УДК 532.525.2

ДЕФОРМАЦИЯ ЖИДКОЙ ЛИНИИ ПРИ СОУДАРЕНИИ СТРУЙ

М. В. Рубцов

(Красноярск)

При изучении соударения металлических пластин, ускоренных взрывом, важное значение имеет исследование пластических деформаций в зоне соударения.

В [1] изложена методика исследований деформации при сварке взрывом в режиме волнообразования, заключающаяся в запрессовке в металлическую пластинку тонкой проволочки. При соударении пластин текущий металл увлекает за собой проволочку, изменение формы последней позволяет судить о характере пластической деформации в зоне соударения. Из исследования деформации проволочек находятся такие важные характеристики, как вязкость металлов.

Изложенная в [1] методика является одним из немногих способов исследования деформации металлов при высокоскоростных соударениях. Трудности исследования связаны с малыми временами протекания процесса и высокими давлениями, развивающимися при взрыве и разрушающими экспериментальную установку. В [1] из анализа вязкого течения при соударении пластин выведена зависимость смещения проволочки от расстояния до границы раздела материалов, описываемая параболой. Отмечается, что вблизи границы раздела теоретические и экспериментальные результаты существенно отличаются. Представляется важным сделать попытку теоретического анализа деформации проволочки, если при соударении металлических пластин образуется струя и граница раздела материалов является ровной. Течение в этом случае сильно отличается от течения в режиме волнообразования [2], и вблизи границы раздела форма проволочки не может описываться параболической зависимостью, вероятно, эта зависимость будет экспоненциальной. Для описания течения с образованием струи в [3] привлекается модель идеальной жидкости. Поскольку анализ соударения вязких струй со свободной границей связан с серьезными трудностями, в первом приближении целесообразно рассмотреть задачу о деформации жидкой линии при соударении идеальных струй [4].

1. Пусть имеется область пространства, занятая плоским стационарным потоком идеальной жидкости, и в момент времени t_0 выделен объем жидкости, ограниченный замкнутой кривой линией

$$f_0(z_0) = c, \tag{1.1}$$

где z_0 — комплексная координата; c — комплексная постоянная. С течением времени выделенный жидкий объем будет изменять свою форму, перемещаясь вместе с потоком как целое. Поставим задачу о нахождении формы жидкого объема в некоторый момент времени t. Координата отдельной лагранжевой частицы при движении удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(t) = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \overline{\zeta}(z(t))\, dt, \tag{1.2}$$

где $\zeta(z)$ — комплексно-сопряженная скорость, определяемая через комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$,

$$dw/dz = \zeta. \tag{1.3}$$

Назовем жидкой линией $f(z, t)$ границу объема. Используя (1.2), запишем

$$f(z, t) = f_0\left(z - \int_{t_0}^{t} \bar{\zeta}(z)\, dt\right) = c. \tag{1.4}$$

Записанное в общем виде выражение (1.4) для формы жидкого объема в момент времени t невозможно использовать при решении конкретных задач. Это связано с тем обстоятельством, что при заданном виде функции $f_0(z_0)$ можно выписать функцию $f(z, t)$, когда решено интегральное уравнение (1.2). Решение же (1.1) возможно не при всякой функции $\bar{\zeta}(z)$, и сама функция $\bar{\zeta}(z)$ выписывается в явном виде только для простейших случаев стационарных течений.

Более удобно рассматривать движение жидкого объема в плоскости w. Поскольку $w(z)$ — аналитическая функция, занятая жидким объемом, область физической плоскости соответствует некоторой области в плоскости w, ограниченной замкнутой кривой $f(z(w), t) = F(w, t) = c$, и движение в физической плоскости сопровождается движением в плоскости w.

Представим границу $F(w, t) = c$ состоящей из нескольких однозначных кривых линий $\Phi_i(\psi)$. Очевидно, что для решения задачи о нахождении формы жидкого объема достаточно уметь определять форму произвольной однозначной жидкой линии $\Phi(\psi)$ в произвольный момент времени и знать закон преобразования $z(w)$. В дальнейшем везде, вплоть до конечного результата, обсуждается задача о деформации жидкой линии, так как составить замкнутый объем из нескольких однозначных линий $\Phi_i(\psi)$ не представляет трудности.

Определим скорость лагранжевой частицы в плоскости w

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt} = |\zeta(\varphi, \psi)|^2 = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{1.5}$$

откуда следует, что движение в плоскости w проходит по прямым горизонтальным линиям и вначале однозначная функция $\Phi(\psi)$ при движении остается однозначной.

