ПМТФ, № 1, 1969

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ МНОГОЧАСТИЧНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергор

(Москва)

С помощью перенормировки уравнений равновесия и несовместности проведено вычисление эффективных тензоров упругих модулей и податливостей. Во внимание приняты все многочастичные взаимодействия, однако расчет проведен в приближении учета лишь сингулярных частей производных функций Грина, что эквивалентно гипотезе однородности случайных составляющих полей напряжений и деформаций в пределах зерна. Проводится согласование решений, полученных двумя методами, что позволяет установить положение эффективного упругого модуля сдвига μ и всестороннего сжатия K внутри границ Хашина — Штрикмана. Рассмотрены частные случаи, когда неоднородностью обладает лишь объемный модуль, а также композиционные материалы, для каждого из компонентов которого имеет место соотношение $K = {}^4/_3\,\mu$.

Деформирование неоднородных твердых тел сопровождается возникновением в материале упругого поля, случайная составляющая которого, вообще говоря, обладает неоднородностью в пределах зерна. Это является причиной того, что связь между случайной и регулярной составляющими поля является нелокальной и описывается некоторой совокупностью интегральных операторов. Отмеченная нелокальность существенно усложняет проблему вычисления эффективных упругих постоянных и многоточечных моментных функций упругого поля. Лишь в некоторых частных случаях квазиоднородное деформирование приводит к однородности упругого поля в пределах зерна. Последнее имеет место для объемной составляющей упругого поля материала, в котором неоднородностью обладает лишь модуль всестороннего сжатия [1], а также для деформированных слоистых структур [2]. Ограниченность количества моделей сплошных сред, для которых имеет место однородность напряжений и деформаций в пределах зерна, привела к разработке приближенных методов вычисления упругих модулей и корреляционных функций упругого поля — метода самосогласования [3,4], теории случайных функций [1,2,5–10] и др.

Перенормировка уравнений равновесия и несовместности в принципе позволяют установить точные значения эффективных упругих модулей, однако математические трудности учета нелокальных связей не позволяют продвинуться дальше третьего приближения [7]. Вместе с тем, если принять приближение локальности, то можно просуммировать все члены ряда. Впервые суммирование ряда в рамках теории возмущений применительно к расчету упругих модулей поликристаллов было проведено В. В. Болотиным и В. Н. Москаленко [11,12], которые для этой цели ввели понятие сильно изотропных поликристаллов. Аналогичный подход к изучению упругих свойств поликристаллов использовался также Э. Крёнером [13].

Ниже проводится развитие метода перенормировок в приближении локальности применительно к композиционным материалам. При вычислении эффективных упругих модулей проводится учет всех многочастичных взаимодействий, однако при этом точные значения производных функций Грина уравнений равновесия и несовместности заменяются некоторыми приближенными выражениями, что эквивалентно переходу от неоднородного в пределах зерна упругого поля к однородному. Использование принципа согласования [3,14] полученных различными методами решений позволяет найти эффективные упругие модули всестороннего сжатия и сдвига, лежащие внутри вилки Хашина — Штрикмана.

1. Выразим случайные составляющие тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} через их регулярные значения. Для произвольной неоднородной линейной среды, содержащей, вообще говоря, источники внутренних напряжений, могут быть записаны уравнения равновесия

$$L_{il}u_l + f_i = 0, \quad L_{il} \equiv \nabla_k \lambda_{iklm} \nabla_m, \quad \lambda_{iklm} = K\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu D_{iklm} \qquad (1.1)$$

и несовместности

$$L_{iklm}\sigma_{lm} + \eta_{ik} = 0, \quad L_{iklm} \equiv \mathrm{Rot}_{ikpq} s_{pqlm}$$
$$s_{pqlm} = p\delta_{pq}\delta_{lm} + qD_{pqlm}, \; p = \frac{1}{9K}, \quad q = \frac{1}{4\mu} \tag{1.2}$$
$$D_{iklm} = \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - {}^2/{}_3\delta_{ik}\delta_{lm}, \quad \mathrm{Rot}_{ikpq} \equiv e_{ijp}e_{knq}\nabla_j\nabla_n$$

Здесь u_l — вектор смещения, f_i — объемная плотность внешних сил, η_{ik} — тензор несовместности, e_{ijp} — единичный антисимметричный тензор, λ_{iklm} и s_{pqlm} — соответственно тензоры упругих модулей и податливостей, а K и μ — объемный и сдвиговый модули упругости.

