

УДК 532.516

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. А. Карабут, В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: karabut@hydro.nsc.ru, pukhnachev@gmail.com

В рамках длинноволнового приближения с помощью комбинации аналитических и численных методов исследованы равновесные формы неизотермической жидкой пленки с теплоизолированной свободной поверхностью при больших числах Марангони. В плоской задаче о равновесии пленки в виде полосы доказано существование стационарного решения при сколь угодно большом перепаде температур на границах полосы. С ростом этого перепада происходит резкое утончение пленки вблизи нагреваемой границы, что может являться причиной неустойчивости и разрыва пленки. В задаче о равновесии пленки, закрепленной по круговому контуру, обнаружено существенное влияние неравномерности распределения теплового потока на контуре на форму свободной поверхности.

Ключевые слова: волновые движения жидкости, тонкие неизотермические пленки жидкости, суммирование степенных рядов, метод коллокаций.

Введение. К настоящему времени теория волновых движений жидких пленок выделилась в самостоятельный раздел гидродинамики с различными технологическими приложениями [1]. При анализе задач, возникающих в этой теории, основным инструментом является длинноволновое приближение. Большинство работ в данной области посвящено изучению изотермических движений пленок, стекающих вдоль твердой поверхности. Среди публикаций, в которых исследуются неизотермические режимы течения вдоль наклонной плоскости, следует отметить [2–5]. Значительно реже в работах рассматривается движение пленок, обе границы которых свободны, но неравномерно нагреты либо содержат поверхностно-активные вещества [6–10]. Последний случай более сложен для исследования, поскольку в число искомых функций входит не только объемная, но и поверхностная концентрация поверхностно-активных веществ. В отличие от концентрации температура жидкости не разделяется на объемную и поверхностную, что упрощает анализ.

Простейшим примером свободной пленки жидкости является вода в ячейке решета. Неизотермические пленки, возникающие в процессе нанесения покрытий и при производстве полимеров, могут использоваться при создании новых теплообменных аппаратов. Результаты экспериментальных исследований свободных пленок макроскопического масштаба авторам данной работы неизвестны. Такие исследования целесообразно проводить на борту орбитальной станции, где диапазон параметров устойчивого состояния свободной пленки шире, чем в земных условиях.

Уравнения длинноволнового приближения, описывающие движение свободной невесомой пленки, закрепленной по плоскому контуру и находящейся под действием термокапиллярных сил, выведены в [7, 11]. Оказалось, что в рамках данного приближения форму

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2260.2008.1) и Интеграционного проекта СО РАН № 111.

свободной границы пленки можно определить, не имея детальной информации о зависимости вектора скорости от вертикальной координаты. Это отличает обсуждаемую задачу от задачи о течении тонкого слоя вязкой жидкости, граничащего с твердой плоскостью. Если толщина пленки как функция координат и времени известна, то поле скоростей в ней приближенно находится из решения начально-краевой задачи, сформулированной в [11].

При математическом моделировании неизотермического движения пленок ключевую роль играет условие теплового контакта жидкой и газовой фаз. Как правило, это условие аппроксимируется краевым условием третьего рода для температуры жидкости, содержащим эмпирический коэффициент. Для того чтобы избежать использования эмпирической информации, следует изучить задачу о совместном движении жидкости и газа (см., например, [12]) либо рассмотреть предельные ситуации, когда процессы переноса в газе не учитываются. Одна из таких ситуаций соответствует предположению об идеально теплопроводящей свободной поверхности [7]. В этом случае ее температура совпадает с заданной априори температурой газа на границе раздела. В другом случае, который и рассматривается в данной работе, свободная граница является теплоизолированной.

1. Постановка задачи. Изучается задача о равновесии свободной невесомой пленки с теплоизолированной свободной границей. В приближении тонкого слоя поведение пленки описывается двумя функциями: ее толщиной h и средним по толщине значением температуры T . Пленка занимает плоскую область ω , на границе $\partial\omega$ которой заданы значения теплового потока. Математическая постановка задачи [11] состоит в отыскании решения $h(x_1, x_2)$, $T(x_1, x_2)$ системы уравнений

$$\nabla \cdot (h\nabla\Delta h) = \gamma\Delta T, \quad \nabla \cdot (h\nabla T) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad (1.1)$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0, \quad h \frac{\partial \Delta h}{\partial n} = \gamma \frac{\partial T}{\partial n}, \quad h \frac{\partial T}{\partial n} = g(x), \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega; \quad (1.2)$$

$$\int_{\omega} h(x_1, x_2) d\omega = S. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.1), (1.2) записаны в безразмерных переменных. В качестве поперечного масштаба длины выбрана средняя толщина пленки δ , в качестве продольного — диаметр l физической области, занятой пленкой. Масштабом температуры является величина Qlk^{-1} (Q — характерное значение теплового потока на ограничивающем пленку плоском контуре; k — теплопроводность жидкости); $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к кривой $\partial\omega$. Условие (1.3), в котором S — площадь области ω , означает, что средняя безразмерная толщина пленки равна единице. Первое условие в (1.2) означает, что угол смачивания жидкостью ограничивающей ее твердой цилиндрической поверхности Σ с сечением $\partial\omega$ равен $\pi/2$ (данное предположение не является необходимым, но упрощает задачу). Функция $g(x)$, задающая распределение безразмерного теплового потока на контуре $\partial\omega$, удовлетворяет условию согласования

$$\int_{\partial\omega} g ds = 0, \quad (1.4)$$

где ds — элемент длины дуги кривой $\partial\omega$. Второе краевое условие в (1.2), выведенное в работе [7], следует из условия непроницаемости поверхности Σ . Параметр γ , входящий в это условие, определяется формулой

$$\gamma = \frac{\sigma_T Q l^3}{\sigma_0 k \delta^2},$$

где σ_0 — среднее значение коэффициента поверхностного натяжения $\sigma(T)$; σ_T — температурный коэффициент поверхностного натяжения, причем

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$$

(T_0 — среднее значение температуры в области ω ; величины σ_T , σ_0 , T_0 предполагаются постоянными и положительными). Параметр γ играет роль числа Марангони — основного критерия подобия в теории термокапиллярных течений. Заметим, что хотя в работе речь идет о стационарных состояниях пленки, поле скоростей в ней отлично от нуля. Однако задача расчета поля скоростей здесь не рассматривается.

