

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛАСТИЧНОЙ ГРАНИЦЫ
С ВЯЗКИМ ПОДСЛОЕМ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

Б. Н. Семенов

(Новосибирск)

Пристенная область турбулентного пограничного слоя играет большую роль в создании сопротивления. В ней происходит интенсивное порождение турбулентности. Ниже исследуется взаимодействие эластичной границы с вязким подслоем на предмет уменьшения рейнольдсовых напряжений, а соответственно, для уменьшения сопротивления. Проведение исследования в общем случае не представлялось возможным. Поэтому задача решается в рамках ограничений, сделанных Штернбергом [1] при рассмотрении теории вязкого подслоя в турбулентном течении около твердой гладкой стенки.

Рассматривается система: три уравнения движения и уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p — пульсационное давление ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, u, v, w — составляющие пульсационной скорости в направлении осей координат.

Предполагается возможным разложение пульсаций в ряд Фурье и проведение операций над отдельными его составляющими.

Изменение пульсаций скорости поперек подслоя (по y) наиболее значительно по сравнению с изменением их вдоль потока (по x) или в направлении z , поэтому последние два не рассматриваются. И решение ищется в подслое в виде

$$\begin{aligned} u &= \text{Re} \{h(y) \exp [i(k_x x + k_z z - \beta t)]\} \\ v &= \text{Re} \{g(y) \exp [i(k_x x + k_z z - \beta t)]\} \\ w &= \text{Re} \{k(y) \exp [i(k_x x + k_z z - \beta t)]\} \\ k_x &= 2\pi/\lambda_x, \quad k_z = 2\pi/\lambda_z, \quad \beta = 2\pi f \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $h(y), g(y), k(y)$ — искомые комплексные функции, β — круговая частота, k_x — волновое число, так что скорость переноса возмущения в направлении потока

$$U_w = \beta/k_x \quad (3)$$

Пульсационное давление

$$p = \text{Re} \{p_\Phi \exp [i(k_x x + k_z z - \beta t)]\} \quad (4)$$

Здесь p_Φ — также комплексная величина.

Граничные условия записываются следующим образом. На стенке необходимо удовлетворить условию прилипания жидкости, т. е.

$$u = w = 0 \quad (5)$$

Стенка является деформируемой, поэтому из условия непротекания получаем

$$v = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i p_0 \beta}{C_d} \exp [i (k_x x + k_z z - \beta t + \theta)] \right\} \quad (6)$$

Здесь p_0 — амплитуда пульсационного давления на стенке, C_d — динамическая жесткость эластичной границы [2]. При $C_d \rightarrow \infty$ получаем $v = 0$, т. е. краевое условие для твердой границы; θ — угол сдвига фаз между давлением и перемещением границы, являющийся одним из основных параметров в теории колебаний [2].

Для пассивного покрытия $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Угол сдвига фаз является функцией частоты β .

На внешней границе подслоя полагаются известными пульсации скорости u, w

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \{ C_{\partial e} \exp [i (k_x x + k_z z - \beta t)] \} \\ w &= \operatorname{Re} \{ B_{\partial e} \exp [i (k_x x + k_z z - \beta t)] \} \end{aligned} \quad (7)$$

Задача решается в предположении, что в подслое $\partial p / \partial y = 0$. Кроме того, допускается $w \sim u$, причем коэффициент пропорциональности, постоянный в подслое, в принципе различен для каждой гармонике и полагается известным.

Следуя схеме Штернберга [1]

$$w = u \operatorname{tg} \vartheta, \quad \lambda_x = \lambda_z \operatorname{tg} \vartheta \quad (8)$$

где ϑ — угол скошенности пульсации. В таком случае второе краевое условие (7) заменяется соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta = B_{\partial e} / C_{\partial e}$$

С учетом сделанных допущений записанных граничных условий достаточно для решения поставленной задачи. Практически из четырех уравнений (1) нужно решать только два — первое и последнее. Третье же уравнение системы аналогично первому.

Выражение для продольной пульсации скорости u , полученное интегрированием первого уравнения (1) с учетом двух граничных условий из (5), (7), сходно с формулой из [1]. Квадрат среднеквадратичной пульсации $\langle u_e^2 \rangle$ рассчитывается как действительная часть половины произведения амплитуды h на комплексно сопряженную величину \bar{h}

$$\frac{\langle u_e^2 \rangle}{\frac{1}{2} C_e^2} = 1 - 2e^{-\eta} \cos \eta + e^{-2\eta}, \quad \eta = \left(\frac{\beta}{2\nu} \right)^{1/2} y \quad (9)$$

Здесь η — безразмерная ордината.