Введем функцию $\xi = \omega - i\theta$, согласно условию $\xi = \ln \zeta$. Так как $w(\xi)$ — аналитическая функция, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial\omega}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{1.6}$$

Выведем уравнение, описывающее изменение производной $d\Phi(\psi)/d\psi$ при движении. Дифференцируя (1.5) по ψ, можно получить уравнение

$$\frac{d}{d\psi}\frac{d\Phi(\psi)}{dt} = 2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\frac{d\Phi}{d\psi} + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\right)e^{2\omega}.$$

Изменив в левой части уравнения порядок дифференцирования, подставив $e^{2\omega}d/d\varphi$ вместо d/dt и обозначив $d\Phi(\psi)/d\psi$ через $\delta(\varphi)$, придем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\delta(\varphi)}{d\varphi} = 2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\delta(\varphi) + \frac{\partial\omega}{\partial\psi}\right). \tag{1.7}$$

Решение (1.7) методом вариации постоянных дает выражение

$$\delta(\varphi) - \delta(\varphi_0) = 2e^{2\omega}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial\omega}{\partial\psi} e^{-2\omega} d\varphi. \tag{1.8}$$

Ввиду того, что по известной производной всегда можно восстановить искомую функцию, (1.8) в принципе дает ответ на поставленную задачу о нахождении формы жидкой линии в процессе движения. Результат (1.8) применим для любого плоского потенциального течения идеальной жидкости, когда аналитическая функция $w(\xi)$ задает взаимно-однозначное отображение областей течения в плоскостях w и ξ.

2. В случае движения в бесконечных пределах при соударении струй, используя (1.3), (1.8), можно написать

$$\varphi_0 = -\infty, \ \varphi = \infty, \ e^{2\omega(\pm\infty, \psi)} \equiv V^2.$$

Тогда

$$\delta(\infty) = \delta(-\infty) + 2V^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\omega}{\partial\psi} e^{-2\omega} d\varphi. \tag{2.1}$$

Из (2.1) получается выражение для конечной формы жидкой линии

$$\Phi(\psi)_{\infty} = \Phi(\psi)_{-\infty} + 2V^2 \int_{\psi_0}^{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\omega}{\partial\psi} e^{-2\omega} d\varphi d\psi \tag{2.2}$$

при условии $\Phi(\psi_0)_{-\infty} = 0$($\psi_0$ — значение функции тока на свободной границе).

Для практического исследования (2.2) удобно перейти в (2.1) к интегрированию в плоскости (ω, θ). Так как интегрирование в (2.1) ведется при $\psi = \text{const}$, то

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} d\omega + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta = 0$$

и

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{\partial\psi/\partial\theta}{\partial\psi/\partial\omega}. \tag{2.3}$$

Выражение для $d\varphi$ получим в виде

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\left(\frac{d\omega}{d\theta}\frac{\partial\varphi/\partial\omega}{\partial\varphi/\partial\theta} + 1\right) d\theta,$$

а с учетом (1.6), (2.3) получим окончательно

$$d\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial\omega}\left(1 + \left(\frac{d\omega}{d\theta}\right)^2\right) d\theta. \tag{2.4}$$

Используя якобиан преобразования, найдем значение $\dfrac{\partial\omega}{\partial\psi}\dfrac{\partial\psi}{\partial\omega}$

$$\frac{\partial(\omega, \varphi)}{\partial(\psi, \varphi)} \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(\omega, \theta)} = \frac{\partial(\omega, \theta)}{\partial(\psi, \varphi)} \frac{\partial(\omega, \varphi)}{\partial(\omega, \theta)} \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(\omega, \theta)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\theta, \omega)}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)^2,$$

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\theta, \omega)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega} & \dfrac{\partial\psi}{\partial\omega} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{d\omega}{d\theta}\right)^2\right),$$

откуда

$$\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{d\omega}{d\theta}\right)^2}. \tag{2,5}$$

Подставляя (2.4) в (2.1) и принимая во внимание (2.5), получим

$$\delta(\infty) = \delta(-\infty) + 2V^2 \int\limits_{\theta(\psi)} e^{-2\omega} d\theta, \tag{2.6}$$

где $\theta(\psi)$ — траектория частицы в плоскости $(\omega,\ \theta)$. Зависимость $\Phi(\psi)_\infty$ теперь будет выглядеть как

$$\Phi(\psi)_\infty = \Phi(\psi)_{-\infty} + 2V^2 \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \int\limits_{\theta(\psi)} e^{-2\omega} d\theta d\psi. \tag{2.7}$$

