

УДК 532.526

РЕШЕНИЯ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ЛАМИНАРНЫХ ФАКЕЛОВ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

П. С. Фарруджа, А. Микалеф

Университет Мальты, MSD2080 Мсида, Мальта

E-mails: pierre-sandre.farrugia@um.edu.mt, alfred.micallef@um.edu.mt

Решена задача о точечных и линейных ламинарных тепловых факелах при естественной конвекции. С использованием степенных рядов получены рекуррентные соотношения, которые вместе с начальными условиями представляют собой решения уравнений пограничного слоя в замкнутом виде для любого числа Прандтля, существующие в области сходимости рядов. Начальные условия определяются максимальными значениями температуры и скорости. Эти значения, а также значение радиуса сходимости ряда получены численно при различных числах Прандтля, предложены функции их наилучшего приближения. Проведено сравнение полученных решений с известными решениями в замкнутом виде, подтвердившее справедливость предложенного подхода. Установлено, что область применимости уравнений не распространяется на бесконечность, однако проведенные тесты показывают, что при использовании преобразования Эйлера область сходимости может быть расширена. В случае точечных источников тепла показано, что для всех чисел Прандтля ближайшая к нулю особая точка находится в комплексной плоскости и, следовательно, решение в ней не имеет физического смысла.

Ключевые слова: тепловые факелы, степенные ряды, рекуррентные соотношения, естественная конвекция.

Введение. Исследование ламинарной свободной конвекции в случаях точечного и линейного источников тепла имеет большое значение. В [1–4] отмечено, что первой работой, посвященной изучению тепловых факелов, является работа [5]. В [5] показано, что факелы развиваются самоподобным способом, а скорость и температура записываются через безразмерные функции, которые могут быть определены из системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. В [6] с использованием подобного подхода получены и численно решены при числе Прандтля $Pr = 0,7$ два связанных дифференциальных уравнения. Аналогичные подходы применялись в других работах для получения решения в замкнутой форме при $Pr = 5/9$; 2 в случае линейных источников [7–10] и $Pr = 1, 2$ в случае точечных источников [9–11]. Для точечных источников функциональная зависимость параметров течения от расстояния от источника исследована в [12]. Случай линейных источников при бесконечном Pr рассмотрен в [13, 14]. В работе [14] исследована также система при $Pr \approx 0$. Осесимметричные факелы, развивающиеся в области больших значений Pr , изучены в [15], в [16, 17] рассмотрена область небольших чисел Грасгофа в случае линейных и точечных источников тепла соответственно.

Ограниченность результатов обусловлена тем, что при больших значениях Pr необходимо использовать численные методы для определения профилей скорости и температуры

Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского фонда регионального развития (проект ERDF-080 “Лаборатория супервычислений университета Мальты”).

факелов [8. P. 75]. В [2, 9, 10] с помощью численных методов получены профили для различных чисел Прандтля. Однако расчеты с использованием данного подхода являются трудоемкими, что не позволяет применять его для любых чисел Прандтля.

Для решения рассматриваемой задачи использовались различные методы приближенных вычислений. В [3] с помощью переменной подобия рассмотрено координатное разложение в случае линейных источников и выведено несколько первых членов ряда. В [18] построены приближенные решения в замкнутом виде для осесимметричного случая. В [4] получено разложение возмущения по Pr в замкнутом виде в окрестности известного решения в случае как линейного, так и точечного источников тепла.

Целью данной работы является получение полных решений с помощью разложения в виде степенного ряда по переменной подобия. Используемый метод впервые применен в классической работе [19] при исследовании потока вблизи пластины и цилиндра. Однако в случае плавучих факелов этот метод использовался только в работе [3]. В данной работе показано, что предлагаемый подход позволяет получить решение в замкнутой форме в области, где ряд сходится. Единственным условием построения разложения в ряд является наличие максимумов безразмерных значений температуры и скорости. Эти значения получены численно при различных значениях Pr , кроме того, предложены функции их наилучшего приближения.

1. Случай линейного источника. Ниже приведены результаты решения задачи о естественной конвекции в случае линейного источника.

1.1. *Вывод степенных рядов.* В случае ламинарного линейного источника при наличии естественной конвекции для приведения уравнений задачи к обыкновенным дифференциальным уравнениям применяются различные способы анализа подобия [2, 3, 7, 9, 10]. При наиболее общем анализе не используются точные зависимости параметров течения от расстояния от источника, но используется некоторое ограничение, чтобы определить их [2, 7, 10]. Тем не менее подход, применяемый в данной работе, аналогичен подходу, примененному в работе [9], в которой зависимость решения от вертикальной координаты полагается известной.

В выбранной системе координат ось z направлена вертикально вверх, ось y — вдоль линейного источника, ось x — перпендикулярно осям y, z . В этом случае уравнения пограничного слоя имеют вид [9]

$$\frac{\partial u_L}{\partial x} + \frac{\partial w_L}{\partial z} = 0; \tag{1}$$

$$u_L \frac{\partial w_L}{\partial x} + w_L \frac{\partial w_L}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} + \theta_L \beta g; \tag{2}$$

$$u_L \frac{\partial \theta_L}{\partial x} + w_L \frac{\partial \theta_L}{\partial z} = \kappa \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где w, u — компоненты скорости вдоль осей z, x соответственно; g — ускорение свободного падения; β — коэффициент объемного теплового расширения; κ — температуропроводность; ν — кинематическая вязкость жидкости; θ — превышение температуры над температурой в дальней области; нижним индексом L отмечены величины, соответствующие линейному источнику.

Интегрируя уравнения импульса (2) и энергии (3), получаем соответственно интегральные равенства [9]

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_L^2 dx = g\beta \int_0^z \int_{-\infty}^{\infty} \theta_L dx dz, \quad Q_L = \int_{-\infty}^{\infty} c_p \rho w_L \theta_L dx,$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; ρ — плотность на бесконечности; Q_L — теплота, выделяющаяся из источника единичной длины в единицу времени.

Граничные условия имеют вид

$$x = 0: \quad u_L = \frac{\partial w_L}{\partial x} = \frac{\partial \theta_L}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty: \quad w_L \rightarrow 0, \quad \theta_L \rightarrow 0.$$

Эти условия следуют из требования симметрии и условия затухания возмущения на границе пограничного слоя.