Различие с решением Штернберга здесь только в значениях постоянных. Величина C_e должна быть определена экспериментально или теоретически из взаимодействия эластичной границы с турбулентным ядром. Для ее определения может быть использована, например, приближенная энергетическая постановка. В том случае, когда поглощение стенкой энергии пульсаций из ядра минимально, $C_e \rightarrow C$, где C — постоянная для внешней границы подслоя около твердой стенки [1].

Из последнего уравнения (1) с учетом граничного условия (6) определяется поперечная пульсация скорости

$$g_e = \frac{C_{\partial e} k_x (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)}{(\beta/2\nu)^{1/2}} \left[-i\eta - \frac{i-1}{2} e^{(i-1)\eta} + \frac{i-1}{2} + \frac{i p_0 e^{i\theta}}{C_{\partial e}} \frac{U_w (\beta/2\nu)^{1/2}}{C_d (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)} \right] \quad (10)$$

Записанное значение амплитуды поперечной пульсационной скорости может быть представлено как сумма двух составляющих

$$g_e = g + g_1 \quad (g_1 = ip_0 e^{i\theta} \beta / C_d) \quad (11)$$

Величина g_1 характеризует воздействие эластичной границы на поперечную пульсацию скорости, которое оказывается постоянным в подслое. Составляющая g зависит от эластичных свойств стенки и выражается только через коэффициент $C_{\theta e}$. С увеличением жесткости границы, т. е. при $C_d \rightarrow \infty$, $g_1 \rightarrow 0$.

Теперь может быть рассчитано изменение рейнольдсовых напряжений в подслое в результате воздействия эластичной границы. Рейнольдсово напряжение рассчитывается для каждой отдельной составляющей гармоника пульсаций и определяется корреляцией $\langle uv \rangle_e$.

$$\langle uv \rangle_e = 1/2 \operatorname{Re} \{ g_e(y) \bar{h}(y) \}$$

Здесь черта означает сопряженную величину. Для расчета g_1 необходимо знать величину пульсационного давления на эластичной границе.

В подслое $\partial p / \partial y = 0$, поэтому давление может быть определено на его внешней границе при η_l .

Для расчета p используется уравнение (13) из [1] уже с учетом конвективных членов. При $\eta = \eta_l$

$$p = \rho U_w \operatorname{Re} \left\{ u_l \left(1 - \frac{U_l}{U_w} \right) + \frac{iv_l}{\beta} \left(\frac{dU}{dy} \right)_l \right\} \quad (12)$$

где U_l есть известная скорость осредненного течения, u_l , v_l — пульсационные скорости при η_l .

Предполагается возможным при расчете $\langle uv \rangle_e$ не учитывать изменения p при изменении v за счет воздействия эластичной границы.

В таком случае рейнольдсово напряжение в подслое около нее записывается следующим образом:

$$\rho \langle -uv \rangle_e = \frac{\rho C_e^2}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \left(\frac{\pi/2}{U_w^2} \right)^{1/2} \left\{ [1 - 2e^{-\eta} \cos \eta - 2\eta e^{-\eta} \sin \eta + e^{-2\eta}] - \right. \\ \left. - \rho \frac{U_w^2 d(U_l/U_w)}{C_d dy} K_v - \frac{2\rho U_w^2 (\beta/2v)^{1/2}}{C_d (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \left(1 - \frac{U_l}{U_w} \right) K_u \right\} \quad (13)$$

Здесь

$$K_u(\eta, \theta) = -\sin \theta + e^{-\eta_l} \sin(\eta_l + \theta) + e^{-\eta} \sin(\theta - \eta) - \\ - e^{-(\eta_l + \eta)} \sin(\eta_l + \theta - \eta) \quad (14)$$

