

**ОБ УЧЕТЕ ВЯЗКИХ И ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ
ПРИ РЕШЕНИИ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ**

Г. М. Ляхов, Я. А. Паченский

(Москва)

К грунтам и горным породам применяются модели упругопластических сред [1,2]. В соответствии с опытными данными [3-5] была предложена модель грунтов и горных пород, как вязкопластических сред [6]. Ниже дается решение задачи о распространении плоской одномерной волны исходя из этой модели.

В основу программ для ЭВМ положено конечно-разностное представление уравнений движения сплошной среды в переменных Лагранжа и дифференциальных уравнений, определяющих поведение среды. Применена методика «сквозного счета» с псевдовязкостью.

Показано, что затухание плоских волн связано с двумя механизмами диссипации энергии, определяемыми вязкими и пластическими свойствами среды. Размывание скачка может происходить при отсутствии у кривой динамического сжатия участка вогнутого к оси деформации. Максимум деформации при некоторых условиях достигается в период спада напряжения. Эти результаты соответствуют опытным данным [3].

1. Грунт рассматривается как среда, состоящая из твердых минеральных зерен, связанных между собой цементирующими пленками солей и водными пленками. При ударном нагружении мгновенно возникает деформация ϵ_1 , обусловленная сжатием материала пленок и материала самих зерен, а также смещением зерен, находящихся в наименее устойчивом состоянии. Значения этой деформации лежат на диаграмме динамического сжатия среды

$$\sigma = E_D \epsilon_1 \quad (1.1)$$

Деформация ϵ_1 принимается частично обратимой — при уменьшении нагрузки восстанавливается объем за счет разгрузки материала пленок и зерен. При уменьшении нагрузки от σ_*

$$\sigma - \sigma_* = E_R (\epsilon_1 - \epsilon_*), \quad \epsilon_* = \sigma_* / E_D, \quad E_R \geq E_D \quad (1.2)$$

При действии нагрузки в течение конечного времени возникает деформация ϵ_2 , связанная со смещением зерен и их переукладкой. Величина ϵ_2 определяется выражением

$$\sigma = E_2 \epsilon_2 + \eta \epsilon_2 \quad (1.3)$$

где η — коэффициент вязкости среды.

Предельное значение общей деформации грунта ϵ при $\sigma = \text{const}$ и $t \rightarrow \infty$ лежит на диаграмме статического сжатия

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \sigma = E_S \epsilon \quad (1.4)$$

$$E_D^{-1} + E_2^{-1} = E_S^{-1} \quad (1.5)$$

Величина E_2 определяется по экспериментальным значениям E_D и E_S .

Деформация переукладки ϵ_2 принимается необратимой, так как воздух, заключенный в порах, при снятии нагрузки не может преодолеть силы трения между частицами и вернуть их в исходное состояние.

Схема элемента дана на фиг. 1. Если деформация демпфера и пружин 1 и 2 обратимы, то это — вязкоупругая модель, при необратимости деформаций пружины 2 и демпфера имеем вязкопластическую модель. В рамках вязкопластической модели деформация пружины 1 может быть полностью или частично обратима.

Рассмотрим уравнения, определяющие поведение элемента среды. На ударном фронте

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \sigma_* / E_D \quad (1.6)$$

При непрерывном возрастании напряжения из (1.3) и (1.6) получим

$$\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon = \dot{\sigma} / E_D + \mu\dot{\sigma} / E_S, \quad \mu = E_2 / \eta \quad (1.7)$$

Подобное уравнение ранее было получено А. Ю. Ишлинским [7].

В вязкоупругой среде уравнение (1.7) справедливо и при убывании напряжения.

В вязкопластической среде при убывании напряжения ε_1 уменьшается по уравнению

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_* + (\sigma - \sigma_*) / E_R \quad (1.8)$$

где ε_* и σ_* — соответственно максимальные значения ε_1 и σ , достигнутые в элементе среды.

