ми — значения коэффициентов, полученные на основе линейной теории [10] для безграничной жидкости ($b/h = 0$). Здесь же точками нанесены результаты эксперимента для значений $y_0/b = 0{,}08$, $b/h = 1{,}67$, любезно предоставленные автору Д. Н. Гореловым и А. В. Пинером. Видно, что экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с теоретическими.

Поступила 20 VIII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горелов Д. Н.** Экспериментальное исследование силы тяги.— В сб.:Бионика, 1980, № 14.
2. **Яковлев Г. Я.** Неустановившееся движение крыла вблизи поверхности раздела.— Труды ЦАГИ, 1959, вып. 755.
3. **Ефремов И. И.** К задаче о неустановившемся движении тонкого профиля вблизи границы раздела двух сред.— Гидромеханика, 1959, вып. 15.
4. **Горелов Д. Н.** О влиянии границ потока несжимаемой жидкости на нестационарные аэродинамические характеристики профиля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1965, № 5.
5. **Рождественский К. В.** Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла. Л.: Судостроение, 1979.
6. **Басин М. А., Шадрин В. П.** Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела сред. Л.: Судостроение, 1980.
7. **Горелов Д. Н., Куляев Р. Л.** Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6.
8. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
9. **Алгазин В. А., Горелов Д. Н.** О произвольном движении крыла конечного размаха в несжимаемой жидкости.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1974, № 3, вып. 1.
10. **Некрасов А. И.** Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

УДК 533.6.011 + 527.985

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОЛН РИМАНА И ПРАНДТЛЯ—МЕЙЕРА

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

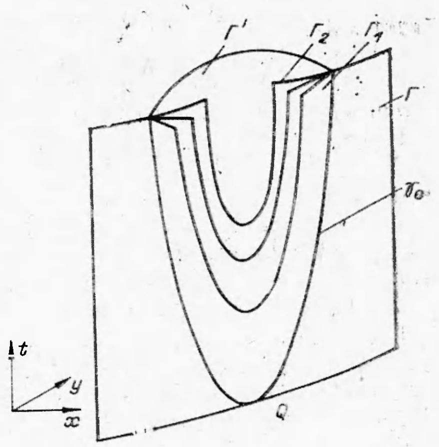
В работе доказано существование решений уравнений пространственной газовой динамики, обладающих особенностями определенного вида — волн, центрированных на произвольных двумерных поверхностях в четырехмерном пространстве **x**, t. Эти решения являются обобщениями центрированных волн Римана в теории одномерных нестационарных движений и центрированных волн Прандтля—Мейера в теории плоских стационарных течений. Особенности указанного вида возникают при рассмотрении задач о взаимодействии ударных волн, имеющих фронт произвольной формы, о взаимодействии ударных волн и контактного разрыва, в задаче о поршне.

1. Постановка задачи. Рассматриваются уравнения, описывающие пространственные неустановившиеся течения невязкого нетеплопроводного нормального газа [1, 2]:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \quad \frac{dp}{dt} + \rho c^2 \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0, \quad \rho = \psi(p, S), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости; p — давление; ρ — плотность; S — энтропия; c — скорость звука; t — время; $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки в R^3; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$. Функция $\psi(p, S)$, задающая уравнение состояния нормального газа, предполагается аналитической.

Центрированной волной называется такое решение системы (1.1), область определения которого покрыта однопараметрическим семейством звуковых характеристик, проходящих через заданную двумерную поверхность $\gamma_0 \subset E^4 = R^3 \times R$ ($\mathbf{x} \in R^3$, $t \in R$). При этом волна называется центрированной на γ_0.



Далее рассматривается задача о поршне. Пусть в области типа полупространства, граница которой Γ задана уравнением $h(\mathbf{x}) = 0$ ($\nabla h \neq 0$), определено при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ решение системы (1.1), удовлетворяющее условию непротекания $\mathbf{u} \cdot \nabla h = 0$ на Γ. Это решение в дальнейшем называется невозмущенным. В момент $t = 0$ в точке $Q \in \Gamma$ возникает возмущение, распространяющееся по Γ: боковая стенка начинает прогибаться по заданному закону так, что вне прогнутой части она задается уравнением $h(\mathbf{x}) = 0$, а в прогнутой части Γ' — уравнением $h_1(\mathbf{x}, t) = 0$. Предполагается, что $h_1 > 0$ в области, занятой газом, $h_{1t} > 0$ на Γ', поверхности $h(\mathbf{x}) = 0$ и $h_1(\mathbf{x}, 0) = 0$ касаются в точке Q. Пересечение Γ и Γ' образует ребро, которое движется по заданному закону по Γ. Пусть γ_0 —двумерная поверхность в E^4, описываемая этим ребром со временем (на фигуре приведена картина, иллюстрирующая плоский случай). Невозмущенное решение будет описывать течение газа в области, ограниченной звуковой характеристикой Γ_1 ($\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$)

$$\varphi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + c|\nabla\varphi| = 0, \tag{1.2}$$

проходящей через γ_0 ($\varphi > 0$ в области невозмущенного движения). Требуется найти возмущенное решение в области, ограниченной Γ_1 и Γ', непрерывно примыкающее по Γ_1 к невозмущенному решению, удовлетворяющее условию непротекания на Γ':

$$h_{1t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h_1 = 0. \tag{1.3}$$

Из-за невыполнения условий согласования данных на Γ' и Γ_1 возникает центрированная па γ_0 волна. Ее область определения будет ограничена звуковыми характеристиками Γ_1 и Γ_2, проходящими через γ_0. Предельное значение $\mathbf{u}$ на γ_0 по Γ_2 будет удовлетворять (1.3). После отыскания центрированной волны остается решить смешанную задачу без особенностей с данными на Γ', Γ_2.