Нетрудно заметить, что в решении задачи (1.1)–(1.3) функция T определяется с точностью до аддитивной постоянной. Этот произвол можно ликвидировать, если потребовать выполнения условия

$$\int_{\omega} T(x_1, x_2) d\omega = 0. \tag{1.5}$$

Далее условие нормировки (1.5) предполагается выполненным. В работе [11] доказан следующий факт. Если кривая $\partial\omega$ принадлежит классу Гельдера $C^{4+\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), а функция g принадлежит классу Гельдера $C^{4+\alpha}(\partial\omega)$ и удовлетворяет условию согласования (1.4), то существует $\gamma_0 > 0$, такое что при $\gamma \in [0, \gamma_0]$ задача (1.1)–(1.3) имеет, и притом единственное, решение $h \in C^{4+\alpha}(\bar{\omega})$, $T \in C^{2+\alpha}(\bar{\omega})$. Это решение можно представить в виде

$$h = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k h_k(x_1, x_2), \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k T_k(x_1, x_2). \tag{1.6}$$

Ряды (1.6) сходятся в нормах пространств $C^{4+\alpha}(\bar{\omega})$, $C^{2+\alpha}(\bar{\omega})$ соответственно, если $\gamma \in [0, \gamma_0]$.

В случае, когда ω — единичный круг, а $g = 2x_1x_2$, в работе [11] найдены функции h_1 , h_2 , T_1 . В данной работе вычислены следующие члены степенных рядов (1.6) для этого случая. Численное исследование найденных членов позволяет сделать прогноз о радиусе сходимости степенных рядов. Из результатов численных расчетов следует, что деформации пленки существенны даже при умеренных значениях параметра γ .

Простейший вариант задачи (1.1)–(1.3) соответствует случаю, когда ω — полоса, а значение теплового потока на ее границах постоянно и равно q . В этом случае функции h и T зависят лишь от одной переменной $x = x_1$ и уравнения (1.1) допускают однократное интегрирование. В результате задача (1.1), (1.3) сводится к определению положительной функции $h(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$h^2 h^{\text{III}} = -b, \quad 0 < x < 1 \tag{1.7}$$

и дополнительным соотношениям

$$\dot{h}(0) = \dot{h}(1) = 0; \tag{1.8}$$

$$\int_0^1 h(x) dx = 1. \tag{1.9}$$

Здесь $b = -\gamma q$; точка означает дифференцирование по x . Не теряя общности, можно считать число b неотрицательным (случай $b \leq 0$ сводится к предыдущему заменой $\tilde{x} = 1 - x$). После решения задачи (1.7)–(1.9) функция $T(x)$ определяется по формуле

$$T = -q \int_0^1 \frac{dy}{h(y)} + q \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{dy}{h(y)} \right) dx. \tag{1.10}$$

При получении (1.10) учтено условие нормировки (1.5).

Предварительное исследование задачи (1.7)–(1.9) выполнено в работе [11]. Установлено, что при $b > 0$ функция $h(x)$ строго монотонно возрастает на интервале $(0, 1)$ и имеет единственную точку перегиба x_* . Если $b = 0$, то единственным решением задачи (1.7)–(1.9) является $h = 1$. При малых b решение этой задачи имеет асимптотику

$$h = 1 + b(-1/24 + x^2/4 - x^3/6) + O(b^2), \quad b \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Кроме того, доказано, что при любом конечном $b > 0$ величина $h(0)$ положительна и $\ddot{h}(0) > 0$. Ниже доказывается, что задача (1.7)–(1.9) имеет по крайней мере одно решение при любом $b > 0$, и приводятся результаты ее численного исследования.

2. Разрешимость задачи (1.7)–(1.9). Эффективное исследование задачи (1.7)–(1.9) основано на редукции уравнения (1.7) к уравнению первого порядка. Такая возможность обусловлена наличием у указанного уравнения двухпараметрической группы преобразований (перенос по x и однородное растяжение переменных x и h). С использованием этих свойств симметрии изучаемую задачу можно свести к задаче Коши

$$y^2 y^{\text{III}} = -1; \quad (2.1)$$

$$y = 1, \quad \dot{y} = c, \quad \ddot{y} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (2.2)$$

где c — положительная постоянная. Докажем, что при любом $c > 0$ существует решение задачи (2.1), (2.2) со следующими свойствами:

- 1) существуют $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$, такие что $\dot{y}(x_1) = \dot{y}(x_2) = 0$;
- 2) $y(x) > 0$, если $x_1 \leq x \leq x_2$;
- 3) $\dot{y}(x) > 0$, если $x_1 < x < x_2$;
- 4) $\dot{y}(x) > 0$, если $x_1 \leq x < 0$, и $\ddot{y}(x) < 0$, если $0 < x \leq x_2$.

В уравнении (2.1) перейдем к новой независимой переменной s и новой искомой функции z с использованием следующих формул:

$$y = \exp(s), \quad \dot{y} = z(s). \quad (2.3)$$

Функция $z(s)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$z^2 \left(\frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \right) + z \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = -1 \quad (2.4)$$

и начальным условиям

$$z = c, \quad \frac{dz}{ds} = 0 \quad \text{при} \quad s = 1.$$

В результате подстановки в (2.4) выражения

$$\left(z \frac{dz}{ds} \right)^2 = w(z) \quad (2.5)$$

уравнение (2.4) сводится к уравнению первого порядка

$$\left(\frac{dw}{dz} + 2 \right)^2 = z^2 w,$$

которое равносильно двум уравнениям:

$$\frac{dw_1}{dz} = -2 - zw_1^{1/2}; \quad (2.6)$$

$$\frac{dw_2}{dz} = -2 + zw_2^{1/2}. \quad (2.7)$$

Функции w_1 и w_2 по определению не могут принимать отрицательные значения. Для уравнений (2.6), (2.7) рассмотрим задачи Коши

$$w_k(c) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.8)$$

Гладкость правых частей уравнений (2.6), (2.7) нарушается в точке $z = c$, $w_k = 0$. Однако обе задачи Коши (2.6), (2.8) и (2.7), (2.8) имеют единственные решения, определенные в левой полукрестности точки $z = c$, где асимптотика функций $w_k(z)$ имеет вид

$$w_1 = 2(c - z) + (c/3)[2(c - z)]^{3/2} + O(c - z)^2, \quad w_2 = 2(c - z) - (c/3)[2(c - z)]^{3/2} + O(c - z)^2.$$

Интегральная кривая уравнения (2.7), выходящая из точки $z = c$, $w_1 = 0$, лежит выше прямой $w_1 = 2(c - z)$. Поскольку правая часть этого уравнения сублинейно растет по переменной w_1 , решение задачи Коши (2.7), (2.8) может быть продолжено вплоть до точки $z = 0$, причем $w_1(0) > 2c$.