Поведение среды определяется уравнением, следующим из (1.3) и (1.8)

$$\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon = \dot{\sigma}E_R^{-1} + \mu\sigma(E_S^{-1} - E_D^{-1} + E_R^{-1}) + \mu\sigma_*(E_D^{-1} - E_R^{-1}) \quad (1.9)$$

После достижения деформацией ε_2 максимума принимается, что $\varepsilon_2 = \text{const}$, а ε_1 убывает по (1.8). Поведение среды определяется уравнением

$$E_R\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} \quad (1.10)$$

Воспользуемся переменными Лагранжа: h — масса, t — время. Волна создается нагрузкой, действующей на свободной поверхности полупространства. В этом сечении, принимаемом за начальное, при $t = 0$ нагрузка скачком возрастает до σ_m , а затем меняется по уравнениям

$$\sigma = \sigma_m(1 - t/\theta), \quad 0 \leq t \leq \theta, \quad \sigma = 0, \quad \theta \leq t \quad (1.11)$$

От начального сечения распространяется фронт ударной волны со скоростью

$$A = (E_D\rho_0)^{1/2}$$

ρ_0 — начальная плотность среды.

Перед фронтом волны

$$\sigma = 0, \quad u = 0, \quad \rho = \rho_0$$

Уравнение линии фронта в плоскости ht

$$h = At$$

Течение за фронтом определяется основными уравнениями движения

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial h} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial h} = 0 \quad (1.12)$$

Эта система замыкается уравнениями, определяющими поведение среды, которые берутся в зависимости от текущего состояния среды, в виде (1.6), (1.7), (1.9) и (1.10).

Граничные условия: в начальном сечении $\sigma = \sigma_m (1 - t / \theta)$, на линии $h = At$ имеем $\sigma_* = Au_*$. Звездочка означает, что соответствующая величина взята для данной частицы с координатой h при $t = h / A$. Перейдем к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \tau = \mu t, \quad x = \mu h / A, \quad \sigma^\circ = \sigma / \sigma_m, \quad u^\circ = u / u_m, \quad \varepsilon^\circ = \varepsilon / \varepsilon_m \\ u_m = -\sigma_m / A, \quad \varepsilon_m = \sigma_m / E_D \end{aligned} \quad (1.13)$$

Обозначим

$$\gamma = E_D / E_S, \quad \beta = E_D / E_R, \quad \lambda = \mu \theta$$

В новых переменных уравнения движения

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma^\circ}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial \tau} = 0 \quad (1.14)$$

Уравнения, определяющие поведение среды

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^\circ + \varepsilon = \dot{\sigma}^\circ + \gamma \sigma^\circ \\ \dot{\sigma}^\circ + \varepsilon^\circ = \beta \dot{\sigma}^\circ + \sigma^\circ (\gamma + \beta - 1) + \sigma_*^\circ (1 - \beta) \\ \dot{\varepsilon}^\circ = \beta \dot{\sigma}^\circ \end{aligned} \quad (1.15)$$

Нагрузка в начальном сечении в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \sigma^\circ = 1 - \tau / \lambda, \quad 0 \leq \tau \leq \lambda \\ \sigma^\circ = 0, \quad \tau \geq \lambda \end{aligned}$$

Условие на фронте волны при $x = \tau$

$$\sigma^\circ = -u^\circ$$

Градус у безразмерных величин в дальнейшем опускаем.

Решение определяется заданием семи размерных параметров $\sigma_m, E_D, E_S, E_R, \rho_0, \mu, \theta$. При переходе к выбранным безразмерным переменным число определяющих параметров сокращается до трех γ, β, λ . Это связано с линейностью уравнений, определяющих поведение среды. Уменьшение числа параметров позволяет результаты одного расчета на ЭВМ применить к ряду сред и начальных условий.

