

но при $k = 10^{-16}$ и 10^{-14} м² для $T_0 = 500$ К, $S_0 = 0,5$, $p^0 = 10^5$ Па.

Результаты выполненных в рамках предложенной модели расчетов свидетельствуют, что в диапазоне высоких проницаемостей, представляющем интерес с практической точки зрения, решения с подвижными скачками насыщенности не реализуются. Это означает, что происходит вынос из пласта теплоносителя в том качественном состоянии, в котором он находился изначально. Вид получаемых в процессе решения задачи распределений водонасыщенности во многом определяется особенностями совместной фильтрации воды и пара при различных проницаемостях и свидетельствует о процессах частичной конденсации и парообразования в пласте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brownell D. H., Garg S. K., Pritchett J. W. Governing equations of geothermal reservoirs // Water Resour. Res.— 1977.— V. 13, N 6.
2. Faust C. R., Mercer J. W. Geothermal reservoir simulation. 1. Mathematical models for liquid- and vapour-dominated hydrothermal systems // Water Resour. Res.— 1979.— V. 15, N 1.
3. Grant M. A. Geothermal reservoir modelling // Geothermics.— 1983.— V. 12.— P. 251.
4. O'Sullivan M. J. Geothermal reservoir simulation // Intern. J. Energy Res.— 1985.— V. 9.— P. 319.
5. White R. E. An enthalpy formulation of the Stefan problem // SIAM J. Numer. Anal.— 1982.— V. 19, N 6.
6. Мейрманов А. М. Задача Стефана.— Новосибирск: Наука, 1986.
7. Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Явление «перегрева» и образование двухфазной зоны при фазовых переходах в мерзлых грунтах // ДАН СССР.— 1987.— Т. 294, № 5.
8. Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Автомодельное решение задачи о протаивании мерзлого грунта // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 6.
9. Бондарев Э. А., Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. К математическому моделированию диссоциации газовых гидратов // ДАН СССР.— 1989.— Т. 308, № 3.
10. Вукалович М. П. Термодинамические свойства водяного пара (таблицы и диаграммы).— М.: Гостехиздат, 1946.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 1.
12. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач.— М.: Мир, 1982.
13. Grant M. A., Donaldson I. G., Bixley P. F. Geothermal reservoir engineering.— N. Y.: Acad. Press, 1982.

г. Москва

Поступила 18/IV 1990 г.

УДК 536.24:517.9

У. Г. Абдуллаев

КОНЕЧНАЯ СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Основным законом нестационарной фильтрации в пористой среде является классический закон Дарси, в котором предполагается, что равновесное состояние между градиентом давления и скоростью достигается мгновенно. На самом деле «равновесность» достигается с некоторым запаздыванием, и, чтобы учесть это явление в реологических уравнениях, скорость v и давление p заменяются на $v + \lambda_v dv/dt$, $p + \lambda_p dp/dt$, где $\lambda_v > 0$ — время запаздывания скорости, $\lambda_p > 0$ — время релаксации давления. Физический смысл подобной замены состоит в том, что после мгновенного снятия перепада давления движение не прекращается мгновенно, а убывает во времени как $\exp(-\lambda_v^{-1}t)$. Если же мгновенно прекратить движение, то градиент давления затухает во времени как $\exp(-\lambda_p^{-1}t)$. Нарушение «равновесного» соответствия между скоростью фильтрации и градиентом давления можно объяснить релаксационными эффектами, которые обусловлены: а) инерцией жидкости и запаздыванием скорости от градиента давления; б) релаксацией давления и запаздыванием градиента давления от скорости; в) сложностью структуры (трещиноватостью, кавернозностью и т. д.) и диссипативными свойствами пористой среды; г) микронеоднородностью составных пористых сред и т. п. [1].

Для изучения процессов фильтрации неньютоновских нефтей, растворов полимеров, смесей, эмульсий и пр. необходимо выявление различных релаксационных эффектов. В данной работе рассматривается задача нестационарной фильтрации в пористой среде, описываемой обобщенным законом Дарси, в котором предполагается, что равновесное состояние между скоростью фильтрации и градиентом давления достигается с некоторым запаздыванием [1]. При этом время релаксации давления λ_p функционально зависит от темпа изменения давления $\partial p/\partial t$. Найдены условия для конечной скорости распространения возмущений и локализации граничных режимов с обострением. Построен пример, показывающий, что при сколь угодно малом λ_p , функциональная зависимость $\lambda_p = \lambda(\partial p/\partial t)$ приводит к эффекту локализации граничного режима с обострением (*LS*-режим [2]).