Разбивая операторы и функции на регулярную и случайную составляющие, можно получить следующие соотношения:

$$u_i' = -(M_{il}\mathrm{L}_{lm}^\circ + \delta_{im})\langle u_m\rangle \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ik}' = -(M_{iklm}\overset{\circ}{L}_{lmpq} + \delta_{i(p}\delta_{q)k})\langle\sigma_{pq}\rangle \tag{1.4}$$

Здесь операторы M и L° определены матричными равенствами

$$LM + I = 0, \;\; L^\circ\langle M\rangle + I = 0 \tag{1.5}$$

причем единичная матрица I в случае второго ранга имеет составляющими δ_{ij}, а четвертого — $\delta_{i(p}\delta_{q)k}$. Штрихами обозначены случайные составляющие, а угловыми скобками — регулярные, причем усреднение проводится по областям, размер которых превышает пространственный масштаб корреляций, но мал по сравнению с расстояниями, на которых существенно изменяются регулярные составляющие операторов и функций.

Вводя операторы X и M°

$$X = M^\circ L', \qquad \langle L\rangle M^\circ + I = 0 \tag{1.6}$$

можно получить следующее представление операторов M и L°:

$$M = \sum_0^\infty X^n M^\circ, \quad L^\circ = \langle L\rangle \sum_0^\infty \Big(-\sum_1^\infty \langle X^k\rangle\Big)^n \tag{1.7}$$

Отсюда, раскрывая операторные ряды, находим

$$Z' = R\langle Z\rangle, \quad R \equiv \sum_1^\infty Q_n' \tag{1.8}$$

$$Q_n = X^n - \sum_{k=1}^{n-1} X^{n-k}\langle X^k\rangle + \sum_{k,\,l=1}^{k+l\leqslant n-1} X^{n-k-l}\langle X^k\rangle\langle X^l\rangle - \ldots \tag{1.9}$$

Здесь Z — значение u_i или σ_{ij} в матричной записи. Интегральный оператор M° определяется регулярной функцией Грина [8]

$$M^\circ f = G * f = \int G(\mathbf{r} - \rho) f(\rho)\, d\rho \tag{1.10}$$

2. Применим развитую выше схему для вычисления эффективных упругих модулей. Переход от неоднородного в пределах одного зерна упругого поля к однородному может быть проведен учетом лишь сингулярных частей производных функций Грина. Это позволяет свести операторный ряд, определенный формулами (1.8) и (1.9), к числовому, что эквивалентно приближению локальной связи.

Проведем вначале перенормировку уравнений равновесия, выбрав в качестве L оператор (1.1). Тогда из выражения (1.8) найдем

$$u_i' = R_{ik}\langle u_k\rangle, \; \varepsilon_{ij}' = H_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle \tag{2.1}$$

Здесь $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$ — тензор деформаций, а операторы H_{ijkl} и R_{ik} связаны очевидным равенством

$$\nabla_j R_{ik} \langle u_k \rangle = H_{ijkl} \langle \nabla_l u_k \rangle \tag{2.2}$$

Ограничимся рассмотрением однородных макродеформаций $\langle \varepsilon_{kl} \rangle = \text{const}$. Вторая производная от функции Грина равна [15]

$$G_{ij,\,kl} = G^{(s)}_{ij,\,kl} + G^{(f)}_{ij,\,kl}; \qquad G^{(s)}_{ij,\,kl} = -\frac{\delta(\mathbf{r})}{3\langle \mu \rangle}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\varkappa}{5}\,\delta_{ijkl}\right)$$

$$G^{(f)}_{ij,\,kl} = -\frac{1}{8\pi \langle \mu \rangle r^3}\left[2\delta_{ij}(\delta_{kl} - 3\psi_{kl}) - \varkappa(\delta_{ijkl} - 3\varphi_{ijkl} + 15\psi_{ijkl})\right] \tag{2.3}$$