Для численного решения системы (1.14), (1.15) используется разностная схема «крест» [8]. Схема этого типа применена в [9] для описания одномерных движений газа и упругопластического материала. Решение ищется на сетке, равномерной по x и неравномерной по τ . Имеются пространственные и временные слои сетки с целыми и полуцелыми номерами. Величина u определяется в точках с полуцелыми по времени и целыми по пространству номерами, величины σ и ε — в точках с номерами, целыми по времени и полуцелыми по пространству. Разностные уравнения имеют вид

$$\frac{u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}}{\Delta \tau^n} = \frac{\sigma_{j+1/2}^n - \sigma_{j-1/2}^n - q_{j+1/2}^{n-1/2} + q_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (1.16)$$

$$\frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{j+1/2}^n}{\Delta \tau^{n+1/2}} = \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (1.17)$$

$$\frac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} - \sigma_{j+1/2}^n}{\Delta \tau^{n+1/2}} = a_1 \frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{j+1/2}^n}{\Delta \tau^{n+1/2}} + \frac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} + \sigma_{j+1/2}^n}{2} + a_3 \frac{\varepsilon_{j+1/2}^{n+1} + \varepsilon_{j+1/2}^n}{2} + a_4 \quad (1.18)$$

Уравнения неразрывности и импульса аппроксимируются аналогично [8, 9]. Уравнение (1.18) аппроксимирует закон деформирования материала

(1.14), (1.15). Величины a_1, a_2, a_3, a_4 суть коэффициенты при $\epsilon, \sigma, \epsilon$ и свободный член в (1.14) — (1.15) соответственно. В (1.16) q — квадратичная псевдовязкость Неймана — Рихтмайера [10]

$$q_{j+1/2}^{n-1/2} = \frac{C_q (u_{j+1}^{n-1/2} - u_j^{n-1/2})^2}{1 + (\epsilon_{j+1/2}^n + \epsilon_{j+1/2}^{n-1})/2} \quad \text{при } u_{j+1} < u_j$$

$$q_{j+1/2}^{n-1/2} = 0 \quad \text{при } u_{j+1} > u_j \quad (1.19)$$

Наличие в уравнении (1.16) псевдовязкости вызывает замену резких ударных фронтов зонами непрерывного изменения параметров, причем параметры на границах этой зоны связаны условиями на скачке. Значения константы C_q ограничены сверху требованием малости ширины зоны размыва, а снизу — требованием малости возмущений, возникающих при использовании данного вычислительного метода и не связанных с физической сущностью процесса. Использовалось значение $C_q = 0.6$.

Система (1.16) — (1.18) аппроксимирует (1.14), (1.15) со вторым порядком точности. Это следует из результатов подстановки в (1.16), (1.17) и (1.18) разложений в ряд Тейлора искомых функций близ точек (x_j, τ^n) и $(x_{j+1/2}, \tau^{n+1/2})$ соответственно.

На каждом временном слое последовательно вычисляются $\sigma_{i/2}^{n+1} = 1 - \tau^{n+1}/\lambda$, $\epsilon_{i/2}^{n+1}$ по (1.18), $u_0^{n+1/2}$ по (1.17), затем для $j \geq 1$ $u_j^{n+1/2}$ по (1.16), $\epsilon_{j+1/2}^{n+1}$ по (1.17), $\sigma_{j+1/2}^{n+1}$ по (1.18), $q_{j+1/2}^{n+1/2}$ по (1.19) и, наконец, $\Delta\tau^{n+3/2}$ и $\Delta\tau^{n+1} = (\Delta\tau^{n+1/2} + \Delta\tau^{n+3/2})/2$ по условию устойчивости, получаемому методом замораживания коэффициентов [8].

Для выяснения точности численного метода один и тот же вариант рассчитывался на сетках с шагом Δx и $\Delta x/2$.