Известно, что стационарная центрированная волна Прандтля — Мейера — сверхзвуковое течение. Здесь аналогом этого факта является то, что центрированная волна может быть построена в окрестности тех точек γ_0, которые движутся по Γ' относительно газа со сверхзвуковой скоростью в направлении нормали к сечению γ_{0t} поверхности γ_0 плоскостью $t = \mathrm{const}$. Совпадение указанной скорости со скоростью звука соответствует появлению на γ_0 точек, в которых характеристические полосы уравнения (1.2) касаются γ_0.

2. Преобразование уравнений. В области центрированной волны будут введены новые независимые переменные τ, ξ, β, γ с помощью замены $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau, \xi, \beta, \gamma)$, $t = t(\tau, \beta, \gamma)$. Функции $\mathbf{x}(\tau, \xi, \beta, \gamma)$, $t(\tau, \beta, \gamma)$ определяются как решения задачи Коши:

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{f},\ t_\tau = 1,\ \mathbf{x}|_{\tau=0} = \mathbf{x}_0(\beta, \gamma),\ t|_{\tau=0} = t_0(\beta, \gamma). \tag{2.1}$$

Уравнениями $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\beta, \gamma)$, $t = t_0(\beta, \gamma)$ параметрически задается γ_0; предполагается, что это отображение взаимно-однозначно на $\gamma_0, |\mathbf{x}_{0\beta}| \neq 0$, $|\mathbf{x}_{0\gamma}| \neq 0$, $|\mathbf{x}_{0\beta} \times \mathbf{x}_{0\gamma}| \neq 0$ (здесь и далее $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). В точке Q, где γ_0 касается плоскости $t = 0$, $t_{0\beta} = t_{0\gamma} = 0$. Функция $\mathbf{f}$ выбирается так, чтобы при фиксированном ξ уравнениями $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau, \xi, \beta, \gamma)$, $t = t(\tau, \beta, \gamma)$ задавалась звуковая характеристика, проходящая через γ_0 ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi = 0$ соответствует Γ_1, $\xi = 1$ соответствует Γ_2). В силу (1.2) это требование дает соотношение

$$(\mathbf{f}-\mathbf{u})\cdot((\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{f})\times(\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{f})) = c|(\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{f})\times(\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{f})|,$$

которое будет выполнено, если взять $\mathbf{f}$ в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{u} + c(|\mathbf{v}|^2 + 2i|\mathbf{k}|^2)|\mathbf{v}|^{-2}(|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{-1/2}\cdot\mathbf{v} - 2i|\mathbf{v}|^{-2}(\mathbf{k}\times\mathbf{v}), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{v} = (\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{u})\times(\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{u})$; $\mathbf{k} = t_\beta\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{x}_\beta$; $i = \varepsilon + p\rho^{-1}$; ε — удельная внутренняя энергия газа. Выражение (2.2) имеет смысл при $|\mathbf{v}| > c|\mathbf{k}|$. Центрированная волна будет построена в окрестности тех точек γ_0, где невозмущенное решение удовлетворяет неравенству 1°: $1 - |\mathbf{k}|c|\mathbf{v}|^{-1} \geqslant \sigma_1 > 0$ ($\sigma_1 = \mathrm{const}$). В силу того, что в точке Q $t_\beta = t_\gamma = 0$, а следовательно, $\mathbf{k} = 0$, нужное неравенство всегда имеет место в окрестности точки Q. Достижение равенства $|\mathbf{v}| = |\mathbf{k}|c$ соответствует звуковой скорости движения линии γ_{0t} по стенке относительно газа в направлении нормали к ней. При больших t центрированная волна исчезает и на γ_0 появляется другая особенность. Согласно (2.1), замена переменных вырождена на γ_0, так как $\mathbf{x}_\xi(0, \xi, \beta, \gamma) = 0$. Представим $\mathbf{x}_\xi$ в виде $\mathbf{x}_\xi = \tau\mathbf{y}$. При замене переменных в (1.1) используются формулы

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{f}\cdot\nabla,\quad \frac{\partial}{\partial\xi} = \tau\mathbf{y}\cdot\nabla,\quad \frac{\partial}{\partial\beta} = t_\beta\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{x}_\beta\cdot\nabla,\quad \frac{\partial}{\partial\gamma} = t_\gamma\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{x}_\gamma\cdot\nabla$$

и их следствия

$$d/dt = \partial/\partial\tau + (\mathbf{u}-\mathbf{f})\cdot\nabla,\quad \nabla = J^{-1}\{[(\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{f})\times\mathbf{y}]\partial/\partial\beta + (\mathbf{y}\times\mathbf{k})\partial/\partial\tau + [\mathbf{y}\times(\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{f})]\partial/\partial\gamma + \tau^{-1}[(\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{f})\times(\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{f})]\partial/\partial\xi\},$$

где $J = \mathbf{y}[(\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{f})\times(\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{f})]$. После некоторых преобразований (1.1) записывается в виде