1. С учетом явлений запаздывания в линейном приближении вместо классического закона Дарси имеет место уравнение

$$(1.1) \quad v + \lambda_p \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \lambda_p \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

($k > 0$ — коэффициент проницаемости пористой среды, $\mu > 0$ — вязкость фильтрующейся жидкости [1, 3]). Аналогичному реологическому уравнению удовлетворяют линейные вязкоупругие жидкости Олдройда первого порядка [4, 5]. Закон релаксационной фильтрации (1.1) описывает также процессы фильтрации капельно-сжимаемой жидкости в трещиновато-пористых и кавернозных средах [6].

В настоящей работе предполагается, что время релаксации λ_p функционально зависит от темпа изменения давления, т. е. $\lambda_p = \lambda(\partial p/\partial t)$, где $\lambda(u)$ — непрерывная функция при $u \in R^1$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(u) > 0$ и $\lambda'(u)$ непрерывна при $u \neq 0$. Установлено, что даже при сколь угодно малом $\lambda(u)$ наблюдаются эффекты, которые в линейном случае отсутствуют.

Согласно предположениям теории упругого режима [3, 6], соотношение (1.1) приводит к нелинейному уравнению релаксационной фильтрации:

$$(1.2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \lambda_p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

($\kappa > 0$ — известное число, зависящее от свойств пористой среды и фильтрующейся жидкости).

Уравнение (1.2) рассматривается в области $\Omega = [0; \infty) \times [0; T)$, $0 < T \leq \infty$. Физический смысл имеют такие обобщенные решения $p(x, t)$, которые непрерывны и с непрерывными производными $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \times \frac{\partial p}{\partial t} \right)$.

2. Исследуем вопрос о конечной скорости распространения возмущений процессов, описываемых (1.2). Как известно, у уравнения (1.2) при $\lambda = \text{const}$ такого свойства нет, и начально-граничные возмущения распространяются с бесконечной скоростью [7].

Пусть выполнено условие

$$(2.1) \quad \int_0^1 \frac{\eta \lambda'(\eta) + \lambda(\eta)}{\left[\int_0^\eta (\xi^2 \lambda'(\xi) + \xi \lambda(\xi)) d\xi \right]^{1/2}} d\eta < \infty.$$

В этом случае имеет смысл функция

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{\eta \lambda'(\eta) + \lambda(\eta)}{\left[\int_0^\eta (\xi^2 \lambda'(\xi) + \xi \lambda(\xi)) d\xi \right]^{1/2}} d\eta, \quad u \geq 0, \quad \Phi(0) = 0.$$

Построим частное автомодельное решение уравнения (1.2) типа бегущей волны

$$p(x, t) = f(\xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\lambda_p}} t - x \geq 0.$$

Подставляя эту функцию в (1.2), находим

$$(2.2) \quad f_1' = \kappa (\lambda (f_1') f_1)''$$

($f_1 = \sqrt{\kappa/\lambda_v} f$). Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка (2.2) эквивалентно следующей системе трех уравнений первого порядка:

$$(2.3) \quad f_1' = g, \quad \kappa (\lambda (g) g)' = g_1, \quad g_1' = g.$$

Из второго и третьего уравнений (2.3) получим

$$(2.4) \quad \kappa g d(\lambda(g)g) = g_1 dg_1.$$

Интегрируя (2.4), а также учитывая, что при $g = 0$ $g_1 = \kappa (\lambda(g)g)' = 0$, имеем

$$g_1 = \sqrt{2\kappa} \left[\int_0^g \eta d(\eta \lambda(\eta)) \right]^{1/2}.$$

Подставляя последнее во второе уравнение системы (2.3), запишем

$$(2.5) \quad \frac{d(\lambda(g)g)}{\left[\int_0^g \eta d(\eta \lambda(\eta)) \right]^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} d\xi.$$

Интегрируя (2.5) и учитывая (2.4), находим

$$\Phi(g(\xi)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa}} (\xi - \xi_0), \quad \xi \geq \xi_0.$$

Полагая $\xi_0 = 0$, получим

$$g(\xi) = \Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \xi), \quad 0 \leq \xi < \sqrt{\kappa/2} \cdot \Phi_*, \quad g(0) = 0$$

($\Phi_* = \Phi(\infty)$). Наконец, из первого уравнения системы (2.3), учитывая, что $f(\xi) = \sqrt{\lambda_v/\kappa} \cdot f_1(\xi)$, $f(0) = 0$, находим

$$f(\xi) = \sqrt{\lambda_v/\kappa} \int_0^{\xi} \Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \eta) d\eta, \quad 0 \leq \xi < \sqrt{\kappa/2} \cdot \Phi_*, \quad f(0) = 0.$$

