,$$

$$f(\xi, \eta, \zeta, \chi) = 8\sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+k+1}}{\mu_m\mu_n\mu_k}\times$$

$$\times\cos\left(\mu_n\frac{2\xi}{a}\right)\cos\left(\mu_m\frac{2\eta}{b}\right)\cos\left(\mu_k\frac{2\zeta}{c}\right)e^{-\chi\beta_{nmk}},$$

$$\mu_l = (2l-1)\,\pi/2,\quad l = n,\, m,\, k,\quad \beta_{nmk} = 4a_b\,[(\mu_n/a)^2 + (\mu_m/b)^2 + (\mu_k/c)^2].$$

Из (7) следует, что градиент температуры на границе блока породы $\xi = a/2$ при медленно протекающих процессах теплопереноса

$$\frac{\partial T_b}{\partial \xi}(\cdot, t)\Big|_{\xi=a/2} \cong T_0\frac{\partial f}{\partial \xi}(\cdot, t)\Big|_{\xi=a/2} - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\left[T(\cdot, t) - \chi\frac{\partial T}{\partial t}(\cdot, t)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial f}{\partial \xi}(\cdot, \chi)\Big|_{\xi=a/2} d\chi,$$

а суммарный тепловой поток через указанную грань блока породы, приведенный к единице его объема (опускаем промежуточные выкладки),

(8)

$$q_a(t) = -\frac{1}{abc}\iint\frac{\partial T_b}{\partial \xi}(a/2, \eta, \zeta, t)\,d\eta d\zeta \cong \frac{16}{a^2}\left\{-T_0\sum_{n,m,k=1}^{\infty}\frac{e^{-\beta_{nmk}t}}{\mu_m^2\mu_k^2} + \right.$$

$$\left.+\sum_{n,m,k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^2\mu_k^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{T\frac{1 - e^{-\beta_{nmk}t}}{\beta_{nmk}} - \frac{\partial T}{\partial t}\left[\frac{1 - e^{-\beta_{nmk}t}}{\beta_{nmk}^2} - \frac{te^{-\beta_{nmk}t}}{\beta_{nmk}}\right]\right\}\right\}.$$

Дифференцируя выражение под вторым знаком суммы в (8) по $t$ и пренебрегая второй производной температуры по времени, вследствие сделанного допущения о медленном характере процесса теплопереноса имеем окончательно

$$q_a(t) \cong \frac{16}{a^2}\sum_{n,m,k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_m^2\mu_k^2}\left[(T - T_0)\,e^{-\beta_{nmk}t} - \frac{\partial T}{\partial t}\frac{1 - e^{-\beta_{nmk}t}(1 + \beta_{nmk}t)}{\beta_{nmk}}\right].$$

Суммарный поток тепла через поверхность блока породы ($q_a(t)$ и $q_b(t)$ — тепловые потоки через грани $\eta = b/2$ и $\zeta = c/2$ соответственно)

(9)

$$Q(t) = 2\,(q_a(t) + q_b(t) + q_c(t)).$$

Поток тепла через границу между вмещающим массивом и пластом определяем из решения уравнения (5) с заданными краевыми условиями:

$$q_r = -\frac{2\lambda_r}{h}\frac{\partial T_r}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{2\sqrt{\lambda_r c_r}}{h}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{T(x, y, \tau) - T_0}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,d\tau.$$

Для медленно протекающего процесса теплопереноса между вмещающим массивом и пластом получим [6]

(10)

$$q_r \cong \frac{2}{h}\sqrt{\frac{\lambda_r c_r}{\pi}}\left(\frac{T - T_0}{t^{0,5}} + \frac{\partial T}{\partial t}t^{0,5}\right)$$

($c_r$ — коэффициент объемной теплоемкости вещества вмещающего массива).