Переменная подобия определяется формулой

$$\eta_L = \text{Gr}_{Lz}^{1/5} \frac{x}{z},$$

где Gr_{Lz} — число Грасгофа, в случае линейного источника зависящее от расстояния от источника z :

$$\text{Gr}_{Lz} = \frac{g\beta Q_L z^3}{\rho c_p \nu^3}.$$

Это позволяет принять для функции тока ψ и температурного превышения следующие зависимости от переменной подобия:

$$\psi_L = \nu \text{Gr}_{Lz}^{1/5} f_L(\eta_L), \quad \theta_L = \frac{1}{\text{Gr}_{Lz}^{1/5}} \frac{Q_L}{c_p \rho \nu} h_L(\eta_L), \quad (4)$$

где f, h — функции ψ, θ соответственно в безразмерной форме (далее — функции скорости и температуры). Подставляя уравнения (4) в (2), (3), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

$$5h_L - f_L'^2 + 3f_L f_L'' + 5f_L''' = 0; \quad (5)$$

$$3\text{Pr}(f_L h_L)' + 5h_L'' = 0, \quad (6)$$

где штрихи обозначают производные по переменной подобия. Уравнение неразрывности (1) автоматически выполняется в силу соотношений между ψ и скоростями

$$\frac{\partial \psi_L}{\partial x} = w_L, \quad \frac{\partial \psi_L}{\partial z} = -u_L.$$

Безразмерное уравнение энергии (6) может быть упрощено путем однократного интегрирования с использованием граничных условий [2]:

$$3\text{Pr}(f_L h_L) + 5h_L' = 0. \quad (7)$$

В новой параметризации граничные условия и интегральные ограничения записываются в виде

$$\eta_L = 0: \quad f_L = f_L'' = h_L' = 0, \quad \eta_L \rightarrow \pm\infty: \quad f_L' \rightarrow 0, \quad h_L \rightarrow 0; \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_L' h_L d\eta_L = 1; \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_L'^2 d\eta_L = \frac{5}{4} \int_{-\infty}^{\infty} h_L d\eta_L. \quad (10)$$

Найдем решение в виде степенных рядов. Эти ряды можно выбрать в следующем виде:

$$f_L = \eta_L^n \sum_{i=0}^{\infty} a_i \eta_L^i, \quad h_L = \eta_L^m \sum_{i=0}^{\infty} b_i \eta_L^i.$$

Однако, как показано в [3], вычисления можно упростить, если предварительно провести некоторый анализ. Из соотношения между θ_L и h_L (4) следует, что $h_L(0) > 0$, т. е. $m = 0$. Из уравнения (4) также следует, что h_L , так же как и θ , является четной функцией η_L . Рассматривая разложения f_L с учетом выражения $w_L = \nu \text{Gr}_{Lz}^{2/5} z^{-1} f'_L$, можно сделать вывод, что функция f'_L , так же как и w_L , является четной, следовательно, f_L — нечетная функция. Кроме того, так как $w_L(0) > 0$, то $f_L(0) > 0$ и $n = 0$. Следовательно, разложения f_L и h_L могут быть записаны в виде

$$f_L = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} \eta_L^{2i+1}, \quad h_L = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i} \eta_L^{2i}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (5), (7) и используя равенство Коши

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \eta^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \eta^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) \eta^i, \quad (12)$$

получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$a_{2i+3} = - \frac{b_{2i} + \frac{1}{5} \sum_{j=0}^i a_{2j+1} a_{2i-2j+1} (2i - 2j + 1) (6i - 8j - 1)}{(2i + 3)(2i + 2)(2i + 1)}, \quad (13)$$

$$b_{2i+2} = - \frac{3 \text{Pr}}{10(i + 1)} \sum_{j=0}^i a_{2i-2j+1} b_{2j}.$$

При выводе соотношений (13) использовалось математическое программное обеспечение *Mathima* (версия 5.23.1).

Для начала итераций необходимы начальные условия

$$a_1 = f'_L(0), \quad b_0 = h_L(0).$$

Эти условия определяются максимальными значениями вертикальной составляющей скорости и температуры.

1.2. *Анализ результатов.* Выбрав пробную функцию в виде $A \text{th}(B\eta_L)$, подставив ее в (5), (7) и найдя A, B, Pr с использованием условия нормировки (9), можно получить решения в замкнутой форме для некоторых значений Pr . Эти решения приведены в табл. 1 [7, 9, 10]. С помощью математического программного обеспечения *Mathematica* (версия 7.0) результаты, полученные с использованием рекуррентных соотношений (13), сравнивались с результатами, полученными путем разложения в ряд Тейлора решений в замкнутой форме. Установлено, что в обоих решениях первые 500 членов, вычисленные таким образом, совпадают.

С использованием графиков К. Домба и М. Ф. Сайкса, на которых представлены зависимости a_{n+1}/a_n и b_{n+1}/b_n от n^{-1} , проведено исследование расходимости рядов [20–23]. Эти зависимости приведены на рис. 1 для случая $\text{Pr} = 2$. С использованием линейной регрессии можно показать, что при $\text{Pr} = 2$ ряд расходится в окрестности значения $\eta_L = (80/81)^{1/5} \pi$, а при $\text{Pr} = 5/9$ — в окрестности значения $\eta_L = (24/5)^{1/5} \pi$. Эти значения соответствуют значениям, полученным из точных решений с учетом того, что разложения в ряд Тейлора $\text{th} \eta$ и $\text{sh} \eta$ сходятся, только если аргумент меньше $\pi/2$.

Из рис. 1 следует, что в случае $\text{Pr} = 2$ особые точки решения находятся в комплексной плоскости, поэтому решения в этих точках не имеют физического смысла [21]. Кроме того, поскольку при $n \rightarrow \infty$ зависимость стремится к линейной, поведение решения определяется

Таблица 1

Аналитические решения, полученные для скорости и температурных функций при некоторых значениях числа Прандтля в случае ламинарного линейного источника тепла

Pr	f_L	h_L
$\frac{5}{9}$	$\frac{3^{4/5} \cdot 5^{1/5}}{2^{3/5}} \operatorname{th} \left(\frac{5^{1/5} \eta_L}{2 \cdot 2^{3/5} \cdot 3^{1/5}} \right)$	$\frac{3^{1/5}}{2 \cdot 2^{2/5} \cdot 5^{1/5}} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{5^{1/5} \eta_L}{2 \cdot 2^{3/5} \cdot 3^{1/5}} \right)$
2	$\frac{5^{4/5}}{2^{4/5} \cdot 3^{1/5}} \operatorname{th} \left(\frac{3^{4/5} \eta_L}{2 \cdot 2^{4/5} \cdot 5^{1/5}} \right)$	$\frac{3}{8} \left(\frac{15}{2} \right)^{1/5} \operatorname{sh}^4 \left(\frac{3^{4/5} \eta_L}{2 \cdot 2^{4/5} \cdot 5^{1/5}} \right)$