$$\varkappa = \frac{\langle 3K + \mu \rangle}{\langle 3K + 4\mu \rangle}, \qquad \delta_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\varphi_{ijkl} = \delta_{ij}\psi_{kl} + \delta_{kl}\psi_{ij} + \delta_{il}\psi_{jk} + \delta_{jk}\psi_{il} + \delta_{ik}\psi_{jl} + \delta_{jl}\psi_{ik} \tag{2.4}$$

$$\psi_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l, \quad \psi_{ij} = n_i n_j, \quad n_i = x_i r^{-1}$$

Здесь $G^{(s)}_{ij,\,kl}$ определяет сингулярную часть производной, а $G^{(f)}_{ij,\,kl}$ — формальную. Наличие сомножителя $\delta(\mathbf{r})$ в сингулярной части производной переводит интегральный оператор $G^{(s)}_{ij,\,kl}\,*$ в постоянный тензор

$$G^{(s)}_{ij,kl} * \lambda'_{jlmn} = -\left({}^1\!/_3 K_0{}' \delta_{ik}\delta_{mn} + {}^1\!/_2 \mu_0{}' D_{ikmn}\right) \equiv J_{ikmn} \tag{2.5}$$

$$K_0{}' \equiv \frac{3K'}{\langle 3K + 4\mu \rangle}, \qquad \mu_0{}' \equiv \frac{6\mu' \langle K + 2\mu \rangle}{5\langle \mu \rangle \langle 3K + 4\mu \rangle}$$

Таким образом, сингулярная часть $G^{(s)}_{ij,kl}\,*$ описывает локальные связи, тогда как формальная производная $G^{(f)}_{ij,\,kl}\,*$, являющаяся интегральным оператором, учитывает отклонение деформации в пределах зерна от ее среднего по зерну значения. Поэтому в приближении локальности связей между составляющими упругого поля можно опустить слагаемые $G^{(f)}_{ij,\,kl}\,*$, принимая $G_{ij,\,kl} \approx G^{(s)}_{ij,\,kl}$.

Учитывая соотношения

$$J_{ijpq} J_{pqkl} = {}^1\!/_3 K_0{}'^2 \delta_{ij}\delta_{kl} + {}^1\!/_2 \mu_0{}'^2 D_{ijkl},$$

$$K_0{}'^2 - \langle K_0{}'^2 \rangle = -K_0{}'\xi, \quad \mu_0{}'^2 - \langle \mu_0{}'^2 \rangle = -\mu_0{}'\eta \tag{2.6}$$

$$\xi \equiv \frac{3(c_1 - c_2)(K_1 - K_2)}{\langle 3K + 4\mu \rangle}, \qquad \eta \equiv \frac{6(c_1 - c_2)(\mu_1 - \mu_2)\langle K + 2\mu \rangle}{5\langle \mu \rangle \langle 3K + 4\mu \rangle}$$

из равенств (1.8), (1.9), (2.1), (2.2), (2.4) и (2.6) найдем

$$\varepsilon_{ij}{}' = -\left({}^1\!/_3 K_0{}' \sum_0^\infty \xi^n \delta_{ij}\delta_{kl} + {}^1\!/_2 \mu_0{}' \sum_0^\infty \eta^n D_{ijkl}\right)\langle \varepsilon_{kl} \rangle \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) позволяет записать явный вид тензора H_{ijkl}, определяющего связь между полными напряжениями и деформациями в произвольной точке среды с регулярной составляющей тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = (I_{ijkl} + H_{ijkl})\langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad I_{ijkl} = \delta_{i(k}\delta_{l)j} \tag{2.8}$$

$$-H_{ijkl} = {}^1\!/_3 K_0{}' (1 - \xi)^{-1} \delta_{ij}\delta_{kl} + {}^1\!/_2 \mu_0{}' (1 - \eta)^{-1} D_{ijkl}, \quad \sigma_{ij} = \Lambda_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle$$

$$\Lambda_{ijkl} = K\left(1 - \frac{K_0{}'}{1 - \xi}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(1 - \frac{\mu_0{}'}{1 - \eta}\right) D_{ijkl} \tag{2.9}$$