Система уравнений (2)—(4) с учетом (9) и (10) в безразмерных переменных приводится к виду

(11)

$$c(t)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = (1 - \theta)\,d(t) + m\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) +$$

$$+\theta\,(\delta(x - x_{s0}, y - y_{s0}) - \delta(x - x_{si}, y - y_{si})),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar\mu\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar\mu\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\delta(x-x_{si},\ y-y_{si})-\delta(x-x_{s0},\ y-y_{s0}),$$

$$u=-\bar\mu\frac{\partial p}{\partial x},\quad v=-\bar\mu\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$d(t)=8(1-m)\,\varepsilon_{bw}\mathrm{Fo}\sum_{n,m,k=1}^{\infty}\frac{\mu_{nmk}^2e^{-\mu_{nmk}^2\mathrm{Fo}t}}{\mu_n^2\mu_m^2\mu_k^2}+\mathrm{F}t^{-0{,}5},$$

$$c(t)=m+(1-m)\,\varepsilon_{bw}\left(1-8\sum_{n,m,k=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu_{nmk}^2\mathrm{Fo}t}(1+\mu_{nmk}^2\mathrm{Fo}t)}{\mu_n^2\mu_m^2\mu_k^2}\right)+\mathrm{F}t^{0{,}5},$$

$$\mu_{nmk}^2=\mu_n^2+\mu_m^2(a/b)^2+\mu_k^2(a/c)^2$$

(при Fo $t>1$ в выражениях для $c(t)$ и $d(t)$ можно ограничиться одним членом ряда).

Переменные $x$, $y$ в (11) отнесены к расстоянию между скважинами $L$, компоненты скорости — к величине $V=Q/(hL)$, давление — к $\Delta P=Q\mu_0/(hk_e)$, $\mu_0=\mu(T_0)$, время — к $L/V=hL^2/Q$. Безразмерная температура $\theta=(T-T_s)/\Delta T$, $\Delta T=T_0-T_s$.

Безразмерные критерии Fo и F, характеризующие интенсивность теплообмена между блоками породы и жидкостью и между вмещающим массивом и жидкостью, имеют вид

$$\mathrm{Fo}=\frac{a_b}{(a/2)^2}\frac{hL^2}{Q},\qquad \mathrm{F}=2\varepsilon_{rw}L\sqrt{\frac{a_r}{\pi Qh}}.$$

Число Пекле $\mathrm{Pe}=Q/(a_wh)$, $\varepsilon_{bw}=c_b/c_w$, $\varepsilon_{rw}=c_r/c_w$ ($c_b$ — коэффициент объемной теплоемкости для блоков породы).

Отношение вязкостей

$$\bar\mu=\frac{\mu_0}{\mu(T)}=10^{248\frac{\Delta T(\theta-1)}{(133+T_0)(133+T_s+\theta\Delta T)}}.$$

Краевые условия: $\theta(x,y,0)=1$, $\theta(x,y,t)=1$, $\partial p/\partial n=0$ (на границе пласта, $n$ — нормаль к границе), $\theta(x_{si},y_{si},t)=0$.

При $a\to0$ (при исчезающе малых размерах блоков породы), т. е. при $\mathrm{Fo}\to\infty$, $c(t)\to m+(1-m)\,\varepsilon_{bw}+\mathrm{F}t^{0{,}5}$ и $d(t)\to\mathrm{F}t^{-0{,}5}$. В этом случае система уравнений (11) соответствует системе уравнений гомогенной модели пористого пласта [6]. При Fo = 0, т. е. когда теплообмена между блоками породы и жидкостью не происходит, $c(t)=m+\mathrm{F}t^{0{,}5}$ и $d(t)=\mathrm{F}t^{-0{,}5}$.

Трещиноватость пласта определялась в соответствии с предположением о регулярной укладке блоков породы по формуле

$$m=1-N_xN_yN_z\frac{abc}{hh_xh_y},$$

где $h_x$, $h_y$ — размеры пласта в плоскости $Oxy$; $N_xN_yN_z$ — число блоков породы в пласте по координатным направлениям.