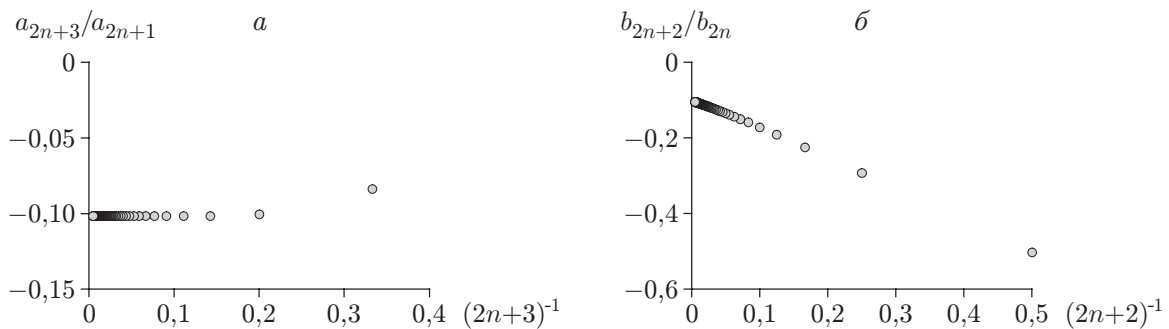


Рис. 1. Графики К. Домба и М. Ф. Сайкса для степенных рядов функций скорости (а) и температуры (б) в случае линейного источника при $Pr = 2$

главной особенностью. Следовательно, сходимость ряда может быть улучшена с помощью преобразования Эйлера [22], которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varepsilon_L = \frac{\eta_L}{\sqrt{\eta_{L,sing}^2 + \eta_L^2}} \quad (14)$$

(нижним индексом *sing* отмечено значение η , при котором ряд является сингулярным и расходится).

На рис. 2, а, б показаны графики К. Домба и М. Ф. Сайкса для коэффициентов A_i и B_i рядов, полученных с помощью преобразования Эйлера при $Pr = 2$. Неупорядоченное распределение точек на рис. 2, а, б свидетельствует о том, что поведение двух новых рядов непредсказуемо. Проверка показала, что начиная с некоторого момента члены высшего порядка расходятся. В [22] отмечено, что в таких случаях желательно эти члены отбросить. На рис. 2, в, г показаны зависимости f_L и h_L от η_L при $Pr = 2$, полученные с использованием первых 25 членов разложения в ряд. Видно, что результаты, полученные с помощью обрезанного эйлера ряда, в основном мажорируются решением в замкнутой форме. Установлено, что относительная погрешность между решением в замкнутой форме и обрезанным степенным рядом Эйлера незначительна. Исключением являются значения $h_L < 10^{-4}$.

Для функций $\operatorname{th} \eta$ и $\operatorname{sh} \eta$ при использовании параметра разложения $e^{-\eta_L}$ ряд сходится при всех значениях η_L [24], но для некоторых рассматриваемых ОДУ прямое разложение по показательным функциям невозможно, так как граничное условие $f_L(0) = 0$ не выполняется. Однако можно разложить функции $\operatorname{th} \eta$ и $\operatorname{sh} \eta$ по параметру $1 - e^{-\eta_L}$. Это обеспечит выполнение граничного условия независимо от числа использованных членов. Результаты, полученные при такой параметризации для $Pr = 2$, показывают, что ряд будет сходиться при всех возможных значениях η . Однако, поскольку никаких других ре-

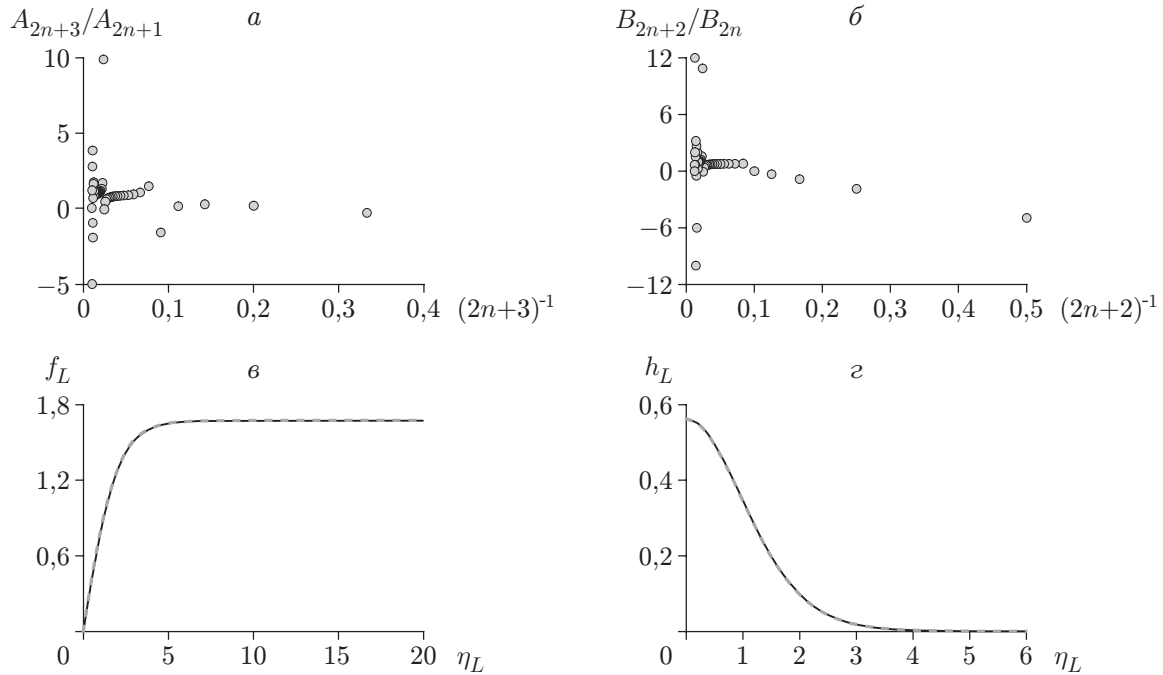


Рис. 2. Графики К. Домба и М. Ф. Сайкса для эйлеризованных степенных рядов для f_L (а) и h_L (б) и зависимости $f_L(\eta_L)$ (в) и $h_L(\eta_L)$ (г) в случае линейного источника при $Pr = 2$:

сплошная линия — решение в замкнутой форме, штриховая — решение, полученное с помощью обрезанных эйлеризованных рядов

шений в замкнутой форме, включающих функции $\text{th } \eta$ и $\text{sh } \eta$, не было получено, в данной работе использовались преобразования Эйлера.