Продолжим функцию $f(\xi)$ нулем в область $\{\xi < 0\}$. Так как $\Phi^{-1}(0) = 0$, то непрерывность $f(\xi)$ и $f'(\xi) = \sqrt{\lambda_v/\kappa} \cdot \Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \xi)$ при этом не нарушится. Если

$$\begin{aligned} [\lambda(\sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot f') f']' &= \{ \sqrt{\lambda_v/\kappa} \cdot \lambda[\Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \xi)] \Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \xi) \}' = \\ &= \frac{\sqrt{2\lambda_v}}{\kappa} \left[\int_0^{\Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \xi)} (\eta^2 \lambda'(\eta) + \eta \lambda(\eta)) d\eta \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

то функция $(\lambda(\sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot f') f')'$ также непрерывна при $0 \leq \xi < \sqrt{\kappa/2} \cdot \Phi_*$ и остается таковой после указанного продолжения в область $\{\xi < 0\}$. Таким образом, построено обобщенное решение уравнения (1.2):

$$(2.6) \quad p(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_v/\kappa} \int_0^{\xi} \Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \eta) d\eta, & 0 \leq x \leq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t, \\ 0, & x \geq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t \end{cases}$$

($\xi = \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t - x$). Оно существует в течение времени $0 \leq t < T_* = \sqrt{\lambda_v/2} \cdot \Phi_* \leq \infty$ и удовлетворяет следующим начально-краевым условиям в Ω :

$$(2.7) \quad p(x, 0) = 0, \quad \partial p(x, 0)/\partial t = 0, \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$(2.8) \quad p(0, t) = \sqrt{\lambda_v/\kappa} \int_0^{\sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t} \Phi^{-1}(\sqrt{2/\kappa} \cdot \eta) d\eta, \quad p(\infty, t) = 0, \quad 0 \leq t < T_*.$$

Таким образом, уравнение (1.2) имеет решение, которое при каждом $t \in [0; T_*)$ является финитным по x : $p(x, t) = 0$ при $x \geq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t$.

П р и м е р 1. Пусть $\lambda(u) = |u|^n$. Нетрудно проверить, что условие (2.4) выполняется при $n > 0$ и решение (2.6) примет вид

$$p(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\lambda_v(n+1)}{n+2}} \left[\frac{n(\sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t - x)}{\sqrt{2\kappa(n+1)(n+2)}} \right]^{(n+2)/n}, & 0 \leq x \leq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t, \\ 0, & x \geq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t, \quad 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

при начальных условиях (2.7) и граничных условиях

$$p(0, t) = \sqrt{\frac{2\lambda_v(n+1)}{n+2}} \left[\frac{nt}{\sqrt{2\lambda_v(n+1)(n+2)}} \right]^{(n+2)/n}, \quad p(\infty, t) = 0, \\ 0 \leq t < \infty.$$

При каждом $t > 0$ $p(x, t)$ имеет ограниченный носитель $[0; \sqrt{\kappa/\lambda_v} \times \times t]$, в котором является выпуклой функцией по x .

3. Пусть $\Phi_* < \infty$ и

$$(3.1) \quad \int_0^{\Phi_*} \Phi^{-1}(\eta) d\eta = \infty.$$

В этом случае решение (2.6) существует в течение ограниченного отрезка времени $[0; T_*]$ и, как видно из (2.8), $p(0, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_* - 0$, т. е. наблюдается граничный режим с обострением. Однако, несмотря на это, возмущения локализованы на ограниченном отрезке $[0; x_*]$, $x_* = \sqrt{\kappa/2} \times \times \Phi_* < \infty$. Кроме того, существует предельное распределение давления в момент обострения T_* :

$$p(x, T_*) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_v/2} \int_0^{\Phi_* - \sqrt{2/\kappa} \cdot x} \Phi^{-1}(\eta) d\eta, & 0 < x \leq x_*, \\ 0, & x \geq x_*. \end{cases}$$

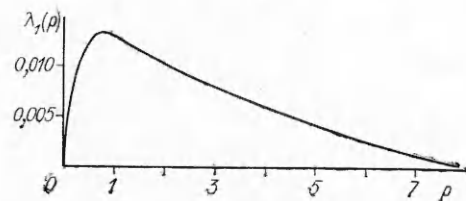
и $p(x, T_*) < \infty$ при $x > 0$. В терминологии [2], это означает, что имеет место *LS*-режим с обострением.