Интегральная кривая уравнения (2.6), выходящая из точки $z = c$, $w_2 = 0$, лежит ниже прямой $w_2 = 2(c - z)$. Рассуждение от противного показывает, что при $0 \leq z < 0$ равенство $w_2(z) = 0$ невозможно. Продолжая решение w_2 до его естественной границы $z = 0$, заключаем, что $0 < w_2(0) < 2c$.

Если решения задач (2.6)–(2.8) известны, то функции $s_1(z)$ и $s_2(z)$ можно определить соотношениями

$$s_1(z) = - \int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_1(\zeta)]^{1/2}}, \quad s_2(z) = \int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_2(\zeta)]^{1/2}}, \quad 0 \leq z \leq c. \quad (2.9)$$

На интервале $[0, c)$ функция s_1 строго монотонно возрастает, а функция s_2 строго монотонно убывает. Сходимость интегралов в (2.9) гарантируется тем, что обе функции w_1 и w_2 имеют главную линейную часть $2(c - z)$ при $z \rightarrow c - 0$. Обращая зависимости (2.9) относительно z , получаем две функции: $z = Z_1(s_1)$ и $z = Z_2(s_2)$. Первая из этих функций определена на отрезке $\xi_1 \leq s_1 \leq 0$ и монотонно возрастает от нуля до c , а вторая определена на отрезке $0 \leq s_2 \leq \xi_2$ и монотонно убывает от c до нуля. Здесь $\xi_k = s_k(0)$, $k = 1, 2$. Функции $Z_k(s_k)$ удовлетворяют уравнению (2.5) с правой частью w_k ($k = 1, 2$). Эти функции являются аналитическими на интервалах $(\xi_1, 0)$ и $(0, \xi_2)$, а на концах указанных интервалов имеют асимптотику

$$Z_k = [2w_k(0)|s_k - \xi_k|]^{1/2} + O(|s_k - \xi_k|)^{3/2} \quad \text{при} \quad s_k \rightarrow \xi_k, \quad k = 1, 2.$$

Кроме того, функция Z_2^2 является аналитическим продолжением функции Z_1^2 с интервала $(\xi_1, 0)$ на интервал $(0, \xi_2)$.

Получим параметрическое представление решения задачи Коши на интервалах $[x_1, 0]$ и $[0, x_2]$ в терминах интегралов от функций $w_k(z)$ (напомним, что $\dot{y}(x_1) = \dot{y}(x_2) = 0$). Из (2.3) следует, что $dx = \exp(s)[z(s)]^{-1} ds$. С учетом (2.9) и соотношения $y = \exp(s)$ это позволяет определить зависимости x и y от z с помощью соотношений

$$y = \exp\left(- \int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_1(\zeta)]^{1/2}}\right), \quad x = - \int_z^c \exp\left(- \int_z^c \frac{\eta d\eta}{[w_1(\eta)]^{1/2}}\right) \frac{d\zeta}{[w_1(\zeta)]^{1/2}} \quad \text{при} \quad x_1 \leq x \leq 0, \\ y = \exp\left(\int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_2(\zeta)]^{1/2}}\right), \quad x = \int_z^c \exp\left(\int_z^c \frac{\eta d\eta}{[w_2(\eta)]^{1/2}}\right) \frac{d\zeta}{[w_2(\zeta)]^{1/2}} \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq x_2. \quad (2.10)$$

Значения $x_1(c)$ и $x_2(c)$ получаются из формул (2.10), если положить в них $z = 0$. Нетрудно проверить, что функция $y(x)$, неявно определенная равенствами (2.10), при произвольном значении параметра $c > 0$ удовлетворяет уравнению (2.1) и начальным условиям (2.2), а также обладает свойствами 1–4.

В уравнении (2.1) перейдем к новой независимой переменной \tilde{x} и новой искомой функции $h(\tilde{x})$:

$$x = (x_2 - x_1)\tilde{x} + x_1, \quad y(x) = Ah(\tilde{x}). \quad (2.11)$$

Тогда интервал $x_1 < x < x_2$ перейдет в интервал $0 < \tilde{x} < 1$. Потребуем, чтобы функция $h(\tilde{x})$ удовлетворяла условию (1.9). Отсюда следует зависимость между величинами x_1, x_2, A, c :

$$(x_2 - x_1)A = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx. \quad (2.12)$$

Вследствие (2.11) функция $h(\tilde{x})$, определенная при $0 \leq \tilde{x} \leq 1$, удовлетворяет уравнению

$$h^2 \frac{d^3 h}{d\tilde{x}^3} = -A^{-3}(x_2 - x_1)^3.$$

На основании (2.10) и (2.11) эта функция удовлетворяет также краевым условиям (1.8). Для того чтобы последнее уравнение совпадало с (1.7), необходимо выполнение равенства $(x_2 - x_1)^3 = bA^3$. Подставляя в него значения x_1, x_2 и A , найденные по формулам (2.10), (2.12), и переходя при вычислении интеграла (2.12) к переменной z , получаем уравнение, связывающее параметры b и c :

$$F(c) \equiv \left[\int_0^c \sum_{k=1}^2 \exp \left((-1)^k \int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_k(\zeta)]^{1/2}} \right) \frac{dz}{[w_k(z)]^{1/2}} \right]^2 \times \\ \times \left[\int_0^c \sum_{k=1}^2 \exp \left(2(-1)^k \int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_k(\zeta)]^{1/2}} \right) \frac{dz}{[w_k(z)]^{1/2}} \right]^{-1} = b^{1/3}. \quad (2.13)$$