Построение решения с использованием рекуррентных соотношений (13) возможно, только если известны значения Pr , a_1 , b_0 . Поэтому дальнейший анализ проводился с помощью численных методов. Прежде всего нужно было определить значения a_1 и b_0 при $0,01 \leq Pr \leq 100,00$. Поскольку радиус сходимости полученного ряда конечен, начальные условия не могли быть получены путем прямого интегрирования разложения степенного ряда. Поэтому они были определены численно.

Использовался алгоритм, предложенный в [9]. Связанные ОДУ (5), (7) решались при постоянном значении $h_L(0)$, в то время как значение $f'_L(0)$ изменялось до тех пор, пока не было выполнено условие (10). Затем проверялось соответствие возможных решений граничным условиям (8). Результаты показали, что допустимы два численных решения. В одном из этих решений скорость стремится к нулю из области отрицательных значений (снизу), а в другом — из области положительных значений (сверху). Первое решение обеспечивало стремление к нулю на границе пограничного слоя и горизонтальной, и вертикальной скоростей, в то время как во втором решении только вертикальная скорость обращается в нуль в этой области [25]. Поскольку экспериментальные данные о том, что значение w_L должно быть отрицательным на любой стадии, отсутствуют, было сохранено только решение, в котором вертикальная скорость стремится к нулю сверху. Проверка правильности вычислений была проведена путем сравнения результатов со значениями, приведенными в работе [9]. Для этих результатов, показанных на рис. 3, а, б, с использованием нелинейной регрессии построены аппроксимирующие зависимости

$$a_1 = 0,819 + 0,03422 \log Pr - 4,861 \cdot 10^{-3} \log^2 Pr + 3,939 \cdot 10^{-4} \log^3 Pr; \quad (15)$$

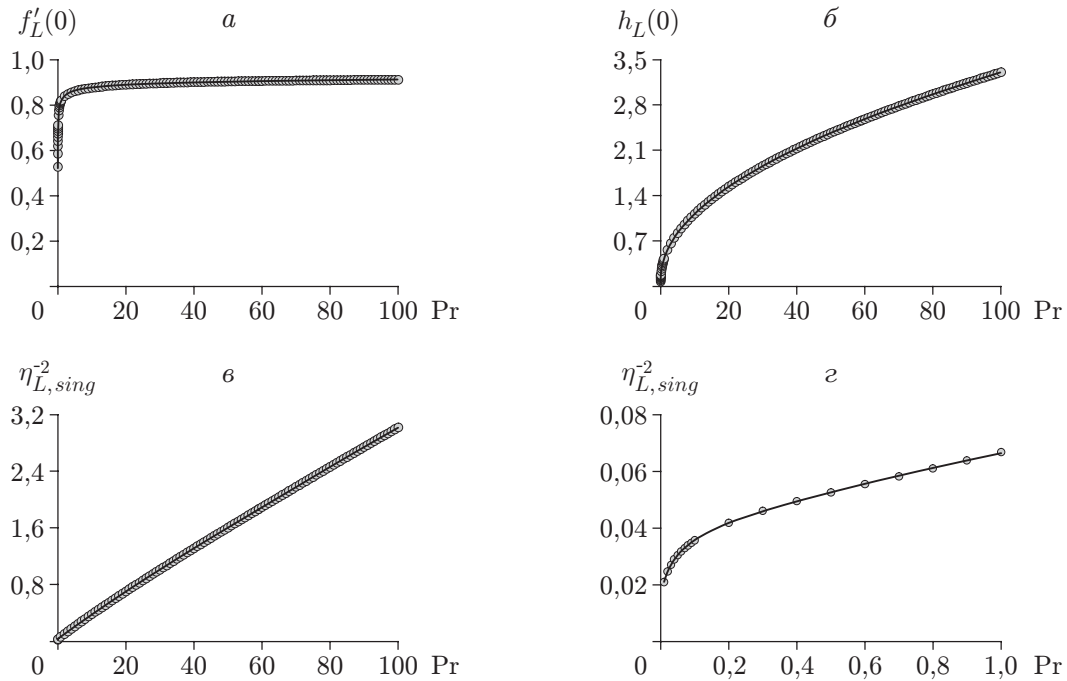


Рис. 3. Зависимости величин $f'_L(0)$ (а) и $h_L(0)$ (б) от числа Прандтля Pr и зависимость $\eta_{L,sing}$ от Pr в диапазонах $0,01 \leq Pr \leq 100,00$ (в) и $0,01 \leq Pr \leq 1,00$ (з) в случае линейного источника:

точки — результаты расчетов, линии — функции наилучшего приближения

$$b_0 = 0,427 + 0,1655 \log Pr + 0,03671 \log^2 Pr + 6,718 \cdot 10^{-3} \log^3 Pr + \\ + 9,161 \cdot 10^{-4} \log^4 Pr + 9,456 \cdot 10^{-5} \log^5 Pr + 7,271 \cdot 10^{-6} \log^6 Pr \quad (16)$$

(логарифм берется по основанию e). Установлено, что максимальное различие результатов численных расчетов, полученных в данной работе, и результатов, полученных с помощью функций наилучшего приближения, составляет менее 2 %.