Усредняя выражения (2.9), находим

$$\Lambda_{ijkl}^{u} = \langle \Lambda_{ijkl} \rangle = K^u \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^u D_{ijkl} \qquad (2.10)$$

$$K^u = \langle K \rangle - D_K (c_1 K_2 + c_2 K_1 + a)^{-1}$$

$$\mu^u = \langle \mu \rangle - D_\mu (c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + b)^{-1} \qquad (2.11)$$

$$D_K \equiv \langle K'^2 \rangle, \ D_\mu \equiv \langle \mu'^2 \rangle, \ a \equiv {}^4/_3 \mu, \ b = {}^1/_6 \langle \mu \rangle \langle 9K + 8\mu \rangle \ \langle K + 2\mu \rangle^{-1}$$

Из выражения (2.3) видно, что усреднение по углам формальной составляющей второй производной функции Грина дает нуль. Это позволяет получить приближение локальности другим методом — игнорированием угловых зависимостей двухточечных смешанных корреляционных функций упругих модулей и деформаций. Такой подход также приводит [10] к соотношениям (2.11).

3. Проведем теперь перенормировку уравнения несовместности в приближении локальности связей между составляющими поля. Выбирая в выражении (1.8) в качестве L оператор (1.2), для случайной составляющей тензора напряжений получим

$$\sigma_{ij}' = R_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \qquad (3.1)$$

Оператор X_{ijkl}, через который выражается случайный оператор R_{ijkl}, может быть представлен в виде

$$X_{ijkl} = G_{ijpq}^{(s)} * \mathrm{Rot}_{pqrs} s_{rskl}' =$$

$$= - \frac{1}{3 \langle q \rangle \langle 3p + q \rangle} [\langle q \rangle \delta_{ij}\delta_{rs} + {}^9/_{20} \langle 2p + q \rangle D_{ijrs}] s_{rskl}' \qquad (3.2)$$

Подставляя сюда явное значение случайной составляющей тензора податливостей согласно выражению (1.2), найдем

$$X_{ijkl} = - ({}^1/_3 p_0' \delta_{ij}\delta_{kl} + {}^1/_2 q_0' D_{ijkl})$$

$$p_0' \equiv \frac{3p'}{\langle 3p + q \rangle}, \quad q_0' \equiv \frac{3q' \langle 2p + q \rangle}{5 \langle q \rangle \langle 3p + q \rangle} \qquad (3.3)$$

При вычислении X_{ijkl} учитывалась лишь сингулярная часть производных функций Грина, а также принято во внимание убывание функции Грина на бесконечности и операторное соотношение $\delta(\mathbf{r}) * = 1$. Таким образом, игнорирование формальных составляющих производных функций Грина приводит к вырождению интегрального оператора X_{ijkl} в тензорную случайную функцию, что эквивалентно замене неоднородного в пределах зерна упругого поля на однородное.

Учитывая, что произведение тензорных функций X_{ijkl} равно

$$X_{ijpq} X_{pqkl} = {}^1/_3 p_0'^2 \delta_{ij}\delta_{kl} + {}^1/_2 q_0'^2 D_{ijkl} \qquad (3.4)$$

а также принимая во внимание соотношения

$$(Q_n')_{ijkl} = - {}^1/_3 p_0' \alpha^{n-1} \delta_{ij}\delta_{kl} - {}^1/_2 q_0' \beta^{n-1} D_{ijkl} \qquad (3.5)$$

$$\alpha \equiv \frac{3 (c_1 - c_2)(p_1 - p_2)}{\langle 3p + q \rangle}, \quad \beta \equiv \frac{3 (c_1 - c_2)(q_1 - q_2) \langle 2p + q \rangle}{5 \langle q \rangle \langle 3p + q \rangle} \qquad (3.6)$$

