ПМТФ, № 5, 1970

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗИРОВАННОЙ НЕФТИ И ГАЗА

Ю. А. Афиногенов

(Новосибирск)

Задача об одномерном движении газированной нефти и газа возникла в связи с проектированием разработки Самотлорского нефтяного месторождения, горизонт A которого представляет собой единую массивную залежь с газовой шапкой в верхней части и подстилающей его подошвенной водой. Предполагается, что площадь месторождения покрыта сетью скважин с определенной частотой. Фильтры скважин располагаются как бы в единой плоскости, которую назовем плоскостью отбора нефти.

Рассматриваются в зависимости от времени положения газо-нефтяного контакта и водо-нефтяного контакта относительно плоскости отбора с целью определения истощения запасов нефти, а также с целью наиболее выгодного расположения плоскости отбора по глубине.

Задача распадается на две: о движении газо-нефтяного контакта и плоскости давления насыщения нефти газом; о движении водо-нефтяного контакта и плоскости давления насыщения. За начало отсчета принимаем плоскость отбора. Ось x принимаем за ось изменения положений газо-нефтяного и водо-нефтяного контактов. Обозначим через L расстояние от плоскости отбора до верхней границы газовой шапки; s_1 — координата положения плоскости давления насыщения в задаче о движении газо-нефтяного контакта; s_2 — координата положения газо-нефтяного контакта; s_3 — координата положения плоскости давления насыщения в задаче о движении водо-нефтяного контакта; s_4 — координата положения водо-нефтяного контакта.

Разделив s_1, s_2, s_3, s_4 на L, перейдем соответственно к безразмерным координатам u_1, u_2, u_3, u_4; l_1 и l_2 — безразмерные координаты начального положения газо-нефтяного контакта и соответственно водо-нефтяного контакта.

Пусть в начальный момент времени давление в пласте $p^\circ > p_1$, где p_1 — давление насыщения, ниже которого из нефти выделяется растворенный газ. Предполагаем, что в процессе разработки пласта давление в плоскости отбора устанавливается постоянным и равным $p_0 < p_1$.

Дополнительно полагаем следующее:

1) имеет место обобщенный закон Дарси для движения нефти, занимающей в единичном объеме порового пространства часть σ ($f(\sigma)$ — относительная проницаемость по нефти)

$$v = -\frac{k}{\mu} f(\sigma) \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

2) плотность нефти ρ практически постоянна; $\rho = \text{const}$ (не зависит от количества выделившегося газа);

3) газовыделение происходит мгновенно и зависит от падения давления ниже давления насыщения

$$\sigma = 1 - a(p_1 - p) \tag{2}$$

где a — малая величина с размерностью $ат^{-1}$;

4) область, занятая газом, $x \in (s_2, L)$, далека от области сильных возмущений давления, так что, предполагая процесс изотермическим, можно написать

$$p_* (L - s_2) = p^\circ (L - l)$$

где $l = s_2(0)$ — первоначальная граница раздела нефть — газ, p_* — переменное давление в области газа в процессе его расширения;

5) в зоне $x \in [s_1(t), s_2(t)]$ режим движения жесткий, так что

$$p = a_1 x + b_1$$

причем a_1, b_1 определяются из граничных условий

$$x = s_1, \quad p = p_1, \qquad x = s_2, \quad p = p_* \tag{3}$$

Отсюда

$$p = \frac{p^\circ (L - l) / (L - s_2) - p_1}{s_2 - s_1} (x - s_1) + p_1 \tag{4}$$

Кинематическое условие при $x = s_2$ дает

$$m \frac{ds_2}{dt} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{k}{\mu} \frac{p^\circ (L - l) / (L - s_2) - p_1}{s_2 - s_1} \tag{5}$$

где m — пористость пласта.

Уравнение (5) нужно интегрировать при начальном условии

$$s_2(0) = l$$

6) в зоне $x \in (0, s_1)$ нефть движется вместе с газом.