Из сказанного выше следует, что в уравнении (2.13) функция $F(c)$ определена и непрерывна для любого $c > 0$. Тем самым, решая задачу Коши (2.1), (2.2) при различных значениях c , получаем решение исходной краевой задачи (1.7)–(1.9) для значений параметра $b = F(c)$. Если c мало, то решения обеих задач Коши (2.6), (2.8) и (2.7), (2.8) имеют одинаковые асимптотики:

$$w_k = 2(c - z) + O(c - z)^{3/2}, \quad 0 \leq z \leq c, \quad k = 1, 2, \quad c \rightarrow 0.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.13), находим $F = 2(2c)^{1/2} + O(c)$ при $c \rightarrow 0$. Если доказать, что $F \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow \infty$, то отсюда будет следовать разрешимость уравнения (2.13) для любого $b > 0$.

Анализ поведения функции F при больших значениях c достаточно сложен, так как асимптотики функций w_1, w_2 не являются равномерными на всем интервале $[0, c]$, если $c \rightarrow \infty$. Сначала рассмотрим задачу (2.6), (2.8). Переходя к новым переменным $z = ct, w_1(z) = c^4 u(t)$, получим

$$\frac{du}{dt} = -\varepsilon - tu^{1/2}, \quad 0 < t < 1, \quad u(1) = 0, \quad (2.14)$$

где $\varepsilon = 2c^{-3}$. На любом интервале $[0, 1 - \varepsilon]$ решение задачи (2.14) имеет представление

$$16u = (1 - t^2)^2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

На интервале $[1 - \varepsilon, 1]$ главный член u_0 асимптотики функции u определяется неявно из уравнения

$$2u_0^{1/2} - 2\varepsilon \ln(1 + \varepsilon^{-1}u_0^{1/2}) = 1 - t, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Представлений (2.15), (2.16) достаточно, чтобы получить оценки

$$\int_0^c \exp\left(-n \int_z^c \frac{\zeta d\zeta}{[w_1(\zeta)]^{1/2}}\right) \frac{dz}{[w_1(z)]^{1/2}} = O(1), \quad c \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2. \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь задачу (2.7), (2.8). Функция $v(t) = c^{-4}w_2(z)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dv}{dt} = -\varepsilon + tv^{1/2}, \quad 0 < t < 1, \quad v(1) = 0.$$

Асимптотика решения этой задачи на интервале $[0, 1 - \varepsilon]$ имеет вид

$$v = \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

На интервале $[1 - \varepsilon, 1]$ главный член v_0 асимптотики функции v удовлетворяет уравнению

$$-2v_0^{1/2} - 2\varepsilon \ln(1 - \varepsilon^{-1}v_0^{1/2}) = 1 - t, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

При этом имеет место неравенство $v_0 < \varepsilon^2$ для $t < 1$. Следовательно, в уравнении (2.19) аргумент логарифмической функции положителен. Формулы (2.18), (2.19) позволяют получить представления

$$\int_0^c \exp\left(\int_z^c \frac{n\zeta d\zeta}{[w_2(\zeta)]^{1/2}}\right) \frac{dz}{[w_2(z)]^{1/2}} = (2^{1-n}\pi c)^{1/2} \exp\left(\frac{nc^3}{4}\right) [1 + O(c^{-1})], \quad (2.20)$$

$$c \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2.$$

При выводе оценок (2.19) учтено, что основной вклад в оцениваемые интегралы дают значения подынтегральной функции на интервале $[0, c - c\varepsilon]$, где функция w_2 близка к постоянной $4c^{-2}$.

Из результатов сравнения выражений (2.17) и (2.20) следует, что при больших значениях c основной вклад в функцию $F(c)$ дают вторые члены сумм, стоящих как в числителе, так и в знаменателе дроби, определяющей эту функцию. Выделяя главный член асимптотики $F(c)$, получаем $F = (2\pi c)^{1/2} + O(1)$, если $c \rightarrow \infty$. Итак, функция $F(c)$, определенная при любом $c \geq 0$, обладает следующими свойствами: 1) является непрерывной; 2) принимает положительные значения при $c > 0$; 3) $F(0) = 0$; 4) $F \rightarrow \infty$, если $c \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что уравнение $F(c) = b$ имеет по крайней мере одно решение при любом $b > 0$. Тем самым доказано, что задача (1.7)–(1.9) разрешима при произвольном положительном значении параметра b , пропорционального безразмерному тепловому потоку q . Так как $q > 0$, то с ростом x температура понижается, в то время как толщина пленки увеличивается по мере приближения к охлаждаемой границе $x = 1$. Этот эффект является естественным, так как при понижении температуры коэффициент поверхностного натяжения растет.

3. Численное решение задачи (1.7)–(1.9). Задачу будем решать двумя способами: суммированием степенных рядов и на основе метода коллокаций.

Будем искать решение в виде степенного ряда

$$h(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(x)b^j. \quad (3.1)$$

Здесь h_1 известно (см. (1.11)). Найдем коэффициенты h_j при $j > 1$. Подставляя ряд (3.1) в задачу (1.7)–(1.9) и приравнявая члены при одинаковых степенях b , получим последовательность краевых задач для линейного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$\begin{aligned}
 a_{j-1} &= \sum_{k=0}^{j-1} h_k h_{j-k}, & h_j^{\text{III}} &= - \sum_{k=1}^{j-1} h_k^{\text{III}} a_{j-k}, \\
 \dot{h}_j(0) &= 0, & \dot{h}_j(1) &= 0, & \int_0^1 h_j dx &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Рекуррентно решая задачу (3.2) для каждого $j > 1$, находим пару функций $a_{j-1}(x)$, $h_j(x)$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
 h_2 &= -\frac{1}{3360} + \frac{1}{120} x^2 - \frac{1}{72} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{360} x^6, \\
 h_3 &= -\frac{473}{7\,257\,600} + \frac{17}{26\,880} x^2 - \frac{13}{13\,440} x^3 + \frac{19}{14\,400} x^5 - \frac{1}{1728} x^6 - \frac{1}{1120} x^7 + \frac{1}{1260} x^8 - \frac{1}{5670} x^9.
 \end{aligned}$$

Все последующие коэффициенты представляют собой аналогичные многочлены от x , степень которых быстро увеличивается с увеличением номера коэффициента.

