

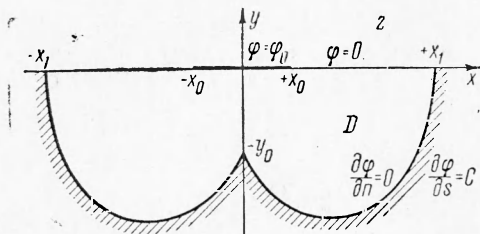
О ФОРМЕ ВОРОНКИ ВЫБРОСА ПРИ ВЗРЫВЕ
НА ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТА

В. М. Кузнецов

(Новосибирск)

Давления, возникающие при детонации взрывчатых веществ, имеют величину порядка ста тысяч атмосфер. При таких больших давлениях сжимаемость всех веществ настолько мала, что практически ее можно не учитывать. Кроме того, при больших нагрузках силы инерции во много раз превосходят силы трения. Таким образом, любую среду в области, близкой к месту взрыва, можно рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость. Такой подход к рассмотрению действия взрыва в твердых средах, например в грунте, широко известен и дает результаты, подтверждающиеся экспериментами.

Обычно полагают, что область, где среду можно рассматривать как идеальную несжимаемую жидкость, занимает или все пространство, или полупространство, если учитывается влияние свободной поверхности. При этом вопрос об определении формы воронки выброса при взрыве в грунте остается совершенно открытым. При помощи дополнительных условий определяется только край воронки.



Фиг. 1

Представляет интерес следующая постановка задачи. Среду (грунт) считать идеальной несжимаемой жидкостью только в области, близкой к заряду, при давлениях, больших некоторого критического значения, постоянного для каждой определенной среды. В импульсной постановке это означает, что вводится некоторое критическое значение

скорости, которое остается постоянным вдоль границы воронки. Внутри этой области величина скорости больше критического значения и, следовательно, грунт является идеальной несжимаемой жидкостью. Вне этой области среда неподвижна, так что граница воронки является твердой стенкой.

Рассмотрим в этой постановке плоскую задачу об образовании воронки выброса при взрыве заряда, лежащего на поверхности грунта. Пусть заряд представляет собой бесконечно длинную ленту шириной $2x_0$. На фиг. 1 показан разрез, перпендикулярный заряду. В силу симметрии можно ограничиться рассмотрением области течения, лежащей справа от оси симметрии.

Запишем граничные условия для потенциальной функции $\varphi(x, y)$. На отрезке $(-x_0, +x_0)$ действует постоянное по x импульсивное давление, так что на этом отрезке значение потенциала постоянно

$$\varphi = \varphi_0 = -\frac{P}{\rho}, \quad |x| < x_0 \quad \left(P = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} p(t) dt \right) \quad (1)$$

где ρ — плотность жидкости.

На свободной поверхности давление равно нулю, следовательно,

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x_0 < |x| < x_1 \quad (2)$$

На неизвестной границе области выполняются два условия:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{граница является твердой стенкой}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = c \quad (\text{вдоль границы скорость постоянна}).$$

Кроме того, известно также, что на отрезках $(y = 0, -x_0 < x < +x_0)$ и $(x = 0, -y_0 \leq y \leq 0)$ скорости направлены вниз, а на отрезках

$x_0 < |x| < x_1$ — вверх. Вводя функцию тока $\psi(x, y)$ вместо условия (3), можно написать

$$\psi = \text{const} \quad \text{или} \quad \psi = 0 \tag{4}$$

(полагая постоянную равной нулю).

Введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x_0}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \bar{c} = \frac{cx_0}{\varphi_0} \tag{5}$$

и комплексный потенциал $w(z) = \varphi + i\psi$.

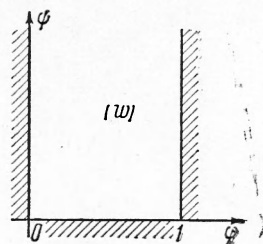
Окончательно задача формулируется в следующем виде: найти границу неизвестной области D , внутри которой определена аналитическая функция $w(z)$, граничные значения которой (фиг. 1) имеют вид:

$$\text{Re } w = 1, \quad \arg \frac{dw}{dz} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{при } |x| < x_0 \tag{6}$$

$$\text{Re } w = 0, \quad \arg \frac{dw}{dz} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } x_0 < |x| < x_1$$

$$\text{Im } w = 0, \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = c \quad \text{на неизвестной границе}$$

$$\varphi' \leq \text{Re } w \leq 1, \quad \arg \frac{dw}{dz} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{при } 0 \geq y \geq -y_0$$



Фиг. 2

(черточки под безразмерными переменными для простоты опущены).