$$\begin{gathered}(\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{u})\mathbf{u}_\xi - t_\beta\rho^{-1}p_\xi - \tau[(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})(|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{1/2}(|\mathbf{v}|^2c + {}\\ + 2ic|\mathbf{k}|^2)^{-1}\cdot((\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{u})\mathbf{u}_\tau - t_\beta\rho^{-1}p_\tau) + A_1\mathbf{U}_\beta + A_2\mathbf{U}_\gamma] = 0,\\ (\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{u})\mathbf{u}_\xi - t_\gamma\rho^{-1}p_\xi - \tau[(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})(|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{1/2}(|\mathbf{v}|^2c + {}\\ + 2ic|\mathbf{k}|^2)^{-1}((\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{u})\mathbf{u}_\tau - t_\gamma\rho^{-1}p_\tau) + B_1\mathbf{U}_\beta + B_2\mathbf{U}_\gamma] = 0,\\ S_\xi - \tau[(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})(|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{1/2}(|\mathbf{v}|^2c + 2ic|\mathbf{k}|^2)^{-1}S_\tau + D_1S_\beta + D_2S_\gamma] = 0,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\tau + (|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{1/2}\rho^{-1}c^{-1}p_\tau + E_1\mathbf{U}_\beta + E_2\mathbf{U}_\gamma = 0,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\xi - (|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{1/2}\rho^{-1}c^{-1}p_\xi - \tau[((\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})^2 - c^2(\mathbf{y}\times\mathbf{k})^2)(2cJ)^{-1}(|\mathbf{v}|^2 - {}\\ - |\mathbf{k}|^2c^2)^{-1/2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\tau - (|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{1/2}\rho^{-1}c^{-1}p_\tau) + F_1\mathbf{U}_\beta + F_2\mathbf{U}_\gamma] = 0.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{U}$ обозначает вектор-решение, компонентами которого являются p, S и компоненты $\mathbf{u}$; A_i, B_i, E_i, F_i — векторные, а D_i — скалярные функции переменных $\mathbf{U}$, $\mathbf{x}_\beta$, $\mathbf{x}_\gamma$, $\mathbf{y}$. При $\tau = 0$ из (2.3) следует сохранение величин S, $a = (\mathbf{x}_\beta\cdot\mathbf{u}) - t_\beta(2^{-1}|\mathbf{u}|^2 + i)$, $b = (\mathbf{x}_\gamma\cdot\mathbf{u}) - t_\gamma(2^{-1}|\mathbf{u}|^2 + i)$ при переходе через центрированную волну в фиксированной точке γ_0 ($S_\xi = a_\xi = b_\xi = 0$ при $\tau = 0$). Введем величины θ и H:

$$\operatorname{tg}|\mathbf{k}|\theta = \frac{|\mathbf{k}|(\mathbf{u}\cdot\mathbf{m})}{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})},\quad \mathbf{m} = \mathbf{x}_\beta\times\mathbf{x}_\gamma,\ H(p, S, B) = \int\limits_0^p \frac{[B - |\mathbf{k}|^2(c^2 + 2i)(p', S)]^{1/2}\,dp'}{\rho(p', S)\,c(p', S)\,(B - 2|\mathbf{k}|^2 i(p', S))}$$

и $r = \theta + H(p, S, |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{k}|^2 i)$, $l = \theta - H(p, S, |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{k}|^2 i)$. Из последнего уравнения (2.3) следует, что при $\tau = 0$ $l_\xi = 0$ (в силу первых уравнений $(|\mathbf{v}|^2 + 2i|\mathbf{k}|^2)_\xi = 0$ при $\tau = 0$). Можно отметить, что изменение $|\mathbf{k}|\theta$ характеризует угол поворота вектора $\mathbf{v}$ в плоскости, ортогональной $\mathbf{k}$, при переходе через центрированную волну. При $|\mathbf{k}| \to 0$ $\theta \pm H \to |\mathbf{m}|^{-1}\left(u_n \pm \int\limits_0^p \rho^{-1}c^{-1}dp\right)$, где $u_n = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{m})|\mathbf{m}|^{-1}$. Если в точке поверхности γ_0 с координатами β, γ заданы θ_0, p_0, S_0, $|\mathbf{v}_0|^2 + 2i_0|\mathbf{k}|^2$, $\mathbf{k}$, то всевозможные состояния (θ, p), получающиеся переходом с помощью центрированной волны, лежат на кривой

$$\theta - H(p, S_0, |\mathbf{v}_0|^2 + 2i_0|\mathbf{k}|^2) = \theta_0 - H(p_0, S_0, |\mathbf{v}_0|^2 + 2i_0|\mathbf{k}|^2) \tag{2.4}$$

в плоскости (θ, p). Эта кривая однозначно проектируется на оси θ, p. Задание либо θ, либо p на γ_0 по другую сторону волны позволяет определить все величины за волной. В задаче о поршне $\theta_0 = 0$, на γ_0 задан $\lim\limits_{\tau\to 0}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})|_{\Gamma_2} = (-h_{1t}\cdot|\nabla h_1|^{-1})_{\Gamma_2,\tau=0}$, где $\mathbf{n} = \nabla h_1\cdot|\nabla h_1|^{-1}$. Так как Γ' — контактная характеристика, $\mathbf{n} = \mathbf{v}\cdot|\mathbf{v}|^{-1}$. Тогда $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{m})\cdot|\mathbf{v}|^{-1} = |\mathbf{m}||\mathbf{k}|^{-1}\sin|\mathbf{k}|\theta$. Следовательно, на γ_0 задан $\lim\limits_{\tau\to 0}\theta|_{\Gamma_2} = \theta_2(\beta, \gamma)$. Существование центрированной волны будет доказано при выполнении следующих ограничений 2°:

$$\sigma_3 - H(p_0, S_0, |\mathbf{v}_0|^2 + 2i_0|\mathbf{k}|^2) \leqslant \theta_2(\beta, \gamma) \leqslant -\sigma_2,$$

где σ_2, σ_3 — положительные постоянные. Эти неравенства гарантируют ненулевую амплитуду волны $(\theta_2 \leqslant -\sigma_2)$ и отсутствие вакуума $\left(\lim\limits_{\tau\to 0} p|_{\Gamma_2} > 0\right)$.

Пусть невозмущенное решение, поверхности $\Gamma, \Gamma', \gamma_0$ — аналитические и выполнены неравенства 1°, 2°.

Т е о р е м а. Существует аналитическая при $0 < \tau \leqslant \tau_0$ $(\tau_0 > 0)$ в окрестности γ_0 центрированная волна, непрерывно примыкающая по звуковой характеристике Γ_1 к невозмущенному решению такая, что предельное значение θ по Γ_2 при $\tau \to 0$ совпадает с заданной аналитической функцией $\theta_2(\beta, \gamma)$.

