

УДК 539.3:534.1

## О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ИДЕАЛЬНОЙ КРУГОВОЙ ФОРМЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА СОБСТВЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Н. А. Тарануха, Г. С. Лейзерович

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,  
681013 Комсомольск-на-Амуре

С использованием линейной теории гибких пологих оболочек изучено влияние малых начальных отклонений от правильной круговой формы оболочки на частоты и формы собственных изгибных колебаний. Предполагается, что начальные отклонения приводят к взаимодействию изгибных колебаний оболочки с радиальными. Модальные уравнения получены методом Бубнова — Галёркина. Показано, что начальные отклонения от правильной круговой формы расщепляют изгибный частотный спектр, при этом основная частота уменьшается по сравнению со случаем идеальной оболочки.

**Введение.** При изготовлении оболочки неизбежны малые отклонения от идеальной формы, которые называют также начальной погибью. Как правило, они описываются функцией  $w_0(x, y)$  ( $w_0$  — расстояние между точками срединных поверхностей реальной и идеальной оболочек). Как известно, функция  $w_0(x, y)$  сильно влияет на устойчивость оболочек. Начальные отклонения влияют и на колебания оболочек, в частности на их собственные частоты, являющиеся, как и критические нагрузки, интегральными характеристиками жесткости.

Несмотря на большое количество работ, посвященных изучению влияния параметра  $w_0(x, y)$  на изгибные колебания оболочек, некоторые фундаментальные вопросы остаются невыясненными. Считается, что начальные отклонения от правильной круговой формы увеличивают частоту основного тона по сравнению со случаем идеальной оболочки [1–3]. Однако этот вывод вызывает сомнения. Способность оболочки сопротивляться внешнему воздействию ослабевает при наличии отклонения  $w_0(x, y)$ , что, в свою очередь, должно приводить к уменьшению, а не к увеличению основной частоты.

Целью настоящей работы является выяснение причин указанного выше противоречия, а также получение нового решения задачи о влиянии начальных отклонений от правильной круговой формы тонкостенных круговых цилиндрических оболочек на собственные изгибные колебания.

**Уравнения движения.** Пусть шарнирно опертая по торцам оболочка радиусом  $R$ , длиной  $l$  и толщиной  $h$  совершает малые изгибные колебания. Математическая модель основывается на известных уравнениях линейной теории гибких пологих оболочек, которые для изотропной несовершенной оболочки при обычно используемых обозначениях имеют вид [4]

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -L(w_0, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{D}{h} \nabla^4 w = L(w_0, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\nabla^4$  — оператор Лапласа;  $w(x, y, t)$  — радиальный динамический прогиб, положительный при направлении к оси оболочки;  $\Phi(x, y, t)$  — функция напряжений;  $D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$  — цилиндрическая жесткость оболочки;  $E$  — модуль Юнга;  $\mu$  —

коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность;  $t$  — время;  $L = \partial^2/\partial^2x(\partial^2/\partial y^2) + \partial^2/\partial y^2(\partial^2/\partial x^2) - 2\partial^2/\partial x \partial y(\partial^2/\partial x \partial y)$  — дифференциальный оператор.

Уравнения (1), основанные на гипотезе Кирхгофа — Лява, при определении интегральных характеристик колебаний, в частности низших собственных частот тонких изотропных оболочек, дают результаты, близкие к экспериментальным данным [2, 4].

**Традиционное решение.** Для идеальной оболочки каждая точка окружности может стать узлом колебаний. Экспериментально установлено, что начальные отклонения от правильной круговой формы исключают эту неопределенность и приводят к взаимодействию сопряженных изгибных форм [1, 2]. Положение узлов этих форм в общем случае не зависит от способа возбуждения оболочки, а определяется формой  $w_0(x, y)$ . Поэтому принято считать, что динамический прогиб несовершенной оболочки в линейной постановке в первом приближении может быть аппроксимирован выражением [2]

$$w(x, y, t) = h[a_1(t) \sin(\beta y) + a_2(t) \cos(\beta y)] \sin(\alpha x), \quad \alpha = \pi/l, \quad \beta = n/R. \quad (2)$$

Сопряженные изгибные формы  $\sin(\beta y) \sin(\alpha x)$ ,  $\cos(\beta y) \sin(\alpha x)$  в (2) являются формами собственных колебаний идеальной оболочки и соответствуют одному и тому же волновому параметру  $n$ . Как известно, этим формам для идеальной оболочки соответствует одна и та же собственная частота.