После того как были определены начальные условия, с использованием первых 20 000 членов ряда вычислялись значения $\eta_{L,sing}$ как функции Pr для построения графиков К. Домба и М. Ф. Сайкса, линейная регрессия применялась к последним 5000 членам (см. рис. 3, в). В рассматриваемом диапазоне сингулярности находятся в комплексной плоскости, что позволяет применить преобразование Эйлера в форме (14), чтобы расширить область сходимости ряда. Для упрощения этого подхода по полученным точкам была построена аппроксимирующая зависимость

$$\eta_{L,sing}^{-2} = \begin{cases} 0,06632 + 0,02488 \log Pr + 8,428 \cdot 10^{-3} \log^2 Pr + \\ + 1,845 \cdot 10^{-3} \log^3 Pr + 1,571 \cdot 10^{-4} \log^4 Pr, & 0,01 \leq Pr \leq 1,00, \\ 0,02979 + 0,03623 Pr - 1,572 \cdot 10^{-4} Pr^2 + \\ + 1,524 \cdot 10^{-6} Pr^3 - 5,903 \cdot 10^{-9} Pr^4, & 1 \leq Pr \leq 100. \end{cases} \quad (17)$$

На данном этапе, используя степенной ряд (11), можно получить решения в замкнутой форме для уравнений пограничного слоя. Прежде всего требуется определить начальные значения из (15), (16) и подставить их в рекуррентные соотношения (13), чтобы получить необходимое число членов. При этом может быть получено решение в замкнутом виде. Чтобы расширить область применимости ряда, можно использовать преобразование Эйлера (14), где величина $\eta_{L,sing}^2$ вычисляется из (17).

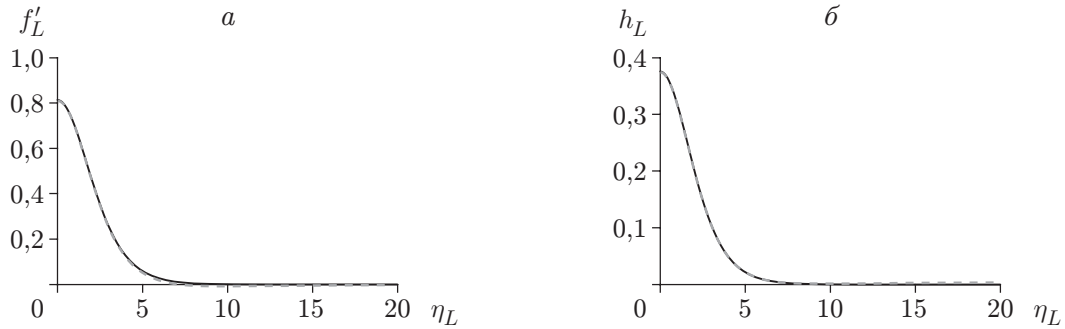


Рис. 4. Зависимости безразмерных скорости f'_L (а) и температуры h_L (б) от автомодельной переменной в случае линейного источника: сплошная линия — результаты численного расчета, штриховая — результаты, полученные с использованием обрезанных эйлеризованных рядов

Для проверки алгоритма рассмотрен случай точечного источника в воздухе при $Pr = 0,7$. На рис. 4 приведены результаты численных расчетов и результаты, полученные с использованием рекуррентных соотношений (13) с начальными функциями (15)–(17) для безразмерных скорости и температуры. Для определения f'_L использовалось пять членов эйлеризованного степенного ряда, для определения h_L — восемь членов. Из рис. 4 следует, что в большей части исследованного диапазона результаты численных и аналитических расчетов согласуются. Различие результатов наблюдается при $\eta_L > 5$ и является следствием использования аппроксимирующих зависимостей (15)–(17).

2. Случай точечного источника. Ниже приведены результаты решения задачи о естественной конвекции в случае точечного источника.

2.1. *Вывод степенного ряда.* В случае ламинарных точечных источников тепла уравнения задачи выводятся так же, как и в случае линейных источников. В цилиндрических координатах уравнения пограничного слоя имеют вид [9]

$$\frac{\partial(rw_P)}{\partial z} + \frac{\partial(rv_P)}{\partial r} = 0; \tag{18}$$

$$w_P \frac{\partial w_P}{\partial z} + v_P \frac{\partial w_P}{\partial r} = g\beta\theta_P + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_P}{\partial r} \right), \tag{19}$$

$$w_P \frac{\partial \theta_P}{\partial z} + v_P \frac{\partial \theta_P}{\partial r} = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_P}{\partial r} \right),$$

где z — координата на оси, направленной вертикально вверх; r — расстояние от источника; w, v — скорости в направлениях z, r соответственно; нижним индексом P отмечены величины, соответствующие точечному источнику тепла. Из (19) получаем интегральные соотношения

$$\int_0^\infty w_P^2 2\pi r dr = g\beta \int_0^z \int_0^\infty \theta_P 2\pi r dr dz, \quad Q_P = c_p \rho \int_0^\infty \theta_P w_P 2\pi r dr,$$

где Q_P — поток тепла через горизонтальную плоскость в единицу времени. Для системы уравнений (18), (19) граничные условия имеют вид

$$r = 0: \quad v_P = \frac{\partial w_P}{\partial r} = \frac{\partial \theta_P}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad w_P \rightarrow 0, \quad \theta_P \rightarrow 0.$$

В этом случае выражения для переменной подобия, функции тока и превышения температуры принимают форму

$$\eta_P = Gr_{Pz}^{1/4} \frac{r}{z}, \quad \psi_P = \nu z f_P(\eta_P), \quad \theta_P = \frac{Q_P}{2\pi c_p \rho \nu z} h_P(\eta_P),$$

где Gr_{Pz} — число Грасгофа в случае точечного источника:

$$\text{Gr}_{Pz} = \frac{g\beta Q_P z^2}{2\pi c_p \rho \nu^3}.$$

При использовании функции ψ , определяемой формулами

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_P}{\partial x} = w_P, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_P}{\partial z} = -v_P,$$

уравнение неразрывности (18) выполняется тождественно, при этом уравнения (19) принимают вид

$$\frac{f_P'''}{\eta_P} + \frac{f_P - 1}{\eta_P} \left(\frac{f_P'}{\eta_P} \right)' + h_P = 0; \quad (20)$$

$$(\eta_P h_P')' + \text{Pr}(f_P h_P)' = 0. \quad (21)$$

Решения уравнений (20), (21) удовлетворяют интегральным равенствам

$$\int_0^\infty f_P' h_P d\eta_P = 1, \quad \int_0^\infty \frac{f_P'^2}{\eta_P} d\eta_P = \int_0^\infty h_P \eta_P d\eta_P$$

и граничным условиям

$$\eta_P = 0: \quad \frac{f_P}{\eta_P} - \frac{f_P'}{2} = \left(\frac{f_P'}{\eta_P} \right)' = h_P' = 0, \quad \eta_P \rightarrow \infty: \quad \frac{f_P'}{\eta_P} \rightarrow 0, \quad h_P \rightarrow 0.$$