3. Существование решения в классе формальных степенных рядов. В качестве искомых функций рассматриваются величины r, l, a, b, S, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\beta$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}_\gamma$. Значение $\theta_2(\beta, \gamma)$, согласно п. 2, определяет $r_2(\beta, \gamma)$ — предельное значение r по Γ_2 при $\tau = 0$. Положим

$$r|_{\tau=0} = (1 - \xi)r_0(\beta, \gamma) + \xi r_2(\beta, \gamma), \tag{3.1}$$

где $r_0(\beta, \gamma)$ — значение r при $\tau = \xi = 0$, известное из условий непрерывного примыкания. Условия непрерывного примыкания на Γ_1 имеют вид

$$\begin{gathered} l|_{\xi=0} = l_0(\tau, \beta, \gamma),\ a|_{\xi=0} = a_0(\tau, \beta, \gamma),\ b|_{\xi=0} = b_0(\tau, \beta, \gamma), \\ S|_{\xi=0} = S_0(\tau, \beta, \gamma), \end{gathered} \tag{3.2}$$

где l_0, a_0, b_0, S_0 — заданные аналитические функции. Сведем граничные условия к однородным заменой искомых функций: $l_1 = l - l_0$, $a_1 = a - a_0$, $b_1 = b - b_0$, $S_1 = S - S_0$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w} - \mathbf{x}_{0\gamma}$, $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z} - \mathbf{x}_{0\beta}$, $r_1 = r - (1 - \xi)r_0(\beta, \gamma) - \xi r_2(\beta, \gamma)$. В силу (2.1), (2.3) можно вычислить $\mathbf{y}_0(\xi, \beta, \gamma) = \mathbf{y}|_{\tau=0} = (|\mathbf{v}|^2 + 2i|\mathbf{k}|^2)(|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^2)^{-3/2}(\rho^{-1}c^{-1}p_\xi + c_\xi)\mathbf{v}|_{\tau=0}$. Полагаем $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0$. Возникает задача с однородными граничными условиями для следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}
a_{1\xi} = \tau[N_1 a_{1\tau} + A_{11}\mathbf{V}_\beta + A_{12}\mathbf{V}_\gamma + A_{13}\mathbf{y}_{1\beta} + A_{14}], \\
b_{1\xi} = \tau[N_1 b_{1\tau} + B_{11}\mathbf{V}_\beta + B_{12}\mathbf{V}_\gamma + B_{13}\mathbf{y}_{1\gamma} + B_{14}], \\
S_{1\xi} = \tau[N_1 S_{1\tau} + D_{11}\mathbf{V}_\beta + D_{12}\mathbf{V}_\gamma + D_{13}], \\
l_{1\xi} = \tau[N_2 l_{1\tau} + F_{11}S_{1\tau} + F_{12}a_{1\tau} + F_{13}b_{1\tau} + F_{14}\mathbf{V}_\beta + \\
+ F_{15}\mathbf{V}_\gamma + F_{16}\mathbf{y}_{1\beta} + F_{17}\mathbf{y}_{1\gamma} + F_{18}], \\
r_{1\tau} = E_{11}S_{1\tau} + E_{12}a_{1\tau} + E_{13}b_{1\tau} + E_{14}\mathbf{V}_\beta + E_{15}\mathbf{V}_\gamma + E_{16}, \\
\mathbf{x}_{1\tau} = \mathbf{G}_1,\ \mathbf{w}_{1\tau} = G_2\mathbf{V}_\beta + G_3\mathbf{V}_\gamma + \mathbf{G}_4,\ \mathbf{z}_{1\tau} = G_5\mathbf{V}_\beta + G_6\mathbf{V}_\gamma + \mathbf{G}_7, \\
\mathbf{y}_1 + \tau\mathbf{y}_{1\tau} = \mathbf{Q}_1 r_{1\xi} + \mathbf{Q}_2 + \tau[\mathbf{Q}_3 S_{1\tau} + \mathbf{Q}_4 a_{1\tau} + \mathbf{Q}_5 b_{1\tau} + \\
+ \mathbf{Q}_6 l_{1\tau} + Q_7\mathbf{V}_\beta + Q_8\mathbf{V}_\gamma + Q_9\mathbf{y}_{1\beta} + Q_{10}\mathbf{y}_{1\gamma} + \mathbf{Q}_{11}], \\
\xi = 0:\ a_1 = b_1 = S_1 = l_1 = 0,\ \tau = 0:\ r_1 = 0,\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{z}_1 = 0.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — обозначение вектора-решения с компонентами a_1, b_1, S_1, l_1, r_1, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{z}_1$; коэффициенты A_{1i}, B_{1i}, D_{1i}, F_{1i}, E_{1i}, G_i, Q_i, N_i аналитически зависят от $\mathbf{V}$, $\mathbf{y}_1$, ξ, τ, β, γ. Отметим, что $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ не зависят от $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{Q}_2|_{\tau=0} = 0$,

$$N_1 = \frac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})\,(|\,\mathbf{v}\,|^2 - |\,\mathbf{k}|^2\,c^2)^{1/2}}{c\,(|\,\mathbf{v}\,|^2 + 2i\,|\,\mathbf{k}\,|^2)},\quad N_2 = \frac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v})^2 - c^2\,(\mathbf{y}\times\mathbf{k})^2}{2cJ\,(|\,\mathbf{v}\,|^2 - |\,\mathbf{k}\,|^2\,c^2)^{1/2}}.$$

Для построения решения в виде формальных степенных рядов от переменных τ, $\xi - \xi_1$, $\beta - \beta_1$, $\gamma - \gamma_1$, где ξ_1, β_1, γ_1 — координаты произвольной точки плоскости $\tau = 0$, достаточно вычислить все производные решения в этой точке.