Рассмотрим конкретный пример, когда имеется стационарное симметричное течение с критической точкой при соударении двух струй одинаковой толщины плотности и скорости (фиг. 1). Для стационарного течения с критической точкой решена задача о нахождении поля скоростей в области течения [5]. Решение записывается в виде

$$w = \frac{V}{\pi}\left\{h_1 \ln\left(1 - \frac{\zeta}{a_1}\right) + h_2 \ln\left(1 - \frac{\zeta}{a_2}\right) - k_1 \ln\left(1 - \frac{\zeta}{b_1}\right) - k_2 \ln\left(1 - \frac{\zeta}{b_2}\right)\right\},$$

$$z = \frac{V}{\pi}\left\{\frac{h_1}{a_1} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{a_1}\right) + \frac{h_2}{a_2} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{a_2}\right) - \frac{k_1}{b_1} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{b_1}\right) - \frac{k_2}{b_2} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{b_2}\right)\right\}, \tag{2.8}$$

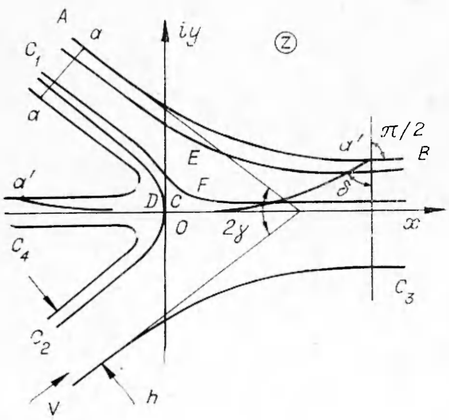
где h_1, h_2, a_1, a_2 — толщина набегающих струй на бесконечности; k_1, k_2, b_1, b_2 — то же самое для расходящихся струй. В рассмотренном конкретном примере нужно положить

$$h_1 = h,\ a_1 = Ve^{i\gamma},\ h_2 = h,\ a_2 = Ve^{-i\gamma},$$
$$k_1 = h(1 + \cos\gamma),\ b_1 = V,\ k_2 = h(1 - \cos\gamma),\ b_2 = Ve^{i\pi}, \tag{2.9}$$

где γ — половинный угол соударения; V — модуль скорости струй на бесконечности.

Пусть в одной из струй, например в струе C_1, замечена первоначально прямая жидкая линия $a - a$ (см. фиг. 1), перпендикулярная свободным границам. Это означает, что в (2.7) член $\Phi(\psi)_{-\infty} = 0$. По мере движения линия $a - a$ будет деформироваться, часть ее уйдет в струю C_3, а часть в C_4. При удалении на бесконечность части линии, ушедшие в расходящиеся струи, примут определенную форму. Проведем расчет конечной формы линии, ушедшей, например, в струю C_3.

В плоскости комплексного потенциала жидкая линия будет двигаться в полосе $-hV(1 - \cos\gamma)/2 \leqslant \psi \leqslant hV(1 + \cos\gamma)/2$ с разрезом вдоль положительной полуоси $\psi = 0$ по линиям $\psi = \mathrm{const}$. Согласно (1.4), (1.5), линия $a - a$ при $\varphi = -\infty$ изображается вертикальной линией $\varphi = \mathrm{const}$ и движется со скоростью V^2 в положительном направлении, а форма ее в плоскости w совпадает с формой в плоскости z с точностью до нормировочной постоянной. Если



Фиг. 1

скорость ζ в любой точке области течения принять равной $Vve^{-i\theta}$, то относительная скорость v в любой точке (φ, ψ) определяется из системы уравнений

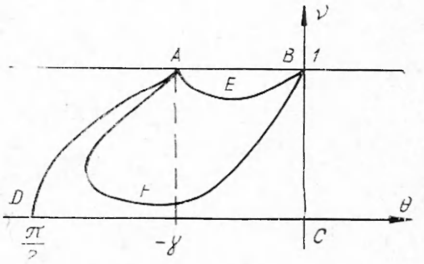
$$(2.10)\quad \frac{2\pi\varphi}{hV} = \ln(1 - 2v\cos(\gamma - \theta) + v^2) + \ln(1 - 2v\cos(\gamma + \theta) + v^2) -$$
$$- (1 + \cos\gamma)\ln(1 - 2v\cos\theta + v^2) - (1 - \cos\gamma)\ln(1 + 2v\cos\theta + v^2),$$
$$\frac{\pi\psi}{hV} = \operatorname{arctg}\frac{v\sin(\gamma + \theta)}{1 - v\cos(\gamma + \theta)} - \operatorname{arctg}\frac{v\sin(\gamma - \theta)}{1 - v\cos(\gamma - \theta)} -$$
$$- (1 + \cos\gamma)\operatorname{arctg}\frac{v\sin\theta}{1 - v\cos\theta} + (1 - \cos\gamma)\operatorname{arctg}\frac{v\sin\theta}{1 + v\cos\theta}.$$

Система (2.10) получается из первого уравнения системы (2.8) разделением действительных и мнимых частей с использованием условий (2.9). В конкретном случае симметричного соударения в (2.6) удобнее перейти к интегрированию в плоскости (v, θ).