Проинтегрировав уравнение энергии (21), с учетом граничных условий получаем

$$\eta_P h_P' + \text{Pr} f_P h_P = 0. \quad (22)$$

Аналогично случаю линейного источника разложения функций для скорости и температуры могут быть представлены в следующем виде:

$$f_P = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+2} \eta_P^{2i+2}, \quad h_P = \sum_{i=0}^{\infty} d_{2i} \eta_P^{2i}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), (22) и используя равенство Коши (12), получаем рекуррентные соотношения

$$c_{2i+4} = - \frac{d_{2i} + 4 \sum_{j=0}^{i-1} c_{2j+4} c_{2i-2j} (j+2)(j+1)}{8(i+1)^2(i+2)}, \quad d_{2i} = - \frac{\text{Pr}}{2i} \sum_{j=0}^{i-1} d_{2j} c_{2i-2j}$$

с начальными условиями

$$c_2 = f_P''(0)/2!, \quad d_0 = h_P(0).$$

2.2. Анализ результатов. В случае ламинарных точечных тепловых факелов можно определить решения в замкнутой форме, полагая $f_P = A\eta_P(1+B\eta_P^2)^{-1}$ [9–11]. Эти решения приведены в табл. 2. Используя данные результаты, можно провести сравнение значений, полученных с использованием представления решения в виде степенного ряда, с соответствующими значениями, полученными при разложении решений в замкнутой форме в ряд Тейлора. Эти значения согласуются для всех 500 членов, которые были вычислены.

Таблица 2

Аналитические решения, полученные для скорости и температуры при некоторых значениях числа Прандтля в случае ламинарного точечного источника тепла

Pr	f_P	h_P
1	$\frac{\eta_P^2}{2(1 + \eta_P^2/12)}$	$\frac{2}{3(1 + \eta_P^2/12)^3}$
2	$\frac{\sqrt{5}\eta_P^2}{4(1 + \sqrt{5}\eta_P^2/16)}$	$\frac{5}{4(1 + \sqrt{5}\eta_P^2/16)^4}$

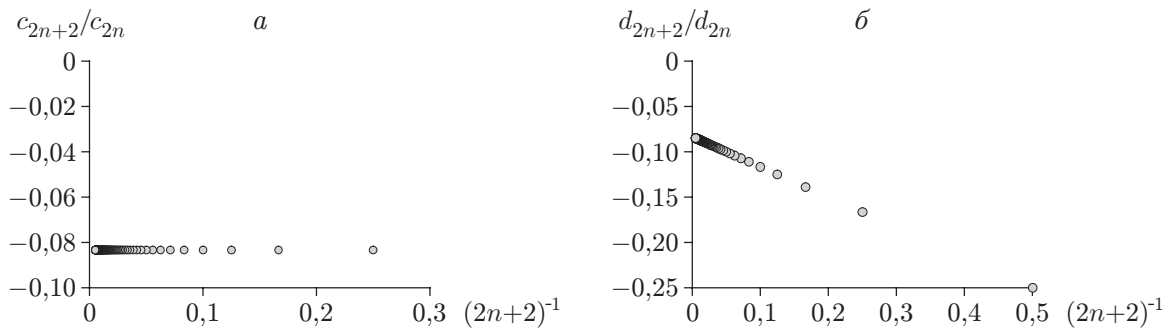


Рис. 5. Графики К. Домба и М. Ф. Сайкса для степенных рядов скорости (а) и температуры (б) в случае точечного источника при Pr = 1

Дальнейшее исследование полученного ряда проведено для случая Pr = 1. Результаты вычисления показывают, что решения расходятся при $\eta_{P,sing} = \sqrt{12}$ (рис. 5). Это ожидаемый результат, поскольку разложение точного решения соответствует биномиальному ряду, который сходится в том случае, если аргумент меньше единицы.

При Pr = 1 значение $\eta_{P,sing}$ соответствует тому, что особенности находятся в комплексной плоскости и, следовательно, не имеет физического смысла [21]. Таким образом, используя преобразование Эйлера в виде

$$\varepsilon_P = \eta_P / \sqrt{\eta_P^2 + \eta_{P,sing}^2}, \tag{24}$$

можно расширить область сходимости ряда. Фактически применение (24) при Pr = 1 дает решение в замкнутом виде (см. табл. 2).

При определении решения для других значений числа Прандтля использовалось математическое программное обеспечение Mathematica (версия 5.23.1), найдены первые 50 ненулевых членов для произвольных значений Pr, c_2 , d_0 . Сравнение соседних членов показало, что они имеют разные знаки. Это означает, что и все последующие члены будут знакопеременными [21], кроме того, наиболее близкими особенностями являются комплексные, следовательно, использование эйлерова преобразования должно улучшить сходимость степенных рядов.

Чтобы определить начальные условия для рекуррентных соотношений, нужно использовать численные методы. Применяемый алгоритм подобен алгоритму для линейных источников [9]. Различие заключается в том, что использовалось несколько первых членов рекуррентного соотношения. Это позволяло начать интегрирование уравнений при $\eta_P > 0$. Такая процедура необходима, поскольку уравнение (20) имеет слабую особенность в начале координат. Так же как в случае линейного источника, возможны два решения, которые удовлетворяют граничным условиям, при этом для одного решения величина w_P