Л е м м а. Производные решения однозначно определяются из уравнений и граничных условий.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно п. 2, (3.3), искомые функции равны нулю при $\tau = 0$. Предположим, что при $\tau = 0$ известны все производные решения порядка $(j - 1)$. Тогда дифференцированием их по ξ, β, γ можно найти все производные порядка j, кроме $\partial^j/\partial\tau^j$. Первые четыре уравнения (3.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} &a_{1\xi} - \tau L(\xi) a_{1\tau} = \tau\Phi_1, \quad b_{1\xi} - \tau L(\xi) b_{1\tau} = \tau\Phi_2, \\ &S_{1\xi} - \tau L(\xi) S_{1\tau} = \tau\Phi_3, \quad l_{1\xi} - 2^{-1}\tau L(\xi) l_{1\tau} = \tau\Phi_4, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $L(\xi) = [(\rho^{-1}c^{-1}p_\xi + c_\xi)|\mathbf{v}|^2(c|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{k}|^2c^3)^{-1}]\ (0, \xi, \beta_1, \gamma_1) = N_1(0, \xi, \beta_1, \gamma_1) = 2N_2(0, \xi, \beta_1, \gamma_1)$. Из (3.4) получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $\partial^j a_1/\partial\tau^j|_{\tau=0}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial^j a_1}{\partial\tau^j} - jL(\xi)\frac{\partial^j a_1}{\partial\tau^j}\right)_{\tau=0} = j\,\frac{\partial^{j-1}}{\partial\tau^{j-1}}\,\Phi_1\,|_{\tau=0}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^j a_1}{\partial\tau^j}(0, \xi_1, \beta_1, \gamma_1) = j\int\limits_0^{\xi_1}\frac{\partial^{j-1}}{\partial\tau^{j-1}}\Phi_1(0, \xi', \beta_1, \gamma_1)\times \exp\left(j\int\limits_{\xi'}^{\xi_1} L(\xi'')\,d\xi''\right)d\xi'. \tag{3.5}$$

Аналогичные формулы получаются для $\partial^j b_1/\partial\tau^j$, $\partial^j S_1/\partial\tau^j$, $\partial^j l_1/\partial\tau^j$. Эти формулы позволяют определить указанные производные через известные величины. Оставшиеся производные вычисляются из уравнений (3.3). Лемма доказана.

4. Мажорантная задача. Здесь будет указана задача, решение которой даст мажоранты для найденных ранее формальных рядов в окрестности произвольной точки $\tau = 0$, $\xi = \xi_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$. Аналогично (3.5) получается формула

$$\frac{\partial^{j+m+n} a_1(0, \xi_1, \beta_1, \gamma_1)}{\partial\tau^j\partial\beta^m\partial\gamma^n} = j\int\limits_0^{\xi_1}\frac{\partial^{j-1+m+n}\Phi_1}{\partial\tau^{j-1}\partial\beta^m\partial\gamma^n}\times (0, \xi', \beta_1, \gamma_1)\exp\left(j\int\limits_{\xi'}^{\xi_1} L(\xi'')\,d\xi''\right)d\xi'. \tag{4.1}$$

В силу условий 2° $L(\xi) < -\sigma_4$ ($\sigma_4 > 0$). Тогда из (4.1) следует оценка

$$\left|\frac{\partial^{j+m+n} a_1}{\partial\tau^j\partial\beta^m\partial\gamma^n}(0, \xi_1, \beta_1, \gamma_1)\right| \leqslant \frac{1}{\sigma_4}\max_\xi\left|\frac{\partial^{j-1+m+n}\Phi_1}{\partial\tau^{j-1}\partial\beta^m\partial\gamma^n}(0, \xi, \beta_1, \gamma_1)\right|. \tag{4.2}$$

Аналогичные оценки для производных b_1, S_1, l_1 получаются из (3.4). Мажорантная система уравнений строится так: коэффициенты уравнений (3.3) заменяются их равномерными по ξ мажорантами, т. е. аналитическими функциями, коэффициенты разложения которых в степенной ряд в окрестности точки $\mathbf{V}=0$, $\mathbf{y}_1=0$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$, $\tau=0$, $\xi=\xi_1$ не меньше максимумов по ξ модулей соответствующих коэффициентов разложения исходных функций в точке $\mathbf{V}=0$, $\mathbf{y}_1=0$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$, $\tau=0$, ξ $(0\leqslant\xi\leqslant 1)$. Существование таких мажорант для коэффициентов системы (3.3) можно установить с помощью интегральной формулы Коши для аналитической функции многих переменных. Кроме этих уравнений, рассматривается еще одна группа уравнений:

$$(4.3)\qquad \frac{\partial a_2}{\partial\tau}=\sigma_4^{-1}\Phi_{21},\ \frac{\partial b_2}{\partial\tau}=\sigma_4^{-1}\Phi_{22},\ \frac{\partial S_2}{\partial\tau}=\sigma_4^{-1}\Phi_{23},\ \frac{\partial l_2}{\partial\tau}=2\sigma_4^{-1}\Phi_{24}.$$

В этих уравнениях правые части Φ_{2i} строятся по Φ_i следующим образом: в Φ_i a_1, b_1, S_1, l_1 заменяются на a_2, b_2, S_2, l_2, а затем коэффициенты при производных заменяются их равномерными по ξ мажорантами аналогично предыдущему случаю. Граничные условия мажорантной задачи:

$$\tau=0\colon\ r_{1m}=a_2=b_2=S_2=l_2=0,\ \mathbf{x}_{1m}=\mathbf{w}_{1m}=\mathbf{z}_{1m}=0;$$
$$\xi=\xi_1\colon\ a_{1m}-a_2=b_{1m}-b_2=S_{1m}-S_2=l_{1m}-l_2=0.$$

Здесь r_{1m}, a_{1m} и т. д.— мажоранты r_1, a_1 и т. д.