Оценим радиус сходимости ряда (3.1). Отметим известный факт: если в произвольном степенном ряду существует предел отношения предыдущего коэффициента к последующему при стремлении номеров коэффициентов к бесконечности, то этот предел равен особой точке функции, которая представлена рассматриваемым степенным рядом. Для (3.1) такого предела не существует. Однако если ряд $\sum h_j b^j$ (здесь h_j — числа) разбить на четную и нечетную составляющие $\sum h_{2j} b^{2j}$, $\sum h_{2j+1} b^{2j+1}$, то для этих рядов будут существовать одинаковые пределы последовательностей

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{h_{2j-2}/h_{2j}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{h_{2j-1}/h_{2j+1}} = b^*.$$

Это означает, что при $b = b^*$ функция $h(x)$ имеет особенность, которая ограничивает сходимость, т. е. радиус сходимости (3.1) равен b^* .

Ниже для различных значений x приведены последние пять элементов последовательностей

$$\left\{ \sqrt{h_{2j-2}/h_{2j}} \right\}, \quad \left\{ \sqrt{h_{2j-1}/h_{2j+1}} \right\}
 \tag{3.3}$$

(максимальный индекс используемого коэффициента равен 50). Например, при $x = 0$ имеем следующий степенной ряд:

$$h = 1 - \frac{1}{24} b - \frac{1}{3360} b^2 - \frac{473}{7\,257\,600} b^3 - \frac{33\,023}{29\,059\,430\,400} b^4 + \dots$$

Соответствующие последовательности (3.3) имеют вид

9,665 309 932	9,675 477 093
9,648 750 827	9,657 961 890
9,633 693 982	9,642 077 742
9,619 943 821	9,627 606 945
9,607 337 313	9,614 368 880
.....

Это позволяет предположить, что обе последовательности стремятся к одному и тому же пределу. Аналогично при $x = 1/2$ имеем другой степенной ряд:

$$h = 1 + \frac{43}{161\,280} b^2 + \frac{2\,040\,169}{2\,231\,764\,254\,720} b^4 + \frac{47\,418\,886\,356\,551}{8\,719\,520\,797\,305\,077\,760\,000} b^6 + \dots$$

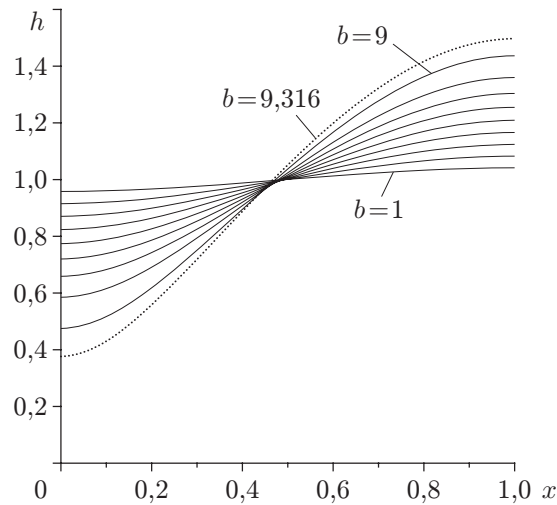


Рис. 1. Численное решение одномерной задачи (1.7)–(1.9) при различных значениях параметра b :

сплошные линии — расчет с использованием метода суммирования рядов и метода коллокаций; пунктирная линия — расчет с использованием метода коллокаций ($b = 9,316$ — точка ветвления)

Здесь нечетная составляющая отсутствует, поэтому можно сформировать только одну последовательность:

- 9,667 366 237
- 9,650 615 617
- 9,635 392 814
- 9,621 497 904
- 9,608 764 387
-

Эта последовательность стремится приблизительно к тому же пределу. Результаты аналогичных исследований в других точках x позволяют предположить, что радиус сходимости ряда (3.1) не зависит от x . При $b = b^* \approx 9,3$ в решении имеется особая точка. По-видимому, это точка ветвления. Для построения решения при $b > b^*$ необходимы специальные методы.

На рис. 1 показаны профили толщины пленки для девяти целых значений b , полученные с использованием 15 членов степенного ряда (3.1) (сплошные линии). С ростом параметра b увеличивается тепловой поток на границе и соответственно растет деформация пленки.

Для контроля погрешности используем метод коллокаций. Будем искать решение в виде многочлена N -й степени вида

$$h(x) = c_1 + c_2x^2 + \dots + c_Nx^N. \tag{3.4}$$

С ростом числа N увеличивается точность аппроксимации. В многочлене (3.4) член с первой степенью отсутствует, поэтому левое краевое условие (1.8) выполнено автоматически. Величинами, подлежащими определению, являются коэффициенты полинома c_1, c_2, \dots, c_N . Решение вида (3.4), вообще говоря, не удовлетворяет уравнению (1.7). Суть метода коллокаций состоит в том, чтобы потребовать выполнения этого уравнения в конечном числе точек. Подставив решение (3.4) в (1.7) и потребовав его выполнения в $N - 2$ точках

$x_i = (i - 1)/(N - 3)$, получим уравнения вида

$$f_i(c_1, c_2, \dots, c_N) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N - 2). \quad (3.5)$$

Из правого краевого условия (1.8) и из интегрального соотношения (1.9) получим соответственно еще два уравнения:

$$2c_1 + 3c_2 + \dots + Nc_N = 0; \quad (3.6)$$

$$c_1 + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{4} + \dots + \frac{c_N}{N+1} - 1 = 0. \quad (3.7)$$

В результате имеем систему N нелинейных уравнений для нахождения N неизвестных c_1, c_2, \dots, c_N . Система (3.5)–(3.7) решалась методом Ньютона. В качестве начального приближения при малых b принималось решение $h = 1$. Далее осуществлялось аналитическое продолжение по параметру b (небольшими шагами по b в сторону его увеличения), причем на каждом шаге в качестве начального приближения выбиралось решение, полученное на предыдущем шаге. Если шаг достаточно мал, а якобиан системы алгебраических уравнений отличен от нуля, то при таком выборе начального приближения метод Ньютона всегда сходится. Результаты, полученные методом коллокаций, совпадают с результатами, найденными путем суммирования степенных рядов (3.1).