Пусть оболочка имеет начальные отклонения, соответствующие характеру волнообразования оболочки при ее изгибных колебаниях:

$$w_0(x, y) = h[a_{10} \sin(\beta y) + a_{20} \cos(\beta y)] \sin(\alpha x). \quad (3)$$

Сначала решим задачу, используя традиционную конечномерную модель (2). Подстановка (2) и (3) в первое уравнение (1) приводит к неоднородному дифференциальному уравнению, из которого определяется функция динамических напряжений в срединной поверхности несовершенной оболочки:

$$\begin{aligned} \Phi = E[\Phi_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \Phi_1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) + \Phi_2 \sin(\beta y) + \Phi_3 \cos(\beta y) + \\ + \Phi_4 \cos(2\alpha x) \sin(\beta y) + \Phi_5 \cos(2\alpha x) \cos(\beta y) + \Phi_6 \sin(\alpha x) + \Phi_7 \cos(2\alpha x) + \\ + \Phi_8 \sin(2\beta y) + \Phi_9 \cos(2\beta y) + \Phi_{01}x^2/2 + \Phi_{02}xy + \Phi_{03}y^2/2]. \quad (4) \end{aligned}$$

Первые десять коэффициентов в (4), соответствующих частному решению дифференциального уравнения, определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \frac{h\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} a_1, \quad \Phi_1 = \frac{h\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} a_2, \quad \Phi_2 = -\frac{h^2\alpha^2}{2\beta^2} a_{10}a_3, \quad \Phi_3 = -\frac{h^2\alpha^2}{2\beta^2} a_{20}a_3, \\ \Phi_4 = \frac{h^2\alpha^2\beta^2}{2(4\alpha^2 + \beta^2)^2} a_{10}a_3, \quad \Phi_5 = \frac{h^2\alpha^2\beta^2}{2(4\alpha^2 + \beta^2)^2} a_{20}a_3, \quad \Phi_6 = \frac{h}{\alpha^2 R} a_3, \\ \Phi_7 = \frac{h^2\beta^2}{16\alpha^2} (a_{10}a_1 + a_{20}a_2), \quad \Phi_8 = -\frac{h^2\alpha^2}{16\beta^2} (a_{10}a_2 + a_{20}a_1), \quad \Phi_9 = \frac{h^2\alpha^2}{16\beta^2} (a_{10}a_1 - a_{20}a_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где для традиционного решения  $a_3(t) \equiv 0$ . Три последних слагаемых в (4) взяты из общего интеграла уравнения  $\nabla^4\Phi = 0$ . Как и в [2, 3], они позволяют удовлетворить “в среднем” тангенциальным краевым условиям

$$\frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \sigma_x dy = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \tau dy = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l, \quad (6)$$

где  $\sigma_x = \partial^2\Phi/\partial y^2$ ,  $\tau = -\partial^2\Phi/\partial x \partial y$  — нормальное и касательное напряжения.

Из условия непрерывности окружного перемещения  $v(x, y, t)$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dy = 0 \quad (7)$$

и краевых условий (6) найдем  $\Phi_{01} = h^2 \beta^2 (a_{10} a_1 + a_{20} a_2) / 4$ ,  $\Phi_{02} = \Phi_{03} = 0$ .

Подставляя (2)–(4) во второе уравнение (1) и применяя метод Бубнова — Галёркина, получим следующие уравнения:

$$\ddot{a}_1 + c_{11} a_1 + c_{12} a_{10} a_{20} a_2 = 0, \quad \ddot{a}_2 + c_{21} a_{10} a_{20} a_1 + c_{22} a_2 = 0, \quad (8)$$

где точки обозначают дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = \lambda t$  ( $\lambda$  — собственная частота), а коэффициенты равны:

$$c_{11} = 1 + \frac{\varepsilon}{8\omega^2} [(3 + \theta^4) a_{10}^2 + \theta^4 a_{20}^2], \quad c_{22} = 1 + \frac{\varepsilon}{8\omega^2} [(3 + \theta^4) a_{20}^2 + \theta^4 a_{10}^2], \quad (9)$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{3\varepsilon}{8\omega^2}, \quad \varepsilon = \left( \frac{n^2 h}{R} \right)^2, \quad \theta = \frac{\pi R}{nl}.$$

Квадрат безразмерной частоты собственных изгибных колебаний идеальной круговой цилиндрической оболочки определяется по формуле

$$\omega^2 = \frac{\rho}{E} R^2 \lambda^2 = \frac{\varepsilon(1 + \theta^2)^2}{12(1 - \mu^2)} + \frac{\theta^4}{(1 + \theta^2)^2}.$$

Уравнения (8) аналогичны уравнениям, приведенным в [2]. Однако выражения для всех коэффициентов в [2] отличаются от (9), поскольку в [2] при решении этой задачи не выполнено условие непрерывности перемещения  $v(x, y, t)$  (7).

Из частотного уравнения, соответствующего (8), найдены две собственные частоты. Их квадраты определяются по формулам

$$\Omega_{01k}^2 = (\omega_{01k}/\omega)^2 = 1 + \varepsilon \theta^4 (a_{10}^2 + a_{20}^2) / (8\omega^2), \quad (10)$$

$$\Omega_{02k}^2 = (\omega_{02k}/\omega)^2 = \Omega_{01k}^2 + 3\varepsilon (a_{10}^2 + a_{20}^2) / (8\omega^2),$$

где индекс  $k$  соответствует традиционному решению.