При малых x ширина зоны размывания в случае расчета с более мелкой сеткой уменьшилась вдвое при сохранении величины напряжения и скорости волны. При больших x ширина зоны размывания и остальные параметры не изменились. Это показывает, что размывание скачка следует из модели среды, учитывающей вязкие свойства, а не из метода счета, связанного с введением псевдовязкости. Из решения аналогичной задачи методом характеристик, когда скачок рассчитывается точным образом, также было получено его размывание в среде обладающей вязкими свойствами.

2. На ЭВМ были просчитаны шесть вариантов, отличающихся значениями λ, γ и β :

Вариант	γ	λ	β
1	1.1	50	0.5
2	2	50	0.5
3	4	50	0.5
4	2	5	0.5
5	2	0.5	0.5
6	2	50	1

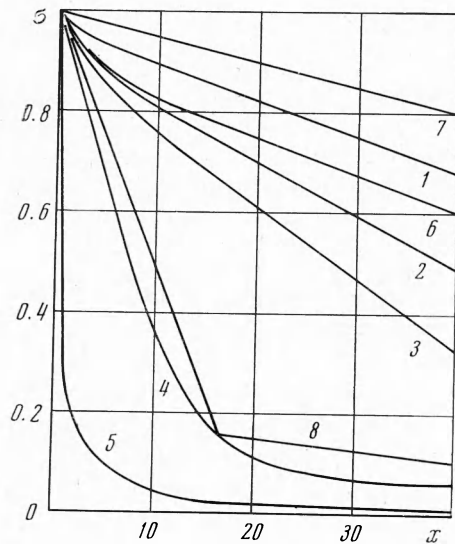
Это число вариантов позволяет проанализировать влияние значений λ, γ и β на параметры волны.

Из расчета следует, что в плоскости $x\tau$ при прохождении волны возникает ряд областей: 1 — невозмущенная среда, 2 — нарастание напряжения и деформации, 3 — убывание напряжения и нарастание деформации, 4 — убывание напряжения и деформации.

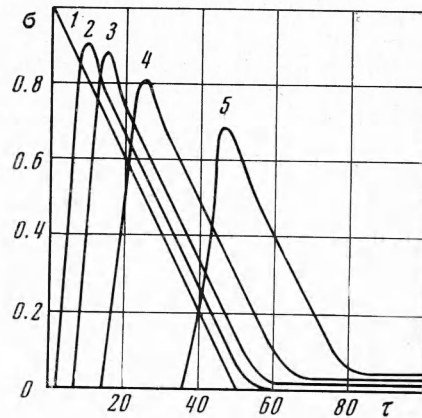
Границы областей: 1, 2 — фронт волны, соответствующий скачку σ и ϵ ; 2, 3 — максимуму напряжения; 3, 4 — максимуму деформации.

В зависимости от значений λ, γ и β конфигурация областей меняется.

На фиг. 2 приведены графики зависимости максимального напряжения от расстояния. Нумерация графиков соответствует последовательности вариантов, приведенных выше. Сопоставление графиков 1—3 показывает, что с возрастанием γ интенсивность угасания волны возрастает. Физически увеличение γ соответствует возрастанию отклонения диаграммы статического сжатия от диаграммы динамического сжатия, что обуславливает более полное проявление вязких свойств среды.