Легко видеть, что в плоскости комплексного потенциала w область течения представляется полуполосой (фиг. 2) ($\psi = 0, \varphi = 1, \varphi = 0$). Будем искать в этой области

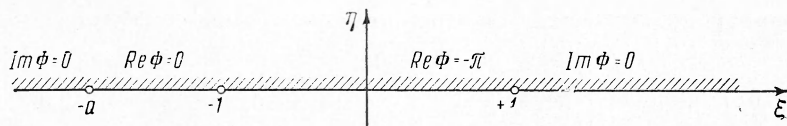
$$\ln \frac{dw}{dz} = f(w) \tag{7}$$

Для функции $f(w)$ на границах полуполосы выполняются следующие граничные условия:

$$\text{Im } f(w) = \frac{1}{2} \pi \quad \text{при } \varphi = 0, \quad \text{Im } f(w) = -\frac{1}{2} \pi \quad \text{при } \varphi' \leq \varphi \leq 1$$

$$\text{Im } f(w) = -\frac{1}{2} \pi \quad \text{при } \varphi = 1, \quad \text{Re } f(w) = \ln \left| \frac{dw}{dz} \right| = \ln c \quad \text{при } \psi = 0 \tag{8}$$

Функция $\zeta = \sec \pi w$ преобразует полуполосу в полуплоскость $\eta > 0$



Фиг. 3

с соответствием точек: $w = 0$ переходит в $\zeta = 1$, $w = 1$ в $\zeta = 1$, точка $w = \varphi'$ переходит (фиг. 3) в точку $\zeta' = -a = -\sec \pi \varphi'$.

Вводя вместо $f(w)$

$$F(w) = i [f(w) + \frac{1}{2} \pi i - \ln c] \tag{9}$$

приходим к следующей задаче: найти аналитическую в верхней полуплоскости функцию $F[w(\zeta)] = \Phi(\zeta)$, действительная и мнимая часть которой принимают на вещественной оси следующие значения:

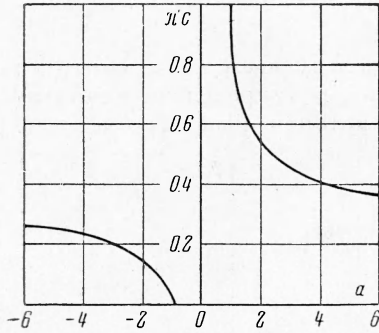
$$\text{Im } \Phi(\zeta) = 0 \quad \text{при } -\infty < \zeta < -a, \quad \text{Re } \Phi(\zeta) = 0 \quad \text{при } -a < \zeta < 0 \tag{10}$$

$$\text{Re } \Phi(\zeta) = -\pi \quad \text{при } 0 < \zeta < +1, \quad \text{Im } \Phi(\zeta) = 0 \quad \text{при } +1 < \zeta < +\infty$$

Эта задача решается формулой Келдыша — Седова [1], принимающей в данном случае простой вид

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\pi i g(\zeta)} \int_0^1 \frac{g(t)}{t-\zeta} dt + \frac{\Phi(\infty)}{g(\zeta)} \quad \left(g(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta-1}{\zeta+a}} \right) \quad (11)$$

Постоянная $\Phi(\infty)$ в данном случае определяется из условия



Фиг. 4

$$\operatorname{Im} \Phi(\zeta) = \operatorname{Re} \Phi(\zeta) = 0 \quad \text{в точке } \zeta = -a \quad (12)$$

Вычисляя интеграл и пользуясь условием (12), получим решение в виде

$$\Phi(\zeta) = i \ln \frac{\sqrt{1-\zeta} + \sqrt{1+\zeta/a}}{\sqrt{1-\zeta} - \sqrt{1+\zeta/a}}$$

Подставляя сюда $\zeta = (\cos \pi w)^{-1}$ и возвращаясь к функции $f(w)$, получим

$$f(w) = \ln \frac{c}{i} \frac{\sqrt{\cos \pi w - 1} + \sqrt{\cos \pi w + 1/a}}{\sqrt{\cos \pi w - 1} - \sqrt{\cos \pi w + 1/a}} \quad (13)$$