из равенств (1.8), (3.1) и (3.5) найдем

$$- R_{ijkl} = {}^1/_3 p_0' (1 - \alpha)^{-1} \delta_{ij}\delta_{kl} + {}^1/_2 q_0' (1 - \beta)^{-1} D_{ijkl} \qquad (3.7)$$

$$\sigma_{ij} = (I_{ijkl} + R_{ijkl}) \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \qquad (3.8)$$

$$S_{ijkl} = p\Big(1 - \frac{p_0'}{1 - \alpha}\Big) \delta_{ij}\delta_{kl} + q\Big(1 - \frac{q_0'}{1 - \beta}\Big) D_{ijkl} \qquad (3.9)$$

Отсюда после усреднения получаем верхнее значение для эффективного тензора упругих податливостей

$$S^u_{ijkl} = \langle S_{ijkl} \rangle = p^u \delta_{ij} \delta_{kl} + q^u D_{ijkl} \tag{3.10}$$

$$9p^u = \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle - D_{1/K} \left[\frac{c_1}{K_2} + \frac{c_2}{K_1} + \left\langle \frac{3}{4\mu} \right\rangle \right]^{-1} \equiv \frac{1}{K^l} \tag{3.11}$$

$$4q^u = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle - D_{1/\mu} \left[\frac{c_1}{\mu_2} + \frac{c_2}{\mu_1} + \left\langle \frac{6}{\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\mu} + \frac{2}{K} \right\rangle \left\langle \frac{8}{K} + \frac{9}{\mu} \right\rangle^{-1} \right]^{-1} \equiv \frac{1}{\mu^l}$$

Здесь K^l и μ^l определяют нижнее значение объемного и сдвигового модулей соответственно.

Сопоставим вывод эффективных тензоров упругих модулей, основанный на перенормировке уравнений равновесия и несовместности. В приближении локальности случайных полей оба решения удается представить в виде рядов, однако, поскольку $\alpha\xi \leqslant 0$ и $\beta\eta \leqslant 0$, один из методов приводит к знакопостоянному ряду, а другой — к знакопеременному. Так, если концентрация компонента, обладающего более высокими значениями упругих модулей, превышает концентрацию второго компонента, то $\xi > 0$ и $\eta > 0$ и к знакопостоянному ряду приводит метод перенормировки уравнений равновесия. В противном случае знакопостоянным оказывается ряд, полученный при перенормировке уравнений несовместности.

4. Формулы (2.11) и (3.11) дают приближенные значения эффективных упругих модулей всестороннего сжатия и сдвига. При выводе обеих формул принималось приближение локальности связей между случайной и регулярной составляющими упругого поля. Отсюда следует, что если неоднородный материал таков, что в пределах зерна случайные составляющие тензоров напряжений и деформаций однородны, эти формулы определяют точные значения эффективных упругих модулей. Формулы (2.11) и (3.11) оказываются справедливыми также и в случае нелокальности связей, если последняя такова, что учет многочастичного взаимодействия не меняет характера нелокальности, т. е. если учет многочастичных взаимодействий не требует введения многоточечных моментных функций упругих модулей. Простейшей моделью такого типа является материал, для которого неоднородностью обладает лишь объемный модуль. Действительно, из равенств (1.8)—(1.10) и (2.1)—(2.4) находим, что случайная составляющая тензора деформации в первом и втором приближениях равна

$$\varepsilon'^{(N)}_{ik} = G_{ij,jk} * \Theta^{(N)} \langle \varepsilon_{ll} \rangle$$

$$G_{ij,jk} = -\frac{1}{\langle 3K + 4\mu \rangle} \left[\delta(\mathbf{r}) \delta_{ik} + \frac{3}{4\pi r^3} (\delta_{ik} - 3\psi_{ik}) \right] \tag{4.1}$$

$$\Theta^{(1)} = K', \quad \Theta^{(2)} = K'[1 - K' \langle K + {}^4/_3 \mu \rangle^{-1}]$$