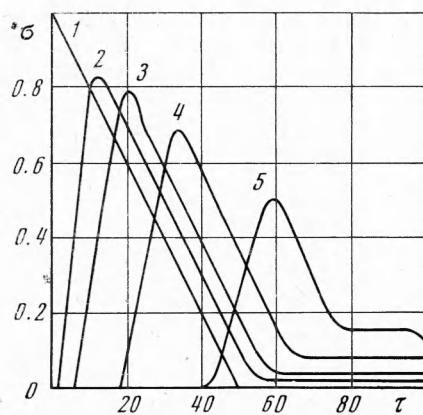


Фиг. 2

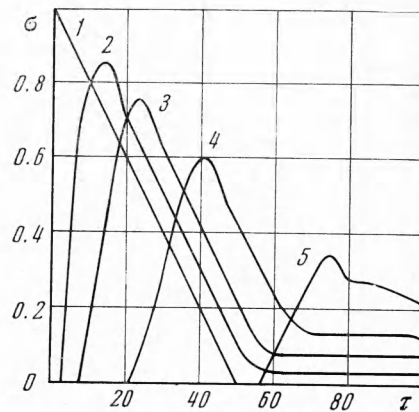


Фиг. 3

Сопоставление графиков 2—5 целесообразно провести в двух интерпретациях при $\mu = \text{const}$ или $\theta = \text{const}$. Положим $\mu = 1000 \text{ сек}^{-1}$. Тогда λ , равным 50, 5 и 0.5, соответствует θ , равные 0.05, 0.005 и 0.0005 сек. Из



Фиг. 4



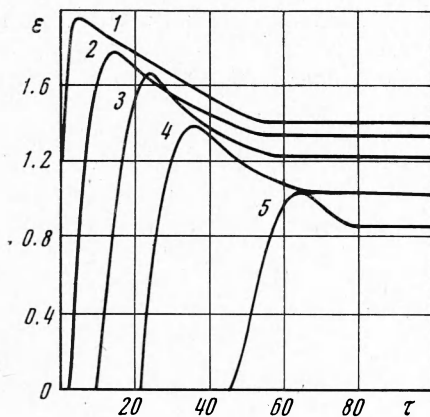
Фиг. 5

графиков следует, что с уменьшением θ интенсивность убывания напряжения с расстоянием увеличивается, т. е. короткие волны угасают быстрее. Положим теперь постоянной θ . Пусть $\theta = 0.05 \text{ сек}$. Тогда значениям λ , равным 50, 5 и 0.5, соответствуют значения μ , равные 1000, 100 и 10 сек^{-1} . Изменения μ приводит к изменению масштаба пространственной координаты. Из условия $x/\mu = h/A$ следует, что отрезку $x = 10$ соответствует

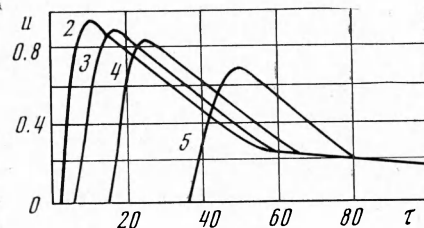
одна и та же величина h/A , равная при трех значениях μ 10^{-3} , 10^{-2} и 10^{-1} сек. Учитывая это изменение масштаба, получим из сопоставления графиков 2, 4, 5, что с увеличением μ интенсивность угасания волны возрастает. Значение $\mu = 500-1000$ сек $^{-1}$ соответствует неплотным песчаным грунтам [3].

Рассмотрим изменение σ , ϵ , u со временем в фиксированных точках среды. На фиг. 3—5 представлены графики зависимости безразмерного напряжения от времени при $\lambda = 50$ и γ , равных соответственно 1.1, 2 и 4. Во всех случаях, графики, отмеченные цифрами 1—5 относятся к сечениям среды с координатой, равной соответственно 0, 5, 10, 20 и 40. Из сопоставления графиков следует, что увеличение γ приводит к более медленному нарастанию напряжения до максимума и, следовательно, к более быстрому превращению волны из ударной в непрерывную.

На фиг. 6, 7 даны графики ϵ (τ) и u (τ) при $\lambda = 50$ и $\gamma = 2$ в тех же



Фиг. 6



Фиг. 7

сечениях. Из сравнения графиков напряжения и деформации (фиг. 4 и 6) следует, что максимальная деформация достигается в период спада напряжения. Возрастание γ от 2 до 4 приводит к увеличению максимальной деформации от 1.88 до 3.7. (График при $\gamma = 4$ не приводится.) Это связано с увеличением сжимаемости среды при возрастании γ .