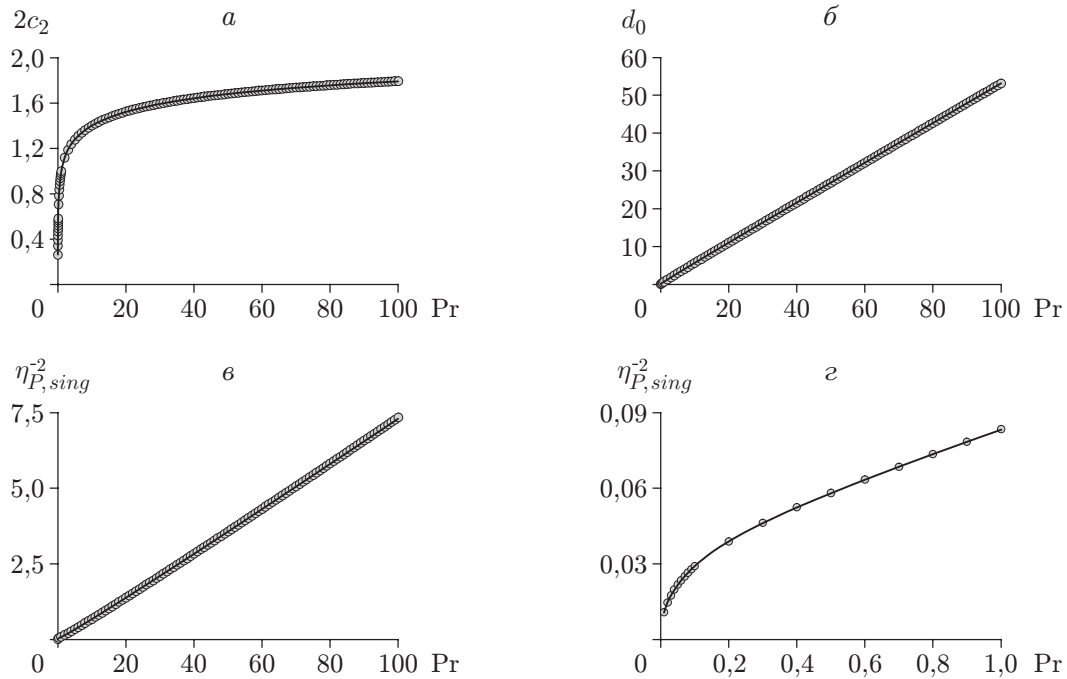


Рис. 6. Зависимости величин $2c_2$ (а) и d_0 (б) от числа Прандтля Pr и зависимость $\eta_{P,sing}^{-2}$ от Pr в диапазонах $0,01 \leq Pr \leq 100,00$ (в) и $0,01 \leq Pr \leq 1,00$ (г) в случае точечного источника:

точки — результаты расчетов, линии — функции наилучшего приближения

стремится к нулю на бесконечности сверху, а для другого — снизу. Однако в отличие от результатов, полученных в случае линейных источников, в обоих решениях на границе пограничного слоя горизонтальные и вертикальные составляющие скорости стремятся к нулю. Экспериментальные данные, указывающие на существование отрицательных значений вертикальной составляющей скорости, отсутствуют. Поэтому решения с $w_P < 0$ были отброшены. Результаты расчетов, полученные при $0,01 \leq Pr \leq 100,00$, показаны на рис. 6, а, б. С использованием нелинейной регрессии построена аппроксимирующая кривая, найдены функции, аппроксимирующие данные с относительной погрешностью, не превышающей 2 %:

$$2c_2 = 0,9982 + 0,1767 \log Pr - 1,603 \cdot 10^{-3} \log^2 Pr + 2,937 \cdot 10^{-4} \log^3 Pr + \\ + 1,445 \cdot 10^{-4} \log^4 Pr - 3,793 \cdot 10^{-5} \log^5 Pr,$$

$$d_0 = \begin{cases} 2,31 \cdot 10^{-4} + 0,7920 Pr - 0,2361 Pr^2 + \\ + 0,1612 Pr^3 - 0,05073 Pr^4, & 0,01 \leq Pr \leq 1,00, \\ 0,1070 + 0,5755 Pr - 3,613 \cdot 10^{-3} Pr^2 + \\ + 1,727 \cdot 10^{-4} Pr^3 - 5,010 \cdot 10^{-6} Pr^4 + 8,737 \cdot 10^{-8} Pr^5 - \\ - 8,948 \cdot 10^{-10} Pr^6 + 4,950 \cdot 10^{-12} Pr^7 - 1,140 \cdot 10^{-14} Pr^8, & 1 \leq Pr \leq 100. \end{cases}$$

С использованием процедуры, описанной для случая линейных источников, определены значения $\eta_{P,sing}^2$ при различных значениях числа Прандтля. На рис. 6, в приведены

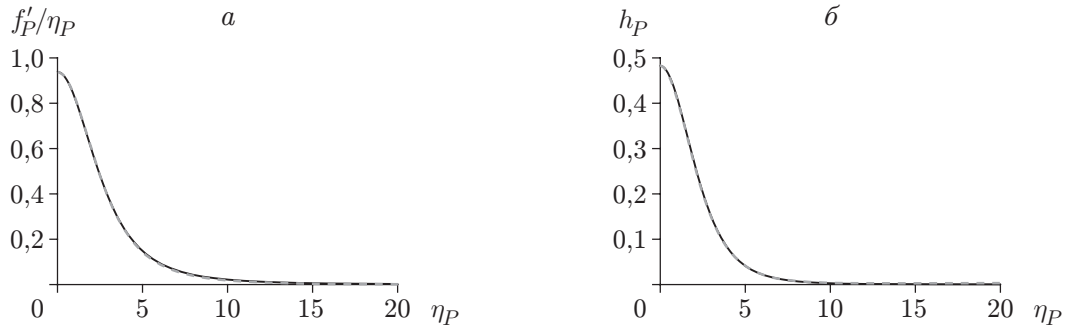


Рис. 7. Зависимости безразмерных скорости (а) и температуры (б) от автомодельной переменной:

сплошная линия — результаты численного расчета, штриховая — результаты, полученные с использованием обрезанных эйлеризованных рядов

результаты расчетов $\eta_{P,sing}^2$ для функции наилучшего приближения

$$\eta_{P,sing}^{-2} = \begin{cases} 8,3197 \cdot 10^{-2} + 4,764 \cdot 10^{-2} \log Pr + \\ + 2,020 \cdot 10^{-2} \log^2 Pr + 6,410 \cdot 10^{-3} \log^3 Pr + \\ + 1,136 \cdot 10^{-3} \log^4 Pr + 8,038 \cdot 10^{-5} \log^5 Pr, & 0,01 \leq Pr \leq 1,00, \\ 2,433 \cdot 10^{-2} + 5,659 \cdot 10^{-2} Pr + \\ + 1,369 \cdot 10^{-3} Pr^2 - 7,901 \cdot 10^{-5} Pr^3 + \\ + 2,920 \cdot 10^{-6} Pr^4 - 6,761 \cdot 10^{-8} Pr^5 + \\ + 9,781 \cdot 10^{-10} Pr^6 - 8,578 \cdot 10^{-12} Pr^7 + \\ + 4,167 \cdot 10^{-14} Pr^8 - 8,597 \cdot 10^{-17} Pr^9, & 1 \leq Pr \leq 100. \end{cases}$$

Следует отметить, что главная особенность является мнимой величиной и, следовательно, не имеет физического смысла. Таким образом, для расширения области сходимости ряда можно использовать преобразование Эйлера. На рис. 7 приведены безразмерные значения скорости и температуры, полученные с использованием функций наилучшего приближения и рекуррентных соотношений, выведенных в данном пункте, а также результаты численных расчетов для случая, когда сплошная среда представляет собой воздух с $Pr = 0,7$. Для безразмерной скорости использовалось пять членов обрезанного эйлеризованного ряда, в то время как для безразмерной температуры — восемь членов. Необходимость использования большего количества членов для улучшения соответствия отсутствовала.