Отсюда, пользуясь (7), находим

$$\frac{dw}{dz} = -c i \frac{\sqrt{\cos \pi w - 1} + \sqrt{\cos \pi w + 1/a}}{\sqrt{\cos \pi w - 1} - \sqrt{\cos \pi w + 1/a}} \quad (14)$$

Интегрируя это выражение, получаем решение задачи в виде

$$z = -\frac{2ai}{a+1} \frac{\sin \pi w}{\pi c} + \frac{i}{c} \frac{a-1}{a+1} w + \frac{2a}{a+1} \frac{1}{\pi c} \sqrt{\cos \pi w + 1} \sqrt{\cos \pi w + 1/a} - \frac{2}{\pi c} \frac{a-1}{a+1} \ln (\sqrt{\cos \pi w + 1/a} + \sqrt{\cos \pi w + 1}) + K \quad (15)$$

Постоянная интегрирования K определяется из условия на краю заряда

$$w \rightarrow \infty \quad \text{при } z \rightarrow 1 \quad (16)$$

Отсюда

$$K = 1 + \frac{1}{\pi c} \frac{a-1}{a+1} \ln 2 - \frac{1}{\pi c} \quad (17)$$

Параметр $a = -\sec \pi \varphi'$ определяется из условия

$$w = 1 \quad \text{при } z = 0 \quad (18)$$

которое при подстановке в (15) с учетом (16) дает связь между a и c

$$\pi c = 1 + \frac{a-1}{a+1} \ln \frac{a-1}{2a} \quad (19)$$

На фиг. 4 изображена зависимость между c и a .

Первый случай. $\pi c = 1$. Имеем $a = 1$ (фиг. 4). Подставляя значение $a = 1$ в (15) и (16), получим

$$z = -\frac{i}{\pi c} \sin \pi w + \frac{1}{\pi c} \cos \pi w + 1 = 1 + \frac{1}{\pi c} e^{-i\pi w}$$

Отсюда

$$w = \frac{i}{\pi} \ln(z-1) \quad (20)$$

т. е. течение представляет собой вихрь с центром в точке $z = 1$ и радиусом $|z-1| = 1/\pi c = 1$. Форма воронки для данного случая изображена на фиг. 5.

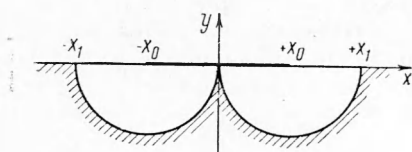
Второй случай $\pi c > 1$. В этом случае форма воронки имеет вид, изображенный на фиг. 6. Некоторая область среды оказывается невозмущенной. Воронки образуются на краях заряда и представляют собой окружности

$$|z - 1| = \frac{1}{\pi c} < 1 \tag{21}$$

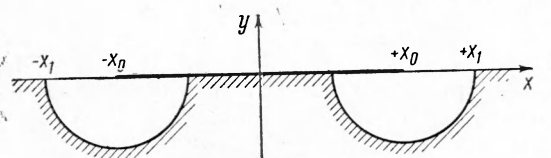
Отсюда вытекает важный для практических приложений вывод: для обеспечения максимального разрушения грунта накладным зарядом не следует применять очень широкие заряды. Ширина заряда не должна превышать величину $2/\pi c$. Возвращаясь к размерным переменным по формулам (5), условие для критической ширины заряда x_{0*} можно представить в виде

$$x_{0*} = \frac{P}{\pi c \rho} \tag{22}$$

Легко понять физический смысл этого предложения. Допустим, что заряд покрывает все полупространство. Тогда в схеме идеальной несжи-



Фиг. 5



Фиг. 6

маемой жидкости никакого выброса не произойдет, как так выброс обусловлен существованием свободной поверхности. Если заряд имеет конечные, но очень большие размеры, то выброс произойдет только на краях заряда. Средняя часть заряда сработает впустую. Максимальный к. п. д. взрыва будет обеспечен только при соблюдении равенства (22).