При целых b профили толщины пленки совпали (с погрешностью, меньшей толщины линий) с профилями на рис. 1 (сплошные линии). Пунктирная линия на рис. 1 соответствует профилю с наибольшей вычисленной деформацией, полученному при $b \approx b^*$ только методом коллокаций, поскольку степенной ряд (3.1) расходится. В методе Ньютона при $b \approx b^*$ якобиан обращается в нуль (в реальных расчетах фиксировалась смена знака якобиана). Это означает, что найдена точка бифуркации. При $b > b^*$ дальнейшее аналитическое продолжение оказалось невозможным, поскольку итерации в методе Ньютона перестали сходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование характера точки бифуркации и специальный выбор начального приближения в методе Ньютона. При дальнейшем увеличении b деформация пленки продолжает увеличиваться и для построения профиля толщины пленки нужно использовать специальные методы.

4. Численное решение задачи (1.1)–(1.3) в круге. Будем искать решение задачи (1.1)–(1.3) в виде рядов (1.6). Если подставить эти ряды в уравнения и приравнять члены при одинаковых степенях γ , то получим последовательность краевых задач. Для нахождения пары функций T_0, h_1 требуется решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta T_0 &= 0, & \Delta \Delta h_1 &= 0, & (x_1, x_2) &\in \omega, \\ \frac{\partial T_0}{\partial n} &= g, & \frac{\partial h_1}{\partial n} &= 0, & \frac{\partial \Delta h_1}{\partial n} &= g, & (x_1, x_2) &\in \partial \omega, \\ \int_{\omega} T_0 d\omega &= 0, & \int_{\omega} h_1 d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Последующие функции T_k, h_{k+1} ($k = 1, 2, \dots$) определяются из рекуррентной системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} \Delta T_k &= -\nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^k h_i \nabla T_{k-i} \right), \\ \Delta \Delta h_{k+1} &= \Delta T_k - \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^k h_i \nabla \Delta h_{k+1-i} \right), & (x_1, x_2) &\in \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k}{\partial n} &= - \sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial T_{k-i}}{\partial n}, & \frac{\partial h_{k+1}}{\partial n} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta h_{k+1}}{\partial n} &= \frac{\partial T_k}{\partial n} - \sum_{i=1}^k h_i \frac{\partial \Delta h_{k+1-i}}{\partial n}, & (x_1, x_2) \in \partial\omega, \\ \int_{\omega} T_k d\omega &= 0, & \int_{\omega} h_{k+1} d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Решая последовательно эти краевые задачи, в полярной системе координат ($x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$) находим

$$\begin{aligned} T_0(r, \varphi) &= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi, & h_1(r, \varphi) &= \frac{1}{24} (r^4 - 2r^2) \sin 2\varphi, \\ T_1(r, \varphi) &= -\frac{1}{288} r^6 + \frac{1}{96} r^4 - \frac{1}{384} + \left(\frac{1}{480} r^6 - \frac{1}{120} r^4 \right) \cos 4\varphi, \\ h_2(r, \varphi) &= -\frac{1}{9216} r^8 + \frac{1}{1728} r^6 - \frac{1}{768} r^2 + \frac{73}{138\,240} + \left(\frac{1}{11\,520} r^8 + \frac{31}{28\,800} r^4 - \frac{1}{1200} r^6 \right) \cos 4\varphi, \\ T_2(r, \varphi) &= \left(\frac{71}{552\,960} r^{10} - \frac{31}{43\,200} r^8 + \frac{221}{230\,400} r^6 + \frac{1}{4608} r^4 - \frac{547}{2\,764\,800} r^2 \right) \sin 2\varphi + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{36\,864} r^{10} + \frac{31}{201\,600} r^8 - \frac{67}{258\,048} r^6 \right) \sin 6\varphi, \\ h_3(r, \varphi) &= \left(\frac{41}{15\,482\,880} r^{12} - \frac{7}{331\,776} r^{10} + \frac{79}{1\,728\,000} r^8 + \frac{1}{73\,728} r^6 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1181}{33\,177\,600} r^4 - \frac{4049}{64\,512\,000} r^2 \right) \sin 2\varphi + \\ &\quad + \left(-\frac{29}{39\,813\,120} r^{12} + \frac{29}{4\,300\,800} r^{10} - \frac{1109}{43\,352\,064} r^8 + \frac{23\,729}{975\,421\,440} r^6 \right) \sin 6\varphi. \end{aligned}$$

Последующие члены рядов представляют собой аналогичные тригонометрические полиномы, коэффициенты которых, в свою очередь, являются многочленами от r .

Оценим радиус сходимости данных рядов. Например, при $r = 0$ имеем

$$h = 1 + \frac{73}{138\,240} \gamma^2 + \frac{238\,291\,217}{156\,067\,430\,400\,000} \gamma^4 + \frac{86\,683\,166\,091\,871\,277\,713}{10\,057\,327\,448\,227\,332\,489\,216\,000\,000} \gamma^6 + \dots$$

Все коэффициенты этого степенного ряда представляют собой положительные числа. Согласно известной теореме комплексного анализа это означает, что особенность, ограничивающая сходимость ряда и расположенная в комплексной плоскости γ , находится на положительной вещественной оси. Для нахождения этой особой точки так же, как и выше, сформируем последовательность квадратных корней из отношения предыдущего коэффициента ряда к последующему (максимальный номер используемого коэффициента равен 20; приводятся пять последних элементов последовательности):

- 10,833 340 12
- 10,576 530 24
- 10,395 380 35
- 10,260 786 14
- 10,156 865 19
-