Для материала, обладающего неоднородным объемным модулем при совпадающих сдвиговых модулях фаз, обе формулы (2.11) и (3.11) приводят к одинаковым результатам [1.16]

$$K^u = \langle K \rangle - \frac{D_K}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + {}^4/_3 \mu} \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{K^l} = \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle - D_{1/K} \left(\frac{c_1}{K_2} + \frac{c_2}{K_1} + \frac{3}{4\mu} \right)^{-1} = \frac{1}{K^u}$$

Согласно Хашину и Штрикману [17] в случае неоднородности обоих модулей K и μ вилка определяется следующими выражениями:

$$K_\pm = \langle K \rangle - \frac{D_K}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + a_\pm}, \quad \mu_\pm = \langle \mu \rangle - \frac{D_\mu}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + b_\pm} \tag{4.3}$$

Параметры $a_\pm$ и $b_\pm$ определяются равенствами (2.11), в которых проведена замена $\langle K \rangle$ и $\langle \mu \rangle$ на упругие модули первого компонента для знака плюс и второго — для знака минус, причем принимается $K_1 > K_2$ и $\mu_1 > \mu_2$. Аналогично хашинские значения K_{+} и μ_{+} могут быть получены из формул (3.11) для податливостей соответствующей заменой в коорреляционных поправках средних податливостей $\langle 1/K \rangle$ и $\langle 1/\mu \rangle$ на их значения в первой и второй фазах.

Из рассмотренного следует, что соотношения (2.11) и (3.11) могут быть получены также при помощи метода Хашина—Штрикмана, если в корреляционных поправках к средним модулям формально заменить μ_i на $\langle \mu \rangle$ и $\langle 1/\mu \rangle^{-1}$, и аналогично для K. При этом оказывается, что $\mu^l - \mu^u < \mu_+ - \mu_-$, на что, по-видимому, впервые обратил внимание Александров [14] при изучении проблемы сужения вилки упругих модулей для поликристаллов кубической структуры.

5. В зависимости от соотношений между параметрами смеси истинные значения упругих модулей материала могут лежать как посредине вилки, так и вблизи ее краев [18]. В связи с отмеченным представляет интерес разработка алгоритма, позволяющего приближенно указывать положение эффективного упругого модуля внутри известной вилки. Для этой цели потребуем, чтобы оба выражения (2.11) и (3.11) совпадали. Необходимым и достаточным условием совпадения отмеченных равенств является выполнение следующих соотношений во вторых слагаемых формул (2.11) и (3.11):

$$\langle K \rangle = \langle 1/K \rangle^{-1}, \quad \langle \mu \rangle = \langle 1/\mu \rangle^{-1} \tag{5.1}$$

Соотношения (5.1) выполняются в двух случаях — при совпадении упругих модулей (именно этот тривиальный случай был использован Хашиным и Штрикманом для установления границ) и если модули являются не средними, а эффективными. Примем последнее условие и заменим во вторых слагаемых равенств (2.11) и (3.11) средние упругие модули их эффективными значениями. Тогда в обоих случаях получаем одинаковые формулы

$$K^* = \langle K \rangle - D_K \left(c_1 K_2 + c_2 K_1 + {}^4/_3\, \mu^*\right)^{-1}$$

$$\mu^* = \langle \mu \rangle - D_\mu \left[c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \frac{\mu^* (9K^* + 8\mu^*)}{6(K^* + 2\mu^*)}\right]^{-1} \tag{5.2}$$

Соотношения (5.2) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными, решение которой дает искомые упругие модули. Легко видеть, что из неравенств

$$K_2 \leqslant \langle 1/K \rangle^{-1} \leqslant K^* \leqslant \langle K \rangle \leqslant K_1, \quad \mu_2 \leqslant \langle 1/\mu \rangle^{-1} \leqslant \mu^* \leqslant \langle \mu \rangle \leqslant \mu_1 \tag{5.3}$$

следует:

$$K_- \leqslant K^l \leqslant K^* \leqslant K^u \leqslant K_+, \quad \mu_- \leqslant \mu^l \leqslant \mu^* \leqslant \mu^u \leqslant \mu_+ \tag{5.4}$$

Хотя значения K_+, K_- и μ_+, μ_- определены при условии $(K_1 - K_2) \times (\mu_1 - \mu_2) > 0$, границы для K и μ, определенные формулами (2.11) и (3.11), справедливы при любом знаке отмеченного произведения разностей модулей.