3. Проведем далее сопоставление параметров волн в пластических и вязкопластических средах. Воспользуемся моделью пластической среды, в которой нагрузка происходит по прямой $\sigma = E_D \epsilon$, а разгрузка — по прямой $\sigma - \sigma_m = E_R (\epsilon - \epsilon_m)$. Эта модель является предельным случаем применяемой модели вязкопластической среды, соответствующей $E_S \rightarrow E_D$ или $\mu \rightarrow 0$. Для такой среды ранее [6] было получено аналитическое решение задачи о распространении плоской волны, создаваемой нагрузкой, меняющейся в начальном сечении по уравнениям

$$\begin{aligned} \sigma &= 0, & t \leq 0 \\ \sigma &= \sigma_m (1 - t/\theta), & 0 \leq t \leq \theta \\ \sigma &= 0, & t \geq \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Максимальное напряжение при этом на фронте волны в среде в переменных h, t определяется выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\sigma_m} &= 1 - \frac{A_R^2 - A^2}{2A_R^2} \frac{h}{A\theta}, & \frac{h}{A\theta} \leq \frac{A_R}{A_R - A} \\ \frac{\sigma}{\sigma_m} &= \frac{A_R - A}{A_R + A} \left(1 - \frac{(A_R - A)^2}{2A_R^2} \frac{h}{A\theta} \right), & \frac{A_R}{A_R - A} \leq \frac{h}{A\theta} \leq \frac{(A_R + A) A_R}{(A_R - A)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{(A_R - A)^2}{(A_R + A)^2} \left[1 - \frac{(A_R - A)^2 (A_R^2 - A^2)}{2AA_R(A_R + A)} \frac{h}{A\theta} \right], \quad \frac{h}{A\theta} \geq \frac{(A_R + A) A_R}{(A_R - A)^2} \quad (3.3)$$

$$A = (E_D \rho_0)^{1/2}, \quad A_R = (E_R \rho_0)^{1/2} \quad (3.4)$$

На фиг. 2 приведены графики 7 и 8, построенные по этим уравнениям для случая $A_R = \sqrt{2}A$, т. е. $\beta = 0.5$. При этом графики 7 и 8 относятся к предельному случаю ($\gamma \rightarrow 1$) варианта 2 и 4. График для пластической среды, соответствующий варианту 5, не приводится, так как он практически совпадает с этим графиком. С уменьшением λ графики для пластической и вязкопластической сред сближаются.

Таким образом, расчеты показывают, что в вязкопластической среде волны угасают быстрее, чем в пластической. Это связано с дополнительными потерями энергии. Учет вязкости приводит также к изменению профиля волны — превращению ударной волны в непрерывную волну сжатия. Максимум деформации не совпадает с максимумом напряжения, он достигается в период спада напряжения. Степень влияния вязких свойств зависит от параметров среды λ , γ и β . С возрастанием λ и γ влияние вязкости увеличивается. При $\mu \rightarrow 0$ или при $E_D \rightarrow E_S$ среда превращается в пластическую. Уменьшение β соответствует увеличению влияния пластических свойств среды. Оно приводит к более быстрому угасанию волны как в пластической, так и в вязкопластической средах. Эти результаты соответствуют опытным данным.

Авторы благодарят С. С. Григоряна за обсуждение работы.

Поступила 7 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
2. Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Алексеев Н. А. Вопросы динамики грунтов. М., Изд-во МГУ, 1964.
3. Ляхов Г. М. Определение вязких свойств грунта. ПМТФ, 1968, № 4.
4. Покровский Г. И., Наседкин Н. А., Синельщиков С. И. Исследование сжатия почвы при различных скоростях деформации. Почвоведение, 1938, № 1.
5. Ставницер Л. Р. Исследование динамической сжимаемости грунтов. Сб. тр. Науч.-исслед. ин-та оснований и подземн. сооруж., 1956, вып. 56.
6. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Волны в плотных средах и нагрузки на сооружения. М., «Недра», 1967.
7. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
8. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
9. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
10. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во иностр. лит., 1960.