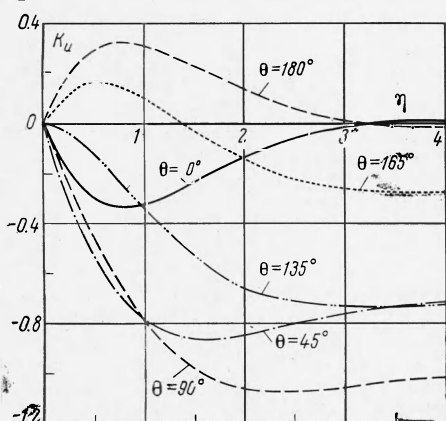
$$K_v(\eta, \theta) = -\sin \theta + e^{-\eta_l} \sin(\eta_l + \theta) - \cos \theta + e^{-\eta_l} \cos(\eta_l + \theta) + 2\eta_l \sin \theta + \\ + e^{-\eta} \sin(\theta - \eta) + e^{-\eta} \cos(\theta - \eta) - 2\eta_l e^{-\eta} \sin(\theta - \eta) - \\ - e^{-(\eta_l + \eta)} \sin(\eta_l + \theta - \eta) - e^{-(\eta_l + \eta)} \cos(\eta_l + \theta - \eta) \quad (15)$$

В выражении (13) член в квадратных скобках определяет рейнольдсово напряжение около твердой границы. Дополнительные члены, полученные в результате учета эластичных свойств границы, могут давать как положительный, так и отрицательный вклад в турбулентное трение в зависимости от этих свойств. Экспериментально установлено, что скорость переноса турбулентности $U_w \approx 0,8 U_{\infty}$. Так что для очень широкой, практически для всей обычно учитываемой полосы частот, $U_l < U_w$.

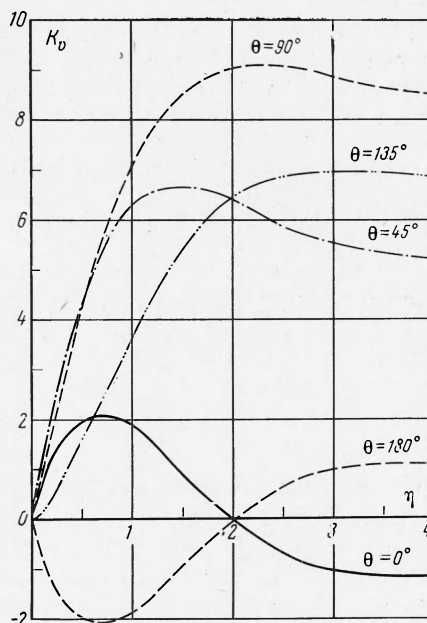
Для большинства интересных безотрывных течений $dU/dy > 0$ во всем течении пограничного слоя.

Поэтому рейнولدсово напряжение должно уменьшаться от воздействия эластичной границы, если $K_u > 0$, $K_v > 0$, или увеличиваться, если $K_u < 0$, $K_v < 0$. Из решения (9) следует, что $\eta_l \approx 5$. Для удобства при расчете положено $\eta_l = 3\pi/2$. На фиг. 1 и фиг. 2 приведены результаты расчета зависимости коэффициентов K_u , K_v от η при некоторых значениях угла сдвига фаз.

Анализ выражения (14) показывает, что член с K_u будет давать увеличение рейнولدсова напряжения практически во всей области η для $\theta < 135^\circ$. Для $\theta > 135^\circ$ в зоне малых η имеем $K_u > 0$, однако уменьшение рейнولدсова напряжения в подслое в интегральном смысле ($\langle K_u \rangle > 0$) этот член дает только для $\theta > 173^\circ$. Максимальной абсолютной величины K_u достигает при $\theta = 90^\circ$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Из анализа выражения (15) следует, что член с K_v обеспечивает уменьшение рейнولدсова напряжения во всей области η для $7^\circ < \theta < 142^\circ$, причем максимальной эффективности он достигает также при $\theta = 90^\circ$. В интегральном смысле этот член обеспечивает уменьшение рейнولدсова напряжения во всей области углов сдвига фаз для пассивного покрытия ($\langle K_v \rangle > 0$).

Ясно, что поскольку вклад членов с K_u и с K_v противоположен, то достижение положительной эффективности воздействия эластичного покрытия на турбулентное трение возможно только лишь в некоторых случаях при соблюдении определенных условий. Для схемы покрытия с сильным демпфированием важно указать необходимую зависимость угла сдвига фаз от частоты.

Определить оптимальную эту зависимость можно, по-видимому, из условия максимального уменьшения рейнولدсовых напряжений во всем подслое.