В качестве примера рассмотрим механическую смесь, для каждого из компонентов которой выполняется соотношение $K = {}^4/_3\, \mu$. В этом случае равенства (5.2) сводятся к квадратному уравнению, решение которого имеет вид

$$K^* = {}^4/_3 \mu^* = {}^1/_2 (c_1 - c_2)(K_1 - K_2) + \left[K_1 K_2 + {}^1/_4 (c_1 - c_2)^2 (K_1 - K_2)^2\right]^{1/2} \tag{5.5}$$

Если $c_1 = c_2$, то выражение (5.5) приводит к геометрическому среднему, которое совпадает с известным эмпирическим правилом Лихтенекера [19,20]

$$\ln K^* = c_1 \ln K_1 + c_2 \ln K_2 = \ln \sqrt{K_1 K_2} \tag{5.6}$$

Равенства (5.2) выведены на основе теории случайных функций без учета степени связности компонентов. Поэтому следует с осторожностью применять полученные результаты к матричным смесям, когда один из компонентов занимает односвязную область, а другой — многосвязную. Особенно это относится к пористым средам. Так, полагая $K_2 = \mu_2 = 0$, из уравнений (5.2) находим

$$8x^2 + [3\gamma(2 + c_1) + 4(3-5c_1)]x + 9(1 - 2c_1)\gamma = 0$$

$$x \equiv \mu^* / \mu, \quad \gamma \equiv K_1 / \mu_1 \tag{5.7}$$

а также тривиальные корни $\mu^* = K^* = 0$, отражающие возможное нарушение связности материала.

Из уравнения (5.7) видно, что для $c_1 < {}^1/_2$ положительные корни отсутствуют вовсе. В то же время для $c_1 > {}^1/_2$ уравнение может допускать положительные решения. Например, для $\gamma = {}^4/_3$ будем иметь $x = 1 - 2c_2$, что совпадает с результатом расчета методом вириального разложения в приближении линейном по концентрации [21].

Поступила 4 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. ПМТФ, 1968, № 3.
2. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Статистическое описание упругого поля слоистых материалов. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
3. Hershey A. V. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystal. J. Appl. Mech., 1954, vol. 21, No. 3.
4. Hill R. A self — consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 1965, vol., 13, No. 4.
5. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11.
6. Даринский Б. М., Шермергор Т. Д. Упругие модули поликристаллов кубической структуры. ПМТФ, 1965, № 4.
7. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Вычисление вилки упругих модулей статистически однородных квазиизотропных сред. Сб. Применение метематических методов в геологии. Изд-во «Наука» КазахССР, Алма-Ата, 1968.
8. Даринский Б. М., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. О вычислении упругих модулей поликристаллов. ПМТФ, 1967, № 5.
9. Волков С. Д., Клинских Н. А. К теории свойств упругости поликристаллов. Физ. металлов и металловедение, 1965, т. 19, вып. 1.
10. Хорошун Л. П. К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1967, т. 3, № 9.
11. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
12. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Макроскопические характеристики микронеоднородных твердых тел. Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 3.
13. Kröner E. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 4.
14. Александров К. С. К вычислению упругих констант квазиизотропных поликристаллических материалов. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 2.
15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959, вып. I.
16. Хилл Р. Упругие свойства составных сред; некоторые теоретические принципы. Механика. Сб. обз. и перев. ин. период. лит. Изд. иностр. лит., 1964, № 5.
17. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach of the elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. Phys. Solids., 1963, vol. 11, No. 2.
18. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. К расчету упругих модулей неоднородных материалов. Механ. полимеров. 1968, No. 4.
19. Александров К. С., Айзенберг Л. А. Способ вычисления физических констант поликристаллических материалов. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 5.
20. Хиппель А. Р. Диэлектрики и волны. Изд-во иностр. лит., 1960.
21. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях смеси. Физ. металлов и металловедение, 1959, т. 8, № 2.