По формуле Слихтера — Козени $k = Am^3 / (1 - m)^2$, где A — константа, зависящая от размеров зерен скелета пористой среды. Заменяя m на $m\sigma$, получаем

$$k(\sigma) = A \frac{m^3 \sigma^3}{(1 - m\sigma)^2}$$

и для фазовой проницаемости [1]

$$f(\sigma) = \frac{k(\sigma)}{k} = \frac{(1 - m)^2}{(1 - m\sigma)^2} \sigma^3 \tag{6}$$

Комбинация закона сохранения массы нефти и закона Дарси дает

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1 - m)^2}{(1 - m\sigma)^2} \sigma^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{m \partial \sigma}{\partial t}$$

Подставляя в это уравнение выражение (2) для σ, упростим его, полагая $[1 - a(p_1 - p)]^n \approx 1 - na(p_1 - p)$ $(n = 2, 3)$
получаем

$$\frac{k}{\mu m a} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 - \frac{3 - m}{1 - m} a (p_1 - p) \right] \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{7}$$

Обозначим через q горное давление пород, лежащих выше кровли пласта. Приведем уравнение (7) к безразмерным величинам, полагая

$$\xi = \frac{p}{q}, \quad \xi_1 = \frac{p_1}{q}, \quad \xi_2 = aq, \quad y = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{kt}{\mu m a L^2}$$

$$(\alpha\xi + \beta) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \alpha = \frac{(3 - m)\xi_2}{1 - m}, \qquad \beta = 1 - \alpha\xi_1 \tag{8}$$

Уравнение (8) нужно интегрировать в области $y \in (0, u_1)$, $\tau > 0$ при условиях

$$\xi(0, \tau) = \xi_0, \quad \xi(u_1, \tau) = \xi_1, \quad u_1(0) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(u_1, \tau) = \frac{\xi^0 (1 - l_1) / (1 - u_2) - \xi_1}{u_2 - u_1} \qquad \left(l_1 = \frac{l}{L}, \ \xi_0 = \frac{p_0}{q}, \ \xi^\circ = \frac{p^\circ}{q}\right)$$

Представим ξ в виде

$$\xi = c_0 + c_1 \frac{y}{u_1} + c_2 \frac{y^2}{u_1^2} \tag{10}$$

Используя условия (9) в формулу (4), найдем c_0, c_1, c_2

$$c_0 = \xi_0, \quad c_1 = 2(\xi_1 - \xi_0) - [\xi^\circ (1 - l_1) / (1 - u_2) - \xi_1] u_1 / (u_2 - u_1)$$

$$c_2 = -c_1 + \xi_1 - \xi_0$$

Интегрируем (8) по y в пределах от 0 до u_1. Принимая (10), получаем уравнение, содержащее $du_1/d\tau$ и $du_2/d\tau$. Присоединим к нему уравнение (5), переписанное в безразмерных величинах. Получим систему уравнений

$$\frac{du_1}{d\tau} = f_1(u_1, u_2), \quad \frac{du_2}{d\tau} = -f_2(u_1, u_2) \tag{11}$$

$$f_1(u_1, u_2) = \left\{\frac{B_0 (u_2 - u_1)^2}{u_1} + u_1^2 f_2(u_1, u_2)\left[\frac{\varepsilon_1 (1 + u_1 - 2u_2)}{(1 - u_2)^2} - \varepsilon_2\right]\right\} \times$$

$$\times \left[(\varepsilon_0 - \xi_1)(u_2 - u_1)^2 - u_1(2u_2 - u_1)\left(\frac{\varepsilon_1}{1 - u_2} - \varepsilon_2\right)\right]^{-1}$$

$$f_2(u_1, u_2) = \xi_2 \frac{\xi^\circ (1 - l_1) / (1 - u_2) - \xi_1}{u_2 - u_1}$$

причем

$$B_0 = 2c_2 (\beta + c_0 \alpha) + \alpha (3c_1 c_2 + c_1^2 + 2c_2^2)$$

$$\varepsilon_0 = {}^2/_3 \xi_1 + {}^1/_3 \xi_0, \quad \varepsilon_1 = {}^1/_6 \xi^\circ (1 - l_1), \quad \varepsilon_2 = {}^1/_6 \xi_1$$

Система уравнений (11) интегрируется при начальных условиях

$$u_1(0) = 0, \qquad u_2(0) = l_1 \tag{12}$$

Функции u_1 и u_2 при $t \to \infty$ стремятся к некоторой величине u_*, причем $\xi_* = p_* / q \to \xi_1$. Тогда

$$u_* = 1 - \xi^0 / \xi_1 (1 - l_1)$$

т. е. газ из газовой шапки начнет поступать в скважину после того, как u_2 станет равным u_*.