Закключение. С использованием степенных рядов, коэффициенты которых могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения, получены аналитические решения уравнений пограничного слоя в случаях ламинарных линейных и точечных источников тепла в приближении Буссинеска. Существование и единственность таких решений следуют из теоремы Коши — Ковалевской [26], при этом область ее применимости ограничена радиусом сходимости степенного ряда.

С использованием метода интегрирования, описанного в [9], численно получены начальные условия для различных значений Pr . Анализ результатов показал, что можно построить аппроксимирующую кривую, задаваемую функциями наилучшего приближения, предложенными в настоящей работе. Использование начальных условий с рекуррентными соотношениями обеспечивает получение решения дифференциальных уравнений в замкнутой форме в области, где степенной ряд сходится.

Показано, что при использовании преобразования Эйлера возможно расширение области сходимости степенного ряда. Определено значение автомодельной переменной, при

котором ряд расходится, получены функции наилучшего приближения. Установлено, что наиболее близкие к нулю особые точки в рассматриваемой области Pr расположены в комплексной плоскости и, следовательно, не имеют физического смысла [21]. В случае точечного источника обнаружено, что первые 50 ненулевых коэффициентов ряда являются знакопеременными независимо от значения Pr . Это означает, что наиболее близкая к нулю особая точка всегда будет находиться в комплексной плоскости [21]. Это позволяет предположить, что с использованием преобразования Эйлера можно расширить область сходимости ряда.

Справедливость предложенной схемы проверена для частного случая $Pr = 0,7$. Сравнение результатов численных и аналитических расчетов показывает, что с использованием небольшого количества членов степенного ряда можно достичь их хорошего соответствия. Использование большего количества членов для улучшения сходимости нецелесообразно, поскольку в этом случае эйлеризованный ряд расходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ehrhard P.** Laminar mixed convection in two-dimensional far wakes above heated/cooled bodies: model and experiments // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 439. P. 165–198.
2. **Gebhart B., Pera L., Schorr A. W.** Steady laminar natural convection plumes above a horizontal line heat source // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1970. V. 13, N 1. P. 161–171.
3. **Sevruk I. G.** Laminar convection over a linear heat source // *J. Appl. Math. Mech.* 1958. V. 22, N 4. P. 807–812.
4. **Yih C. S., Wu F.** Round buoyant laminar and turbulent plumes // *Phys. Fluids.* 1981. V. 24, N 5. P. 794–801.
5. **Zeldovich Y. B.** The asymptotic laws of freely ascending convective flows // *Zhur. Eksper. Teor. Fiz.* 1937. V. 7, N 12. P. 1463–1465.
6. **Schuh H.** Boundary layers of temperature // *Boundary layers* / Ed. by W. Tollmien (British Ministry of Supply, German Document Centre, Ref. 3220 T, 1948).
7. **Yih C. S.** Laminar free convection due to a line source of heat // *Trans. Amer. Geophys. Union.* 1952. V. 33, N 5. P. 669–672.
8. **Gebhart B.** Buoyancy-induced flows and transport / B. Gebhart, Y. Jaluria, R. L. Mahajan, B. Sammakia. N. Y.: Hemisphere Publ. Co, 1988.
9. **Fujii T.** Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1963. V. 6, N 7. P. 597–606.
10. **Brand R. S., Lahey F. J.** The heated laminar vertical jet // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29, N 2. P. 305–315.
11. **Yih C. S.** Free convection due to a point source of heat // *Proc. of the 1st U.S. Nat. Congr. of appl. mech.* N. Y.: Amer. Soc. of Mech. Engrs, 1951. P. 941–947.
12. **Batchelor G. K.** Heat convection and buoyancy effects in fluids // *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 1954. V. 80, N 345. P. 339–358.
13. **Spalding D. B., Cruddace R. G.** Theory of the steady laminar buoyant flow above a line heat source in a fluid of large Prandtl number and temperature-dependent viscosity // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1961. V. 3, N 1. P. 55–59.
14. **Kuiken H. K., Rotem Z.** Asymptotic solution for plume at very large and small Prandtl numbers // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 45, N 3. P. 585–600.
15. **Vázquez P. A., Pérez A. T., Castellanos A.** Thermal and electrohydrodynamic plumes. A comparative study // *Phys. Fluids.* 1996. V. 8, N 8. P. 2091–2096.

16. **Liñán A., Kurdyumov V. N.** Laminar free convection induced by a line heat source, and heat transfer from wires at small Grashof numbers // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 362. P. 199–227.
17. **Kurdyumov V. N., Liñán A.** Free convection from a point source of heat, and heat transfer from spheres at small Grashof numbers // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1999. V. 42, N 20. P. 3849–3860.
18. **Sullivan P. J., Sutherland P. J.** Laminar free convection due to a point source of buoyancy // *Z. angew. Math. Phys.* 1976. Bd 27. S. 671–675.
19. **Blasius H.** Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung (the boundary layers in fluids with little friction) // *Z. Math. Phys.* 1908. Bd 56, N 1. S. 1–37.
20. **Domb C., Sykes M. F.** On the susceptibility of a ferromagnetic above the curie point // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1957. V. 240, N 1221. P. 214–228.
21. **Van Dyke M.** Analysis and improvement of perturbation series // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1974. V. 27, N 4. P. 423–450.
22. **Van Dyke M.** Perturbation methods in fluid mechanics. California: Parabolic Press, 1975. Chap. 3, 10.
23. **Afzal N.** Mixed convection in a two-dimensional buoyant plume // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 105, N 1. P. 347–368.
24. **Liao S., Tan Y.** A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations // *Stud. Appl. Math.* 2007. V. 119, N 4. P. 297–354.
25. **Jaluria Y.** Natural convection // *Heat transfer handbook* / Ed. by A. Bejan, A. D. Kraus. New Jersey: John Wiley and Sons, 2003. Chap. 7.
26. **Courant R.** Methods of mathematical physics / R. Courant, D. Hilbert. N. Y.: Wiley, 1989. V. 2.

Поступила в редакцию 11/XII 2012 г.