Все производные решения мажорантной задачи определяются однозначно. Из способа построения мажорантных уравнений и (4.1)—(4.3) следует, что эти производные не меньше максимумов по ξ модулей производных решения исходной задачи, вычисленных при $\tau=\beta-\beta_1=\gamma-\gamma_1=0$, $0\leqslant\xi\leqslant 1$. Мажорантная задача может быть упрощена. Сведем граничные условия к однородным заменой: $a_3=a_{1m}-a_2$, $b_3=b_{1m}-b_2$, $S_3=S_{1m}-S_2$, $l_3=l_{1m}-l_2$. Далее уравнения (4.3) можно разрешить относительно $a_{2\tau}$, $b_{2\tau}$, $S_{2\tau}$, $l_{2\tau}$, так как эти производные входят в правые части с коэффициентом, обращающимся в нуль при $\beta-\beta_1=\gamma-\gamma_1=0$. Группы однотипных уравнений заменяем одним уравнением, вводя общую мажоранту A для функций a_2, b_2, S_2, l_2, общую мажоранту B для функций a_3, b_3, S_3, l_3, общую мажоранту P для функций r_{1m}, $\mathbf{x}_{1m}$, $\mathbf{w}_{1m}$, $\mathbf{z}_{1m}$, общую мажоранту Y для компонент $\mathbf{y}_{1m}$. Уравнения для общих мажорант получаются суммированием уравнений однотипной группы. Независимые переменные войдут в мажорантные уравнения в виде комбинаций τ, $\zeta=\xi-\xi_1$, $\delta=(\beta-\beta_1)+(\gamma-\gamma_1)$, поэтому решение будет искаться в классе функций, зависящих от τ, ζ, δ. Упрощенная мажорантная задача имеет вид

$$(4.4)\qquad \begin{gathered} A_\tau=M_1A_\delta+M_2P_\delta+M_3B_\delta+M_4Y_\delta+M_5,\\ P_\tau=M_6B_\tau+M_7A_\delta+M_8P_\delta+M_9B_\delta+M_{10},\\ B_\zeta=M_{11}A_\zeta+\tau(M_{12}B_\tau+M_{13}A_\delta+M_{14}P_\delta+M_{15}B_\delta+M_{16}Y_\delta+\\ +M_{17}),\ \tau Y_\tau+Y=M_{18}P_\zeta+M_{19}A+M_{20}P+M_{21}B+\tau(M_{22}B_\tau+\\ +M_{23}A_\delta+M_{24}P_\delta+M_{25}B_\delta+M_{26}Y_\delta+M_{27}), \end{gathered}$$

$\tau=0$: $A=P=0$, $\zeta=0$: $B=0$, $M_{18}-M_{21}$ не зависят от Y, $M_{11}=1$.

5. Инвариантные мажоранты. Определенную трудность при доказательстве существования аналитических мажорант представляет вырождение последнего уравнения (4.4) по Y при $\tau=0$, в результате чего методы, применяемые в задаче Коши и смешанной задаче, здесь неприменимы.

Выбор мажорант M_i будет осуществлен так, что уравнения (4.4) будут допускать нетривиальную группу растяжений независимых и зависимых переменных. Решение системы (4.4) будет найдено в классе инвариантных [3] относительно растяжения решений. Для любой заданной аналитической функции Φ переменных τ, ζ, δ, A, P, B, Y в окрестности точки $\tau=\zeta=\delta=A=P=B=Y=0$ может быть найдена мажоранта вида

$$M=K[(1-K\zeta)(1-m_1\tau)(1-m_2A)(1-m_3B)(1-m_4P)\times$$
$$\times(1-m_5Y)(1-m_6\delta)]^{-1}$$

за счет выбора постоянных K, m_j достаточно большими. Наряду с M мажорантой Φ будет функция $M_i' = M_0(1 - K\zeta)^{-l_i}$, где

$$M_0 = K\left[\left(1 - m_1\tau(1 - K\zeta)^{-n_1}\right)\left(1 - m_2 A(1 - K\zeta)^{-n_2}\right) \times \right.$$
$$\times \left(1 - m_3 B(1 - K\zeta)^{-n_3}\right)\left(1 - m_4 P(1 - K\zeta)^{-n_4}\right) \times$$
$$\left. \times \left(1 - m_5 Y(1 - K\zeta)^{-n_5}\right)(1 - m_6\delta)\right]^{-1}$$

с целыми $n_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, 5)$, $l_i \geqslant 1$. Это следует из того, что $(1 - K\zeta)^{-n} \gg 1$ при $n \geqslant 0$ ($\gg$ — отношение мажорирования). Выберем постоянные K, m_j так, что функция M является мажорантой всех M_i из (4.4). Теперь если рассмотреть систему вида (4.4) с $M_i' = M_0(1 - K\zeta)^{-l_i}$ для $i \neq 11$; 18; 19; 20; 21, $M_{11}' = (1 - K\zeta)^{-l_{11}}$ $M_i' = M_{00}(1 - K\zeta)^{-l_i}$ для $i = 18$; 19; 21, $M_{20}' = 2KM_{00}(1 - K\zeta)^{-l_{20}}$ $\left(M_{00} = M_0|_{m_5=0}\right)$ с неопределенными пока $n_j \geqslant 0$, $l_i \geqslant 1$, то эта система тоже является мажорантной для исходной задачи. Выбор n_j, l_i осуществляется так, чтобы система (4.4) допускала преобразование растяжения:

$$(1 - K\zeta) \to \varkappa(1 - K\zeta), \quad \tau \to \varkappa^{n_1}\tau, \quad A \to \varkappa^{n_2}A, \quad B \to \varkappa^{n_3}B,$$
$$P \to \varkappa^{n_4}P, \quad Y \to \varkappa^{n_5}Y, \quad \delta \to \delta,$$

где $\varkappa$ — параметр растяжения. Условие инвариантности (4.4) приводит к линейной однородной системе уравнений для показателей l_i с числом уравнений, меньшим числа неизвестных. Одно из решений имеет вид $l_4 = l_5 = l_6 = l_{11} = l_{12} = l_{18} = 1$, $l_{20} = 2$, $l_2 = l_{10} = l_{16} = l_{17} = l_{21} = l_{22} = 3$, $l_3 = l_{19} = 4$, $l_1 = l_8 = l_{14} = l_{26} = l_{27} = 5$, $l_9 = l_{15} = 6$, $l_7 = l_{13} = l_{24} = 7$, $l_{25} = 8$, $l_{23} = 9$. При этом $n_1 = 5$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$, $n_4 = 2$, $n_5 = 0$. Инвариантное относительно указанного растяжения решение ищется в виде

$$A = (1 - K\zeta)^4 A_0(\eta, \delta), \; B = (1 - K\zeta)^3 B_0(\eta, \delta), \; P = (1 - K\zeta)^2 P_0(\eta, \delta), \; Y = Y(\eta, \delta), \; \eta = \tau(1 - K\zeta)^{-5}.$$