При этом можно рассмотреть два частных случая:

при $l_1 = 1$ имеем $u_* = 1$, т. е. газовая шапка отсутствует;

при $u_* = 0$ имеем $l_1 = 1 - \xi_1 / \xi^\circ$, т. е. при таком соотношении количеств нефти и газа наступает полный отбор нефти;

при $\tau \to 0$

$$c_1 = 2\gamma, \quad c_2 = -\gamma \ (\gamma = \xi_1 - \xi_0)$$

$$u_1 \approx 2\sqrt{B\tau}, \quad u_2 \approx l_1 - \frac{\xi_2}{l_1}(\xi^\circ - \xi_1)\tau \qquad \left(B = \frac{\gamma(\beta + \alpha\xi_0)}{\xi_1 - \varepsilon_0}\right)$$

По этим формулам вычислены начальные значения нефти при $\tau=1\cdot 10^{-10}$ с начальными условиями

$$u_1 = 34\cdot 10^{-6}, \quad u_2 = l_1$$

В зоне $y \in (0, u_3)$ движение нефти сопровождается выделением растворенного газа. При этом u_3 — граница, на которой давление равно ξ_1.

При $y \in (u_3, u_4)$ режим движения нефти будет жестким, так что

$$\xi = a_2 y + b_2 \tag{13}$$

Здесь u_4 — граница, на которой давление подошвенной воды поддерживается постоянным и равным ξ°.

В этом случае имеем граничные условия

$$y = u_3, \quad \xi = \xi_1; \qquad y = u_4, \quad \xi = \xi^\circ \tag{14}$$

что дает для давления ξ в области $y \in (u_3, u_4)$

$$\xi = \frac{\xi^\circ - \xi_1}{u_4 - u_3} y + \frac{\xi_1 u_4 - u_3 \xi^\circ}{u_4 - u_3}$$

Кинематическое условие при $y = u_4$ аналогично (5) дает

$$\frac{du_4}{d\tau} = -\frac{\xi_2 (\xi^\circ - \xi_1)}{u_4 - u_3} \tag{15}$$

В области $y \in (0, u_3)$ при граничных условиях

$$\xi (0, \tau) = \xi_0, \quad \xi (u_3, \tau) = \xi_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\xi^\circ - \xi_1}{u_4 - u_3} \tag{16}$$

Полагая

$$\xi = \omega_0 + \omega_1 \frac{y}{u_3} + \omega_2 \frac{y^2}{u_3^2}$$

получаем аналогично изложенному выше

$$\frac{du_3}{d\tau} = \left\{ D \frac{(u_4 - u_3)^2}{u_3} - \varepsilon_3 u_3^2 \frac{du_4}{d\tau} \right\} \Big/ \left[(\varepsilon_0 - \xi_1)(u_4 - u_3)^2 - \varepsilon_3 u_3 (2u_4 - u_3) \right] \tag{17}$$

где

$$D = 2\omega_2 (\beta + \alpha\omega_0) + \alpha (3\omega_1\omega_2 + \omega_1^2 + 2\omega_2^2)$$

$$\alpha = (3 - m)\xi_2 / (1 - m), \quad \beta = 1 - \alpha\xi_1, \quad \varepsilon_3 = {}^1/_6 (\xi^\circ - \xi_1)$$

$$\omega_0 = \xi_0, \quad \omega_1 = 2 (\xi_1 - \xi_0) - (\xi^\circ - \xi_1) u_3 / (u_4 - u_3),$$

$$\omega_2 = -\omega_1 + \xi_1 - \xi_0$$

Объединяя уравнения (15) и (17) в систему, отыскиваем ее решение при начальных условиях

$$u_3 (0) = 0, \quad u_4 (0) = l_2 \tag{18}$$

При $\tau \to 0$, $\omega_1 \to 2\gamma$, $\omega_2 \to -\gamma$, поэтому из уравнения (17) имеем

$$u_3 \approx 2 \left[\frac{\gamma (\beta + \alpha\xi_0) \tau}{\xi_1 - \varepsilon_0} \right]^{1/2}, \quad u_4 \approx l_2$$