Так как $e^{2\omega} = V^2 v^2$, то выражение (2.6) примет вид

$$(2.11)\qquad \delta(\infty) = 2\int\limits_{\Theta(\psi)} \frac{d\theta}{v^2}.$$

Можно представить траекторию $\Theta(\psi)$ в плоскости (v, θ). На свободной границе $v = 1$, а $0 \geqslant \theta \geqslant -\gamma$, поэтому свободная граница представляется отрезком AB на фиг. 2. На близкой к свободной линии тока $v < 1$ всюду, за исключением точек $\varphi = \pm\infty$, а θ непрерывно увеличивается от $-\gamma$ до 0, поэтому близкая к свободной границе линия тока будет представляться кривой AEB. На нулевой линии тока в промежутке $-\infty < \varphi \leqslant 0$ происходит уменьшение угла θ от $-\gamma$ до $-\pi/2$ с одновременным уменьшением v от 1 до 0. Эта часть линии $\psi = 0$ представлена кривой AD на фиг. 2. Далее в точке O на физической плоскости происходит разворот вектора скорости на величину $\pi/2$ $(-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 0)$ при $v = 0$, затем возрастание v от 0 до 1 при $\theta = 0$. Эта часть нулевой линии тока представлена двумя отрезками DC и CB в плоскости (v, θ). Близкая к линии $\psi = 0$ линия тока изобразится кривой AFB. Таким образом, любая траектория $\Theta(\psi)$ в плоскости (v, θ) изображается кривой с концами в точках A и B, лежащей в криволинейной трапеции $ABCD$.



Фиг. 2

Для формы жидкой линии с учетом (2.11) получим

$$(2.12)\qquad \Phi(\psi)_{\infty}^{-} = 2\int\limits_{\psi_0}^{\psi}\int\limits_{\Theta(\psi)} \frac{d\theta}{v^2}\,d\psi.$$

Из (2.11) следует, что жидкая линия не перпендикулярна к свободной границе на бесконечности в струе C_3:

$$\left.\frac{d\Phi}{d\psi}\right|_{\psi=\psi_0} = 2\int\limits_{-\gamma}^{0} d\theta = 2\gamma$$

или

(2.13) $$\delta = \operatorname{arctg} 2\gamma,$$

где δ — угол между перпендикуляром к свободной границе и жидкой линией a'.

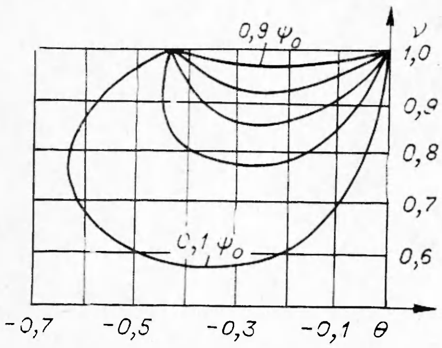
В частности, для угла соударения $\gamma = \pi/2$

$$\delta = \operatorname{arctg} \pi \approx 72°,$$

а для пробивания струей безграничной жидкости

$$\delta = \operatorname{arctg} 2\pi = 81°.$$

Для построения формы жидкой линии при $2\gamma = 40, 50, 60°$ проводился численный счет интеграла (2.12). Рассчитывался массив значений интеграла (2.11), затем строилась зависимость (2.12) по формуле трапеций. Вычисление интеграла (2.11) начиналось из точки $\nu = 1$, $\theta = -\gamma$. Из анализа второго уравнения системы (2.10) следует, что $d\nu/d\theta$ в точке A (см. фиг. 2) определяется как



Фиг. 3

(2.14) $$d\nu/d\theta = \operatorname{ctg} \pi(\psi/hV + \cos\gamma/2).$$

С помощью (2.14) находились значения $\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu$, $\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta$ и вычислялись производные $\partial\psi/\partial\nu$, $\partial\psi/\partial\theta$, согласно формулам