Поскольку $(N_z+1)\,s+N_za=h$ и т. д. (если $s$ — фиксированная толщина трещин в пласте), то

$$m=1-\frac{(1-s/h)(1-s/h_x)(1-s/h_y)}{(1+s/a)(1+s/b)(1+s/c)}.$$

Для случая тонкого пласта ($h\ll h_x$, $h_y$)

$$m=1-\frac{1-s/h}{(1+s/a)(1+s/b)(1+s/c)}.$$

Если, кроме того, блоки породы представляют собой тонкие пластины ($a\ll b$, $c$), то

$$m=\frac{1+a/h}{1+a/s}.$$

Полная система критериев рассматриваемой задачи содержит восемь параметров: Fo, F, Pe, $\varepsilon_{bw}$, $a/h$, $a/b$, $a/c$, $h/s$, а также безразмерную функцию $\bar{\mu}$ ($T_0$, $T_s$) от двух размерных параметров. Получение интересующей нас зависимости $t_\varkappa$ (времени, в течение которого безразмерная температура в эксплуатационной скважине падает до $\theta = \varkappa$) сопряжено с проведением большого числа расчетов, поэтому численный анализ задачи был проведен при фиксированном значении $\varepsilon_{bw} = 0{,}4$ (что отвечает соотношению объемных теплоемкостей гранита и воды), а также без учета кондуктивного переноса тепла в пласте (Pe $\gg$ 1) для $\varkappa = 0{,}9$. Кроме того, параметры $a/b$ и $a/c$ были заменены одним $\alpha = a/b = a/c$ и полагалось, что $T_s = 10$ °C и $T_0 = 50$ °C. Отношение мощности пласта к толщине трещин $h/s = 10^4$, отношение размера блока породы по координате $z$ к мощности пласта $a/h = 0{,}01$. Варьировались параметры Fo, F и $\alpha$.

Для решения уравнения теплового баланса использовалась явная консервативная разностная схема с аппроксимацией конвективного члена согласно схеме Ранчела [7] первого порядка точности, для решения уравнения для давления — итерационная процедура Гаусса — Зейделя.

Значения переменных в узлах расчетной сетки на оси симметрии течения — линии, соединяющей скважины,— определялись из разностных уравнений, в которых значения переменных в узловых точках, не входящих в расчетную область, исключались с помощью соотношений симметрии. Температура в точке расположения эксплуатационной скважины рассчитывалась как средневзвешенная (по значениям расхода жидкости) температура в четырех ближайших полуузлах расчетной сетки.

Расчеты проведены на сетке 51 × 21 с учетом симметрии течения. Расчетная область имела форму квадрата с длиной стороны в безразмерных единицах, равной 3, что было вполне достаточным для того, чтобы граничные условия на границе пласта, а они соответствовали граничным условиям для бесконечного пласта, не оказывали влияния на характеристики течения в окрестности скважин.

На рис. 1 приведены зависимости $t_{0,9}$ (F) для $\alpha \ll 1$ (блоки породы — тонкие пластины). Трещиноватость пласта $m$, согласно (19), равна 0,01.

При увеличении Fo эффективная объемная теплоемкость трещиноватого коллектора $c\,(t)$ увеличивается, что обусловливает замедление процесса теплообмена. Расслоение кривых по значениям Fo уменьшается при увеличении F, и при F > 1 для Fo > 1 термическое сопротивление блоков породы практически не оказывает влияния на тепловой режим пласта, который определяется только конвективным переносом тепла и теплообменом со вмещающим пласт массивом.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости $t_{0,9}$ ($\alpha$) без учета теплообмена со вмещающим массивом при F = 0 и 0,25 соответственно.

При увеличении $\alpha$ от 0 до $\infty$ трещиноватость пласта $m$ монотонно возрастает от значения, отвечающего конфигурации блоков породы — протяженных пластин, до значения $m = 1$. Скорость фильтрации теплоносителя при этом падает и процесс остывания пласта замедляется. Одновременно при увеличении $\alpha$ уменьшаются размеры блоков породы, что интенсифицирует процесс теплообмена в пласте.