П р и м е р 2. Пусть $\kappa\lambda(u) = \lambda_\varepsilon(u)$,

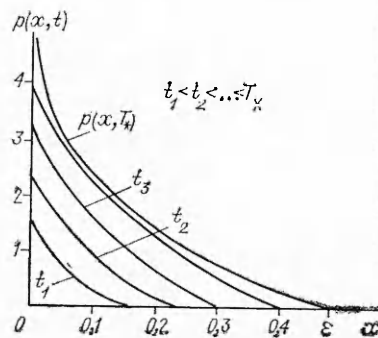
$$\lambda_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon u} - \frac{\varepsilon \ln(1 + \varepsilon u)}{u(1 + \varepsilon u)} - \frac{\varepsilon^3 u}{2(1 + \varepsilon u)^2}, \quad u > 0, \quad \lambda_\varepsilon(0) = 0$$

($\varepsilon > 0$ — произвольное число). На рис. 1 приведен график функции λ_ε при $\varepsilon = 1$. В этом случае у уравнения (1.2) есть решение

$$(3.2) \quad p(x, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda_v}}{\sqrt{\kappa}} \left\{ -\ln \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\lambda_v}} t - x \right) \right] - \frac{\sqrt{\kappa}}{\varepsilon \sqrt{\lambda_v}} t + \frac{x}{\varepsilon} \right\}, & 0 \leq x \leq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t, \\ 0, & x \geq \sqrt{\kappa/\lambda_v} \cdot t \end{cases}$$



Р и с. 1



Р и с. 2

при $0 \leq t < T_* = \sqrt{\lambda_v/\kappa} \cdot \varepsilon$. График функции $p(x, t)$ в различные моменты времени приведен на рис. 2. Решение (3.2) удовлетворяет начальным условиям (2.7) и следующим граничным условиям:

$$p(0, t) = \sqrt{\lambda_v/\kappa} \left\{ -\ln \left[1 - \frac{\sqrt{\kappa/\lambda_v}}{\varepsilon} t \right] - \frac{\sqrt{\kappa/\lambda_v}}{\varepsilon} t \right\}, \quad 0 \leq t < T_*,$$

$$p(\infty, t) = 0, \quad 0 \leq t < T_*.$$

Как видно, $p(0, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_* - 0$ и за время обострения волна проникает на конечную глубину $x_* = \varepsilon$ и $p(x, t) = 0$ при $x \geq x_*$, $0 \leq t \leq T_*$; при этом решение $p(x, t)$, кроме точки $x = 0$, равномерно по $t \in [0; T_*]$, ограничено предельной кривой $p(x, T_*)$ (рис. 2):

$$p(x, t) \leq p(x, T_*) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_v/\kappa} \left[-\ln \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - 1 + \frac{x}{\varepsilon} \right], & 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 0, & x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon(u) = 0$ для любого $u \geq 0$. Из рис. 1 видно, что за счет выбора ε функция λ может быть сделана сколь угодно малой, однако, несмотря на это, функциональная зависимость $\lambda(\partial p/\partial t)$ приводит к эффекту локализации граничного режима с обострением.

Автор выражает благодарность А. Х. Мирзаджанзаде за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х., Ширинзаде С. А. Повышение эффективности и качества бурения глубоких скважин. — М.: Недра, 1986.
2. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
3. Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штанин А. В. Релаксационная фильтрация. — Казань: Изд. КГУ, 1980.
4. Oldroyd J. G. Non-linear stress, rate of strain relations at finite rate of shear in co-called «linear elastico-viscous» liquids // Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics: Proc. Intern. Symp. 1962. — L., 1964.
5. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. — М.: Мир, 1964.
6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик И. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Недра, 1972.
7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977.

г. Баку

Поступила 24/1 1990 г.,
в окончательном варианте — 3/1 1990 г.

УДК 532.546

О. Ю. Динариев

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КРИВОЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

В лабораторных экспериментах обнаружено, что для процессов фильтрации жидкостей с характерным временем переменности $\sim 10^3$ с теоретические предсказания на основе модели упругого режима могут отличаться на порядок от реально наблюдаемых величин [1—3]. Поэтому при описании быстропеременных явлений при фильтрации жидкости нужно отказаться от уравнений классической модели упругого режима [4, 5] и использовать уравнения релаксационной теории фильтрации [6, 7]. В частности, начальный участок кривой восстановления давления (КВД) должен анализироваться с позиций релаксационной теории фильтрации. Ранее были получены различные приближенные формулы для КВД, когда релаксационное ядро имело некоторый частный вид [6]. Наиболее общий случай, рассмотренный в [6], соответствует выбору фурье-образа релаксационного ядра в виде отношения двух полиномов второго порядка. В настоящей работе найдены точные результаты для начального участка КВД при произвольном виде ядра, совместимом с физическими и термодинамическими требованиями.