Если l — толщина подслоя, то их среднее изменение в нем (если положить $C_e = C$)

$$\frac{1}{l} \int_0^l \frac{\langle -uv \rangle - \langle -uv \rangle_e}{1/2 C^2} dy = \frac{2\rho v_d^3}{\nu C_d} G \quad (16)$$

Здесь v_d — динамическая скорость

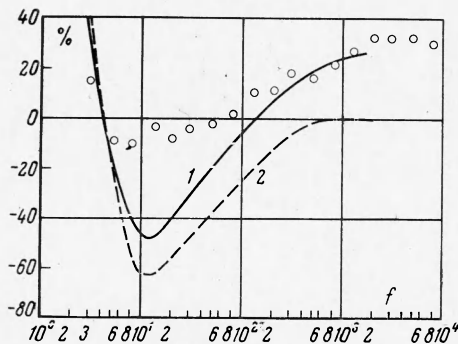
$$G = \left(\frac{\pi f \nu}{v_d^2} \right) \left[\left(\frac{U_w}{v_d} - \frac{U_i}{v_d} \right) \langle K_u \rangle + \frac{\nu}{v_d^2} \left(\frac{dU}{dy} \right)_i \left(\frac{\pi f \nu}{v_d^2} \right)^{-1/2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{2} \langle K_v \rangle \right] \quad (17)$$

$$\langle K_u \rangle = \frac{1}{\eta_l} \int_0^{\eta_l} K_u d\eta, \quad \langle K_v \rangle = \frac{1}{\eta_l} \int_0^{\eta_l} K_v d\eta$$

Исследуя выражение (16) на экстремум, можно установить оптимальную частотную характеристику. Однако пока такой расчет был бы слишком неточен, поскольку в настоящее время нет точных сведений о ряде параметров, входящих в (17). Так, влияние θ может быть очень существенным, ибо член с $\langle K_v \rangle$ прямо пропорционален $(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$, но сведений о зависимости в подслое угла скошенности пульсаций от частоты, к сожалению, пока нет. Необходимо иметь и точные сведения о зависимости скорости переноса турбулентности от частоты.

Требование точности предъявляется здесь потому, что функция G оказывается сравнительно малой разностью двух входящих в нее больших членов с $\langle K_u \rangle$ и с $\langle K_v \rangle$.

Задача о взаимодействии эластичной границы с вязким подслоем решена в рамках сильных ограничений, поэтому важно сравнить результаты приближенного расчета с данными эксперимента. Таких данных, правда, слишком мало. Только Блик с соавторами [3] удалось измерить характеристики турбулентности в подслое около эластичной границы. В работе есть сведения



Фиг. 3

об изменении под воздействием эластичного покрытия спектральной плотности энергии в зависимости от частоты при безразмерной ординате $y/\delta = 0.0033$, что соответствует $y_+ = 9.8$ ($y_+ = v_d y / \nu$). На фиг. 3 они обозначены кружками. Имеет смысл сравнить эти данные с результатами расчета изменения рейнольдсовых напряжений, поскольку последние, по-видимому, пропорциональны кинетической энергии турбулентности. На фиг. 3 приведены для сравнения результаты расчета относительного изменения рейнольдсовых напряжений

$$\frac{\langle -uv \rangle - \langle -uv \rangle_e}{\langle -uv \rangle} 100\%$$

под воздействием эластичной границы, выполненного для $y_+ = 9.8$, $U_w = 0.8 U_\infty$, $\theta = 45^\circ$. Штриховой линией обозначен случай, когда $C_e = C$. Поскольку в цитированной выше работе приведены сведения для изменения спектральной плотности энергии и в турбулентном ядре, то это позволило рассчитать C_e . Для расчета использованы данные фиг. 20 работы [3] при $y/\delta = 0.8$. С учетом этих сведений получены результаты, представленные на фиг. 3 в виде сплошной кривой.

Из рассмотрения фиг. 3 можно отметить определенное качественное сходство результатов расчета с экспериментальными данными.

Количественное расхождение не удивительно. Оно, по-видимому, обусловлено неучетом конвективных членов в уравнениях (1). Существенны, возможно, и другие причины, как-то: незнание закона изменения с частотой скошенности потока, скорости переноса. Тем не менее качественное сходство полученных картин убеждает в полезности данного рассмотрения как первого шага на пути к выяснению физики влияния эластичной границы на сопротивление трения.

Автор благодарит Г. С. Мигиренко за советы и замечания, высказанные при обсуждении работы.

Поступила 8 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Sternberg J. A theory for the viscous sublayer of a turbulent flow. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 2.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.
3. Blick E. F., Walters R. R., Smith R., Chu H. Compliant coating skin friction experiments. AIAA Paper, 1969, No. 69-165.