Решая полученные системы дифференциальных уравнений при различных l_1 и l_2, можно подобрать эти параметры таким образом, чтобы водонефтяной контакт достиг плоскости отбора быстрее, чем газо-нефтяной контакт.

Выбрав оптимальный вариант расположения плоскости отбора нефти от дневной поверхности, отыскиваем истощение запасов месторождения нефти за определенный промежуток времени.

Считаем $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$, $u_3(\tau)$, $u_4(\tau)$ известными функциями после решения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Расход нефти за единицу времени через единицу площади породы при вертикальном движении находим по формуле Дарси

$$Q = \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} f(\sigma) \quad \text{при } x = 0 \qquad (19)$$

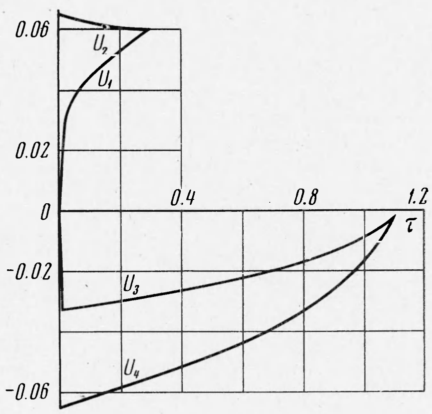
Запишем равенство (19) в безразмерных величинах

$$Q_1 = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{Q\mu L}{kqf(\sigma_0)}, \quad \xi = \frac{p}{q},$$

$$y = \frac{x}{L}, \quad f(\sigma_0) = f(\sigma)|_{x=0}$$

Общий расход нефти Q_2 через единицу площади за промежуток времени от 0 до τ выразится суммой интегралов

$$Q_2 = \int_0^\tau \frac{c_1}{u_1} d\tau + \int_0^\tau \frac{\omega_1}{u_3} d\tau$$



Вычисления были проведены при значениях

$$p_0 = 170\ ат, \quad p_1 = 171\ ат, \quad p^\circ = 172\ ат, \quad q = 350\ ат, \quad L = 154\ м$$

$$\mu = 1.97\ спз, \quad a = 9.76 \cdot 10^{-4}\ ат^{-1}, \quad m = 0.22, \quad k = 0.22\ дарси$$

Коэффициент a был найден при взятых параметрах, руководствуясь [2], при объемном коэффициенте пластовой нефти 1.2 и коэффициенте сжимаемости газа 0.85. Выбранные параметры близки к параметрам Самотлорского нефтяного месторождения. Приводим результаты вычислений для оптимального варианта расположения плоскости отбора.

l_1	$L_{(м)}$	τ_1	l_2	$L_{(м)}$	τ_1
0.09434	159	0.42	0.031446	159	0.253
0.0649	154	0.30	0.0649	154	1.1
0.03356	149	0.17	0.1007	149	2.66

Здесь τ_1 — момент встречи водо-нефтяного или газо-нефтяного контакта с подвижной границей, на которой давление равно ξ_1. На фигуре представлены графики $u_1(\tau)$, $u_2(\tau)$, $u_3(\tau)$, $u_4(\tau)$ при $l_1 = 0.0649$, $l_2 = 0.0649$. Расчеты проведены с помощью ЭВМ.

Автор благодарит В. И. Пеньковского за постановку задачи, а также сотрудников отдела гидродинамики Гипротюменьнефтегаза, любезно предоставивших материалы отчета.

Поступила 5 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
2. Гиматудинов Ш. К. Физика нефтяного пласта. М., Гостоптехиздат, 1963.