Известно, что если эта последовательность сходится, то она сходится к радиусу сходимости. По-видимому, радиус сходимости представляет собой число, незначительно превышающее 10. Каков радиус сходимости в других точках круга? Например, для $r = 1$, $\varphi = 0$ имеем

$$h = 1 + \frac{1}{38\,400} \gamma^2 + \frac{892\,430\,023}{5\,407\,736\,463\,360\,000} \gamma^4 + \frac{781\,713\,706\,853\,446\,010\,687\,833}{72\,838\,727\,350\,200\,255\,733\,825\,536\,000\,000} \gamma^6 + \dots$$

Аналогично сформированная последовательность

10,705 057 91
 10,488 521 95
 10,331 243 72
 10,211 961 27
 10,118 448 70

сходится к тому же пределу. Рассмотрев точку $r = 1$, $\varphi = \pi/4$, получим степенной ряд, содержащий как четные, так и нечетные степени:

$$h = 1 - \frac{1}{24} \gamma - \frac{73}{115\,200} \gamma^2 - \frac{379\,741}{6\,096\,384\,000} \gamma^3 - \frac{10\,223\,842\,219}{4\,326\,189\,170\,688\,000} \gamma^4 + \dots$$

В этом случае можно сформировать две последовательности, аналогичные (3.3):

10,734 581 21	10,924 129 72
10,505 732 21	10,635 848 20
10,342 024 02	10,436 932 87
10,219 072 88	10,291 393 49
10,123 325 62	10,180 282 35
.....

Каждая из этих последовательностей стремится к тому же пределу.

Подробное исследование для разных точек единичной окружности показывает, что для функций T , h радиусы сходимости, во-первых, одинаковы, а во-вторых, не зависят от r , φ . Иными словами, все части решения, представленного степенными рядами, одновременно разрушаются при $\gamma = \gamma^* \approx 10,1$. Предполагалось, что такое разрушение происходит, когда толщина пленки становится равной нулю, однако это разрушение происходит раньше.

Насколько быстро сходятся ряды и сколько надо взять членов рядов, чтобы вплоть до $\gamma = 10$ получить приемлемую точность решения? Данный вопрос исследуем при $r = 1$. В этом случае решение для толщины пленки имеет вид

$$h = 1 - \frac{1}{24} \sin 2\varphi \gamma + \left(-\frac{7}{23\,040} + \frac{19}{57\,600} \cos 4\varphi \right) \gamma^2 + \\ + \left(\frac{5567}{96\,768\,000} \sin 2\varphi + \frac{1451}{304\,819\,200} \sin 6\varphi \right) \gamma^3 + \dots$$

Удержим в этом ряде слагаемые до членов γ^N включительно. Полученные частичные суммы представлены на рис. 2 при $\gamma = 9$ и различных значениях N . Рис. 2 демонстрирует сходимость рядов (1.6). Точки, соответствующие значению $N = 19$, практически

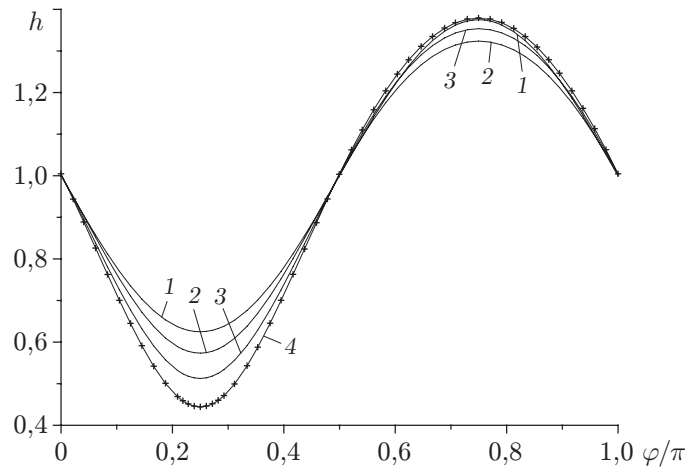


Рис. 2. Частичные суммы ряда (1.6) для профиля толщины пленки на окружности $r = 1$ при $\gamma = 9$ и различном количестве удерживаемых слагаемых N : 1 — $N = 1$; 2 — $N = 2$; 3 — $N = 4$; 4 — $N = 20$; точки — $N = 19$

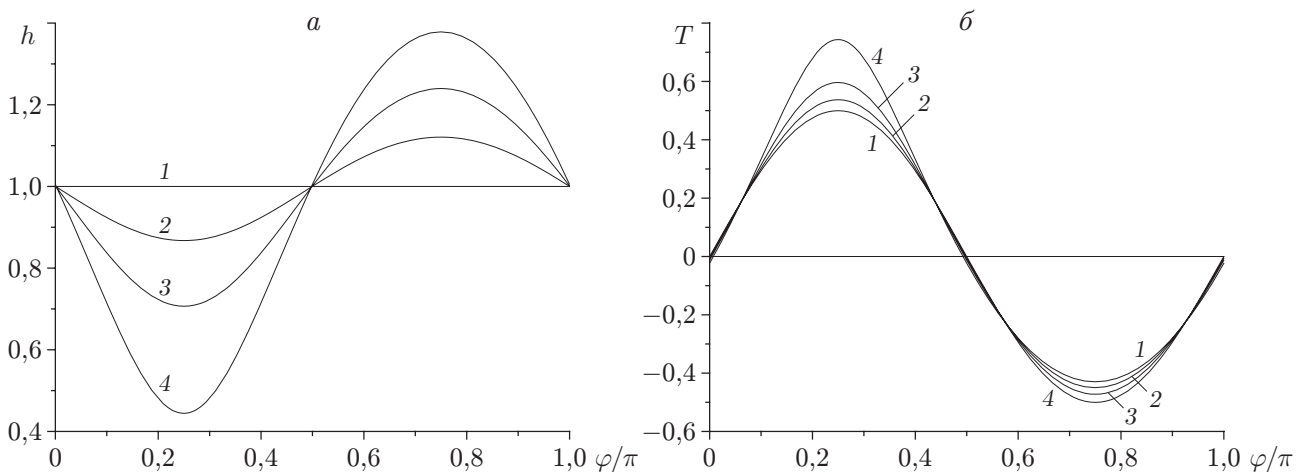


Рис. 3. Изменение толщины пленки (а) и температуры (б) при $r = 1$: 1 — $\gamma = 0$; 2 — $\gamma = 3$; 3 — $\gamma = 6$; 4 — $\gamma = 9$

совпадают с профилем толщины пленки, соответствующим $N = 20$. Из рис. 2, а также из результатов аналогичного исследования для профиля температуры следует, что 20 членов ряда достаточно, чтобы с высокой точностью описывать решение всюду почти до радиуса сходимости.