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{hV}{\pi}\left(\frac{\sin(\theta+\gamma)}{1-2\nu\cos(\theta+\gamma)+\nu^2} + \frac{\sin(\theta-\gamma)}{1-2\nu\cos(\theta-\gamma)+\nu^2} - \right.$$
$$\left. -(1+\cos\gamma)\frac{\sin\theta}{1-2\nu\cos\theta+\nu^2} + (1-\cos\gamma)\frac{\sin\theta}{1+2\nu\cos\theta+\nu^2}\right),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{hV}{\pi}\nu\left(\frac{\nu-\cos(\theta+\gamma)}{1-2\nu\cos(\theta+\gamma)+\nu^2} + \frac{\nu-\cos(\theta-\gamma)}{1-2\nu\cos(\theta-\gamma)+\nu^2} - \right.$$
$$\left. -(1+\cos\gamma)\frac{\nu-\cos\theta}{1-2\nu\cos\theta+\nu^2} - (1-\cos\gamma)\frac{\nu+\cos\theta}{1+2\nu\cos\theta+\nu^2}\right),$$

и величина ψ по второму уравнению системы (2.10). Если $|d\nu/d\theta|$, определяемая из

$$\frac{d\nu}{d\theta} = -\frac{\partial\psi/\partial\theta}{\partial\psi/\partial\nu},$$

оказывалась больше 1, то счет велся по формуле

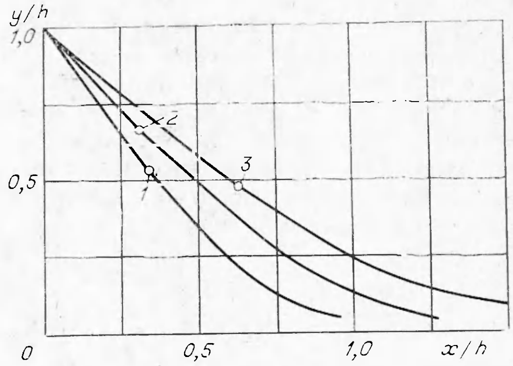
$$\delta(\infty) = 2\int\limits_{\theta(\psi)} \frac{d\nu}{\nu^2 \frac{d\nu}{d\theta}}$$

с постоянным шагом $\Delta\nu = d$, а величина

$$\Delta\theta = \Delta\nu \Big/ \frac{d\nu}{d\theta}.$$

В обратном случае счет велся по формуле (2.11) с постоянным шагом $\Delta\theta = d$ при $\Delta\nu = \Delta\theta d\nu/d\theta$. Шаг d изменялся от 0,01 до 0,005. Если отклонение $|\psi - \psi^0|$ (ψ^0 — заданная линия тока) оказывалось немалым, то при $|d\nu/d\theta| > 1$ находился корень уравнения $|\psi(\nu, \theta)| = \psi^0$ методом Ньютона при $\nu = \mathrm{const}$, а при $|d\nu/d\theta| < 1$ находился корень при $\theta = \mathrm{const}$. Массив значений интеграла (2.11) изменялся от 9 до 19.

Рассчитанные описанным методом траектории $\Theta(\psi)$ для $2\gamma = 50°$ приведены на фиг. 3, где изображены 5 кривых $\Theta(\psi)$ со значениями от 0,9 ψ_0 до 0,1 ψ_0 с шагом 0, $2\psi_0$. На фиг. 4 показана форма жидкой линии, рассчитанная по (2.12) для углов $2\gamma = 40$, 50, 60° (кривые *1—3* соответственно).



Ф и г. 4

Как видно из результатов вычислений, жидкая линия после прохождения области соударения оказывается не перпендикулярной к свободной поверхности, что находится в согласии с (2.13). Вблизи границы раздела линия $\Phi(\psi)$ (или, что то же самое, $x(y)$) асимптотически приближается к оси $\psi = 0$ ($y = 0$). Из сравнения полученных результатов с экспериментом, вероятно, приближенно можно судить, в какой области реального течения состояние материала близко к состоянию невязкой несжимаемой жидкости.

Автор выражает благодарность Н. С. Козину и В. В. Ефремову за ряд ценных замечаний при обсуждении работы, Н. М. Максимовой за помощь в проведении численного счета.

Поступила 29 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К., Дерибас А. А., Захаренко И. Д., Мали В. И.** Исследования вязкости металлов при высокоскоростных соударениях.— ФГВ, 1971, т. 7, № 1.
2. **Дерибас А. А.** Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск, «Наука», 1972.
3. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принципы его работы.—«Усп. мат. наук», 1957, т. 12, вып. 4.
4. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
5. **Милн-Томсон.** Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.