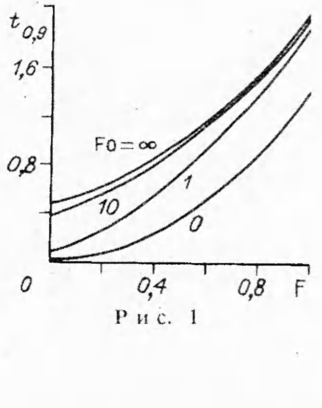

Рис. 1

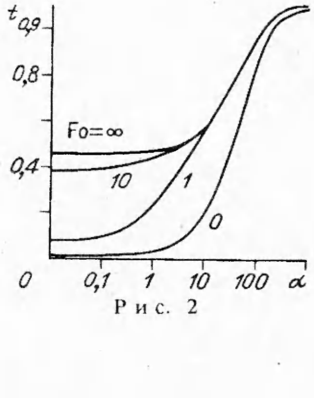

Рис. 2

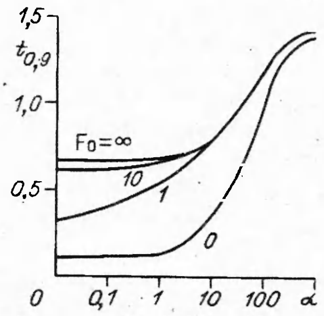

Рис. 3

Второй фактор, как видно из рис. 2 и 3, оказывает некоторое влияние на процесс теплообмена в пласте только в диапазоне $0 < \alpha < 1$. При $\alpha > 1$ с ростом $\alpha$ процесс теплообмена существенно замедляется, а при $\alpha > 10$ практически не зависит и от Fo, за исключением диапазона Fo < 1, т. е. когда теплообмен между блоками породы и жидкостью незначителен.

Зависимости $t_{0,9}(\alpha)$, приведенные на рис. 2 и 3, соответствуют переменной трещиноватости пласта. Зависимость $t_{ж}(\alpha, m)$ имеет монотонно убывающий характер по $\alpha$ и монотонно возрастающий по $m$, что обусловливается тем, что при жестком режиме отбора теплоносителя, когда дебиты нагнетательной и эксплуатационной скважин совпадают, скорость фильтрации теплоносителя, а следовательно, и интенсивность процесса теплообмена в пласте увеличиваются при росте $\alpha$ и уменьшении $m$, поскольку то и другое приводит к распределению фиксированного расхода по меньшему объему пласта, занятому теплоносителем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Harlow F. H., Pracht W. E. A theoretical study oh geothermal energy extraction // J. Geophys. Res.— 1972.— V. 77, N 35.
2. Vinsome P. K. W., Westerveld J. A simple method for predicting cap and base rock heat losses in thermal reservoir simulators // J. Can. Petrol. Technol.— 1980.— V. 19, N 3.
3. Голф-Рахт Т. Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов.— М.: Недра, 1986.
4. Вукалович М. П. Термодинамические свойства воды и водяного пара.— М.: Энергия, 1965.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высш. шк., 1967.
6. Булыгин В. Я., Локотунин В. А. Исследование неизотермической фильтрации двухфазной жидкости // Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: Сб. науч. тр.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1977.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.

*г. Новосибирск* *Поступила 6/V 1992 г., в окончательном варианте — 15/X 1992 г.*

---

УДК 539.385+620.178.5

*В. А. Долгоруков, В. Н. Шлянников*

# ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ИНИЦИАЦИИ НАКЛОННЫХ ТРЕЩИН

Одним из важных элементов решений задач о несущей способности элементов конструкций с дефектами типа трещин, которые на практике ориентированы произвольным образом, является определение направления инициации разрушения $\theta^*$. Значение этого угла оказывает существенное влияние на характер траектории разрушения и как следствие на долговечность элементов конструкций [1—3]. Поэтому оценка $\theta^*$ как одной из сторон критериального анализа в зависимости от краевых условий задач стала традиционным направлением изучения механики трещин. Обзор таких работ приведен в [4, 5].

В рамках таких исследований, однако, имеется ряд вопросов, не нашедших пока должного отражения в литературе, рассмотрение которых и есть цель настоящей работы. К числу таких вопросов относятся концептуальное обоснование подходов к решению задачи и анализ феноменологической стороны процесса в сравнении с экспериментальными данными.