Третий случай: $\pi c < 1$, наиболее интересен, так как он чаще всего встречается в действительности. Для определения профиля воронки в данном случае в (15) нужно положить $\psi = 0$. Тогда

$$z = -\frac{2ai}{a+1} \frac{\sin \pi\varphi}{\pi c} + \frac{i}{c} \frac{a-1}{a+1} \varphi + \frac{2a}{a+1} \frac{1}{\pi c} \sqrt{\cos \pi\varphi + 1} \sqrt{\cos \pi\varphi + \frac{1}{a}} - \frac{2}{\pi c} \frac{a-1}{a+1} \ln \left(\sqrt{\cos \pi\varphi + 1} + \sqrt{\cos \pi\varphi + \frac{1}{a}} \right) + K \tag{23}$$

где K и a определяются соответственно выражениями (17) и (19).

Здесь φ — действительная величина, изменяющаяся от 0 до 1.

Отделяя в (23) справа и слева действительную и мнимую часть, получим параметрическое представление профиля воронки выброса

$$x = \frac{2a}{a+1} \frac{1}{\pi c} \sqrt{\cos \pi\varphi + 1} \sqrt{\cos \pi\varphi + \frac{1}{a}} - \frac{a-1}{a+1} \frac{2}{\pi c} \ln \frac{\sqrt{\cos \pi\varphi + 1} + \sqrt{\cos \pi\varphi + \frac{1}{a}}}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\pi c} \tag{24}$$

$$y = -\frac{2a}{a+1} \frac{\sin \pi\varphi}{\pi c} + \frac{a-1}{a+1} \frac{\varphi}{c} \tag{25}$$

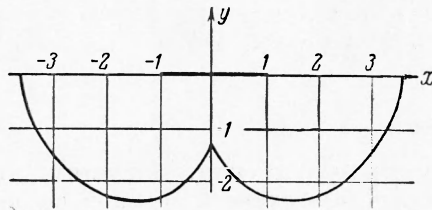
где φ — действительная величина, изменяющаяся от 0 до $\varphi' = \arccos(-1/a)$. На фиг. 7 изображен профиль воронки при $\pi c = 0.3$.

Рассмотрим выражения (24) и (25) при малых значениях величины πc . Положим $a = -1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$. Тогда из (19) следует с точностью до членов второго порядка малости, что $\pi c = 1/4 \varepsilon$.

Так как $\varphi' = \arcsin(a^{-1})$ при $a = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ есть также малая величина порядка $\sqrt{\varepsilon}$, то в выражениях (24) и (25) можно считать φ малой величиной, наибольшее значение которой может быть порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Учитывая все это и производя разложение по степеням ε и φ , получим с точностью до членов высшего порядка

$$x = \frac{1}{2\pi c \varepsilon} (2\varepsilon - \pi^2 \varphi^2)^{3/2}, \quad y = -4 \frac{\varphi}{\varepsilon} \quad (24')$$

При $\pi^2 \varphi^2 / \varepsilon \ll 1$, т. е. вблизи края воронки, эти выражения еще более упрощаются



Фиг. 7

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\pi^2 \varphi^2}{\varepsilon}\right), \quad y = -\frac{4\varphi}{\varepsilon}$$

Отсюда, исключая φ , получаем

$$x = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{3}{64} \varepsilon y^2\right) \quad (26)$$

Следовательно, при малых значениях критической скорости форма воронки близка к параболе.

При $y = 0$ из этой формулы координата края воронки

$$x^0 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

или, возвращаясь к размерным переменным по (5) и обозначая через R половину ширины воронки выброса,

$$R = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{P x_0}{\rho c}} \quad (27)$$

Интересно сравнить это выражение с аналогичным выражением, получающимся в том случае, если всю среду считать идеальной несжимаемой жидкостью. Тогда потенциал скоростей определяется интегралом Пуассона

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-x_0}^{+x_0} \frac{(P/\rho) y dt}{(x-t)^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{2(P/\rho) y}{x^2 + y^2 - x_0^2}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{P}{\pi \rho} \frac{2x_0}{x^2 - x_0^2}$$

Приравнивая последнее выражение критической скорости, получим, пренебрегая в знаменателе x_0^2 по сравнению с x^2 ,

$$R = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{P x_0}{\rho c}} \quad (28)$$

Из сравнения (27) и (28) видно, что во втором случае радиус воронки получается вдвое меньшим, чем в первом. Это объясняется тем, что в первом случае вся энергия взрыва расходуется на выброс, тогда как во втором на выброс расходуется лишь часть энергии, а остальная часть идет на сообщение кинетической энергии среде за пределами воронки выброса.

В заключение приношу благодарность М. А. Лаврентьеву за постановку задачи и ряд полезных замечаний, сделанных при ее решении.

Поступила
20 V 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.