Эволюция толщины пленки и температурного профиля при $r = 1$ и различных значениях γ представлена на рис. 3. Видно, что с ростом теплового потока на границе (т. е. с увеличением параметра γ) происходит значительная деформация пленки и увеличение градиента температур. Построение решения при бóльших значениях параметра γ прямым суммированием рядов (1.6) невозможно, так как при $\gamma > 10$ ряды начинают расходиться.

Форма поверхности пленки при $\gamma = 10$ приведена на рис. 4. Для наглядности масштабы по осям x_1 , x_2 и h различные. На поверхности пленки показаны линии постоянного уровня. При таком значении теплового потока на цилиндре течение испытывает значительные деформации и в двух точках толщина пленки становится малой. По-видимому, при дальнейшем увеличении γ в этих точках происходит разрыв пленки.

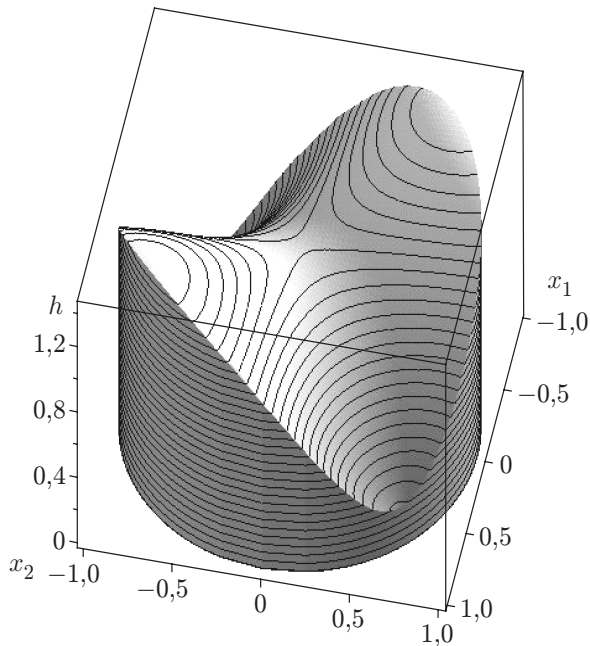


Рис. 4

Рис. 4. Профиль толщины h пленки, расположенной внутри неравномерно нагретого цилиндра, при $\gamma = 10$

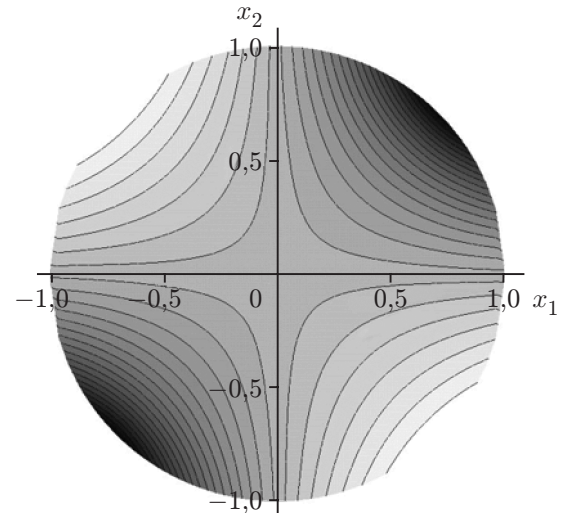


Рис. 5

Рис. 5. Линии уровня температур для пленки, закрепленной внутри твердого цилиндра единичного радиуса

На рис. 5 в плоскости (x_1, x_2) приведены линии постоянной температуры T при $\gamma = 10$. Более темные участки соответствуют более высокой температуре. Температурное поле на пленке в целом является более гладким, чем на ее границе. Иными словами, максимальные градиенты температур достигаются на окружности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев С. В.** Волновое течение пленок жидкости / С. В. Алексеев, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
2. **Кабов О. А.** Формирование регулярных структур в стекающей пленке жидкости при локальном нагреве // Теплофизика и аэромеханика. 1998. Т. 5, № 4. С. 547–552.
3. **Кабов О. А., Кузнецов В. В., Марчук И. В и др.** Регулярные структуры при термокапиллярной конвекции в движущемся тонком слое жидкости // Поверхность. Рентген-, синхротрон. и нейтрон. исслед. 2001. № 9. С. 84–90.
4. **Frank A. M.** 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // Eur. J. Mech. Ser. B. Fluids. 2003. V. 22, N 3. P. 445–471.
5. **Чиннов Е. А., Кабов О. А.** Влияние трехмерных деформаций на локальный теплообмен к неоднородно нагреваемой стекающей пленке жидкости // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 2. С. 269–278.
6. **Pukhnachov V. V.** Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // Eur. J. Appl. Math. 2002. V. 13, N 2. P. 205–224.
7. **Пухначев В. В., Дубинкина С. Б.** Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 89–107.

8. **Воинов О. В.** Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утончения // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 2. С. 285–288.
9. **Caratenuito L., Antanovskii L. K.** Influence of surfactants on the thinning of a free liquid film with rims fixed at a frame // Microgravity Quart. 1995. V. 5, N 4. P. 199–209.
10. **Воинов О. В.** Движения жидких пленок в газе // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 1. С. 70–80.
11. **Пухначев В. В.** Задача о равновесии свободной неизотермической пленки жидкости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 16–29.
12. **Gatapova E. Ya., Kabov O. A., Kuznetsov V. V., Legros J.-C.** Evaporating shear-driven liquid film flow in minichannel with local heat source // J. Engng Thermophys. 2005. V. 13, N 2. P. 17–46.

*Поступила в редакцию 20/VI 2007 г.,
в окончательном варианте — 3/VIII 2007 г.*