Из (4.4) получается система для определения функций A_0, B_0, P_0, Y:

$$A_{0\eta} = M_0(A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1), \; P_{0\eta} = M_0(B_{0\eta} + A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + 1),$$
$$4K\eta B_{0\eta} - 3KB_0 = 5K\eta A_{0\eta} - 4KA_0 + (M_0 - K)\eta B_{0\eta} + M_0\eta(A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1),$$
$$\eta Y_\eta + Y = M_{00}(5K\eta P_{0\eta} + A_0 + B_0) + \eta M_0(B_{0\eta} + A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1). \tag{5.1}$$

Отметим, что $M_0 - K \gg 0$, т. е. является функцией типа мажоранты. Отыскивается решение системы (5.1), обращающееся в нуль при $\eta = 0$. Из последних двух уравнений (5.1) получаются формулы для определения производных B_0 и Y при $\eta = 0$:

$$\frac{\partial^{n+m}B_0}{\partial\eta^n\partial\delta^m} = \frac{5n-4}{4n-3}\frac{\partial^{n+m}A_0}{\partial\eta^n\partial\delta^m} + \frac{n}{4n-3}\frac{\partial^{n-1+m}}{\partial\eta^{n-1}\partial\delta^m}[(M_0 - K)B_{0\eta} + 4M_0(A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1)],$$

$$\frac{\partial^{n+m}Y}{\partial\eta^n\partial\delta^m} = \frac{n}{n+1}\frac{\partial^{n-1+m}}{\partial\eta^{n-1}\partial\delta^m}\left[5KM_{00}P_{0\eta} + \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\eta}M_{00}(A_0 + B_0) + M_0(B_{0\eta} + A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1)\right].$$

Из этих формул следует, что определенные производные неотрицательны, а мажорантными по отношению к последним двум уравнениям (5.1) являются уравнения:

$$B_{0\eta} = (5/4)A_{0\eta} + (M_0 - K)B_{0\eta} + 4M_0(A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1), \tag{5.2}$$

$$Y_\eta = 5KM_{00}P_\eta + \frac{\partial}{\partial\eta}(M_{00}(A_0 + B_0)) + M_0(B_{0\eta} + A_{0\delta} + P_{0\delta} + B_{0\delta} + Y_\delta + 1).$$

Система из уравнений (5.2) и двух первых уравнений (5.1) разрешима относительно производных по η ($M_0 - K$ обращается в нуль при $\eta = \zeta = \delta = A_0 = B_0 = P_0 = Y = 0$). По теореме Коши — Ковалевской эта система имеет аналитическое решение, обращающееся в нуль при $\eta = 0$. Следовательно, доказано существование аналитического решения мажорантной системы такого, что $A = P = B = 0$ при $\tau = 0$, а $B|_{\zeta=0} \gg 0$ (так как $B_0 = 0$ при $\eta = 0$, $B_0 = \eta B_{00}(\eta, \delta)$, где B_{00} — функция типа мажоранты, тогда $B = \tau(1 - K\zeta)^{-2}B_{00}(\eta, \delta) \gg 0$). Тем самым доказано существование аналитического решения задачи (3.3).

6. Переход к переменным $\mathbf{x}$, t. В этом пункте будет доказана однолистность отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau, \xi, \beta, \gamma)$, $t = t(\tau, \beta, \gamma)$ при малых τ ($\tau \neq 0$) в окрестности γ_0. Это дает возможность обратить указанное отображение и получить решение задачи в переменных $\mathbf{x}$, t, аналитическое в этой окрестности, за исключением точек γ_0. Докажем, что при малых τ из равенств $\mathbf{x}(\tau_1, \xi_1, \beta_1, \gamma_1) = \mathbf{x}(\tau_2, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\tau_1 + t_0(\beta_1, \gamma_1) = \tau_2 + t_0(\beta_2, \gamma_2)$ следуют равенства $\tau_1 - \tau_2 = \xi_1 - \xi_2 = \beta_1 - \beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Пусть $\tau_1 \geqslant \tau_2$, $\tau_1 > 0$. В силу (2.1) справедлива формула

$$\mathbf{x}(\tau, \xi, \beta, \gamma) = \mathbf{x}_0(\beta, \gamma) + \int_0^\tau \mathbf{f}(\tau', \xi, \beta, \gamma)\, d\tau'. \tag{6.1}$$

В окрестности γ_0, где $|\mathbf{f}| \leqslant K_1$ (K_1 — положительная постоянная), справедливо неравенство

$$|\mathbf{x}_0(\beta_2, \gamma_2) - \mathbf{x}_0(\beta_1, \gamma_1)| \leqslant K_1(\tau_1 + \tau_2).$$

В силу равенства $\tau_1 - \tau_2 = t_0(\beta_2, \gamma_2) - t_0(\beta_1, \gamma_1)$ и свойств заданного отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\beta, \gamma)$, $t = t_0(\beta, \gamma)$ найдется $K_2 > 0$ такое, что $|\beta_1 - \beta_2| + |\gamma_1 - \gamma_2| \leqslant K_2(\tau_1 + \tau_2)$. Равенство $\mathbf{x}(\tau_1, \xi_1, \beta_1, \gamma_1) = \mathbf{x}(\tau_2, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)$ в силу (6.1) записывается в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_0(\beta_1, \gamma_1) - \mathbf{x}_0(\beta_2, \gamma_2) + (t_0(\beta_2, \gamma_2) - t_0(\beta_1, \gamma_1))\,\mathbf{f}(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2) + \\ + \tau_1(\mathbf{f}(0, \xi_1, \beta_1, \gamma_1) - \mathbf{f}(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)) = \\ = \int_0^{\tau_1} [\mathbf{f}(0, \xi_1, \beta_1, \gamma_1) - \mathbf{f}(\tau', \xi_1, \beta_1, \gamma_1) + \mathbf{f}(\tau', \xi_2, \beta_2, \gamma_2) - \\ - \mathbf{f}(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)]\, d\tau' + \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\mathbf{f}(\tau', \xi_2, \beta_2, \gamma_2) - \mathbf{f}(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)]\, d\tau'.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Из этого соотношения получается неравенство

$$\begin{gathered}|(\mathbf{x}_{0\beta}(\beta_2, \gamma_2) - t_{0\beta}(\beta_2, \gamma_2)\mathbf{f}(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2))(\beta_1 - \beta_2) + (\mathbf{x}_{0\gamma}(\beta_2, \gamma_2) - \\ - t_{0\gamma}(\beta_2, \gamma_2)\,\mathbf{f}(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2)| \leqslant K_3\tau_1(|\xi_1 - \xi_2| + \\ + |\beta_1 - \beta_2| + |\gamma_1 - \gamma_2|),\end{gathered}$$

где положительная постоянная K_3 зависит от K_2, максимумов первых производных $\mathbf{f}$, вторых производных $\mathbf{x}_0$, t_0 в рассматриваемой окрестности. В силу линейной независимости векторов $\mathbf{x}_\beta - t_\beta\mathbf{f}$, $\mathbf{x}_\gamma - t_\gamma\mathbf{f}$ на γ_0 найдутся $\sigma_5 > 0$, $K_4 > 0$ такие, что при $0 < \tau_1 < \sigma_5$

$$|\beta_1 - \beta_2| + |\gamma_1 - \gamma_2| \leqslant K_4\tau_1|\xi_1 - \xi_2|. \tag{6.3}$$

Теперь из соотношения (6.2) следует

$$\mathbf{x}_{0\beta}(\beta_2, \gamma_2)(\beta_1-\beta_2)+\mathbf{x}_{0\gamma}(\beta_2, \gamma_2)(\gamma_1-\gamma_2)+\tau_1\mathbf{f}_1-\tau_2\mathbf{f}_2 = = O\left(\tau_1^2|\xi_1-\xi_2|\right), \tag{6.4}$$

где $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(0, \xi_i, \beta_2, \gamma_2)$. Введем аналог угла Маха α: $\sin|\mathbf{k}|\alpha = |\mathbf{k}|c|\mathbf{v}|^{-1}$, тогда из (2.2) получаются формулы

$$|\mathbf{m}|^{-1}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{m}) = \frac{|\mathbf{v}|^2+2i|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{k}|}\frac{\sin|\mathbf{k}|(\theta+\alpha)}{\cos|\mathbf{k}|\alpha}, \quad (\mathbf{f}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{m})) =$$

$$= |\mathbf{m}|^2 - \frac{|\mathbf{v}|^2+2i|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{v}|}\frac{\cos|\mathbf{k}|(\theta+\alpha)}{\cos|\mathbf{k}|\alpha}\cdot|\mathbf{m}|.$$

Умножая соотношение (6.4) скалярно на $\mathbf{m}$ и $\mathbf{k}\times\mathbf{m}$, с использованием предыдущих формул получаем равенства

$$\frac{1}{|\mathbf{k}|}\frac{\sin|\mathbf{k}|(\theta_1+\alpha_1)}{|\mathbf{v}_1|\cos|\mathbf{k}|\alpha_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\frac{\sin|\mathbf{k}|(\theta_2+\alpha_2)}{|\mathbf{v}_2|\cos|\mathbf{k}|\alpha_2} + O(\tau_1|\xi_1-\xi_2|),$$

$$\frac{\cos|\mathbf{k}|(\theta_1+\alpha_1)}{|\mathbf{v}_1|\cos|\mathbf{k}|\alpha_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{\cos|\mathbf{k}|(\theta_2+\alpha_2)}{|\mathbf{v}_2|\cos|\mathbf{k}|\alpha_2} + O(\tau_1|\xi_1-\xi_2|).$$

Индексы 1 и 2 имеют значения соответствующих функций в точках $(0, \xi_1, \beta_2, \gamma_2)$ и $(0, \xi_2, \beta_2, \gamma_2)$. Из этих равенств следует неравенство

$$|\theta_1+\alpha_1-\theta_2-\alpha_2| \leqslant K_5\tau_1|\xi_1-\xi_2|,$$

где положительная постоянная K_5 выбирается равномерно по $|\mathbf{k}|$. Согласно (3.1), r изменяется строго монотонно по ξ при $\tau=0$. В силу условий нормального газа то же справедливо для $\theta+\alpha$. Поэтому найдется положительное σ_6 такое, что $|\theta_1+\alpha_1-\theta_2-\alpha_2| \geqslant \sigma_6|\xi_1-\xi_2|$. При $0<\tau_1<\min\left(\sigma_5, \sigma_6K_5^{-1}\right)$ из последних неравенств следует, что $\xi_1=\xi_2$, а тогда из (6.3) следуют равенства $\beta_1-\beta_2=\gamma_1-\gamma_2=0$ и $\tau_1=\tau_2$. Однолистность отображения при $\tau\neq 0$ доказана.

Этим завершено доказательство теоремы, сформулированной в п. 2.

Для полного решения задачи о поршне остается построить решение смешанной задачи для уравнений (1.1) с условием непротекания на Γ' и условием непрерывного примыкания к центрированной волне на характеристике Γ_2. Здесь уже выполнены условия согласования граничных данных задачи. Отметим, что полученный результат может быть использован и в задачах описания взаимодействий сильных разрывов. В работе [4] рассмотрен случай, когда поверхность γ_0 лежит в гиперплоскости $t=0$ в E^4. Такие центрированные волны возникают при описании распада произвольного разрыва на криволинейной поверхности [5].

Автор благодарит Л. В. Овсянникова за внимание к работе.

Поступила 23 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. Новосибирск: изд. НГУ, 1967.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений газовой динамики. М.: Наука, 1978.
4. **Тешуков В. М.** Центрированные волны в пространственных течениях газа. — В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 39. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
5. **Тешуков В. М.** Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности. — ПМТФ, 1980, № 2.