Таким образом, начальное отклонение (3) расщепляет изгибный частотный спектр оболочки. Расстройка собственных частот имеет место и в том случае, когда одна из амплитуд начального отклонения равна нулю. Из первой формулы в (10) следует, что отклонение  $w_0(x, y)$  увеличивает частоту основного тона по сравнению со случаем идеальной оболочки. Аналогичный вывод сделан в [2, 3]. Однако это заключение ошибочно, что, по нашему мнению, связано с неудачной аппроксимацией динамического прогиба (2). Зависимость (2) не учитывает уменьшение обобщенной изгибной жесткости оболочки, обусловленное наличием начальных отклонений от правильной круговой формы.

Следует отметить, что при  $\theta \rightarrow 0$ , т. е. при предельном переходе к бесконечно длинной несовершенной оболочке (кольцу, находящемуся в условиях плоской деформации), формулы (10) аналогичны формулам в работе [5]:

$$\Omega_{01k}^2 = 1, \quad \Omega_{02k}^2 = 1 + 9(1 - \mu^2)(a_{10}^2 + a_{20}^2)/2. \quad (11)$$

Согласно (11) низшая собственная частота  $\Omega_{01k}$  бесконечно длинной оболочки не зависит от отклонения  $w_0(x, y)$ , а частота  $\Omega_{02k}$  при результирующей амплитуде начальных отклонений порядка толщины оболочки превышает основную частоту идеальной оболочки в несколько раз.

**Новое решение.** Ниже предлагается уточнение традиционной конечномерной модели (2). Предполагается, что начальные отклонения от правильной круговой формы приводят не только к взаимодействию сопряженных изгибных форм, но и к тому, что узлы этих форм могут смещаться в радиальном направлении. Иными словами, считается, что отклонение  $w_0(x, y)$  приводит к связанным изгибно-радиальным колебаниям (в случае идеальной оболочки эти колебания не зависят друг от друга). Введем в (2) дополнительную координату  $a_3(t)$ , соответствующую радиальной форме колебаний:

$$w(x, y, t) = h[a_1(t) \sin(\beta y) + a_2(t) \cos(\beta y) + a_3(t)] \sin(\alpha x). \quad (12)$$

Для сравнения моделей (2) и (12) решим задачу, когда тангенциальные краевые условия удовлетворяются “в среднем”. Подстановка (3) и (12) в (1) и решение уравнений теории пологих оболочек по схеме П. Ф. Папковича приводят к следующим модальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + c_{11}a_1 + c_{12}a_{10}a_{20}a_2 + c_{13}a_{10}a_3 &= 0, \\ \ddot{a}_2 + c_{21}a_{10}a_{20}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_{20}a_3 &= 0, \quad \ddot{a}_3 + c_{31}a_{10}a_1 + c_{32}a_{20}a_2 + c_{33}a_3 &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где коэффициенты  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  и  $c_{12} = c_{21}$  определяются по (9), а остальные равны:

$$\begin{aligned} c_{33} &= \frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon\theta^4}{12(1-\mu^2)} + \frac{\varepsilon\theta^4}{8} \left[ 2 + \frac{1}{(1+4\theta^2)^2} \right] (a_{10}^2 + a_{20}^2) \right\}, \\ c_{13} = c_{23} &= -\frac{8\varepsilon^{1/2}}{3\pi\omega^2} \left[ 1 + \frac{\theta^4}{(1+4\theta^2)^2} \right], \quad c_{31} = c_{32} = -\frac{4\varepsilon^{1/2}}{3\pi\omega^2} \left[ 1 + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Незначительное отклонение от симметрии  $c_{13} \neq 2c_{31}$ ,  $c_{23} \neq 2c_{32}$  объясняется тем, что тангенциальные краевые условия удовлетворены “в среднем”. При точном их удовлетворении симметрия имеет место.

Из частотного уравнения, соответствующего (13), найдены три собственные частоты:  $\Omega_{01} < 1 < \Omega_{02} \ll \Omega_{03}$ . Первым двум соответствуют преимущественно изгибные колебания несовершенной оболочки, а третьей — преимущественно радиальные. Квадрат второй частоты определяется точно:

$$\Omega_{02}^2 = 1 + \varepsilon\theta^4(a_{10}^2 + a_{20}^2)/(8\omega^2). \quad (14)$$

При этом следует отметить, что  $\Omega_{02} = \Omega_{01k}$ .

**Анализ результатов.** Зависимость квадрата изгибной частоты оболочки с параметрами  $l/R = 0,6$ ;  $R/h = 200$  от амплитуды начального отклонения  $a_{10}$  ( $a_{20} = 0$ ) представлена на рис. 1. Расчеты выполнены при числе окружных волн  $n = 10$  и коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$ . Линия 2 ( $\Omega^2 = 1$ ) соответствует квадрату частоты идеальной оболочки. Новому решению  $\Omega_{01}^2$ ,  $\Omega_{02}^2$  соответствуют линии 1, 3. Для сравнения на рис. 1 показаны квадраты частот  $\Omega_{01k}^2 = \Omega_{02}^2$  (линия 3) и  $\Omega_{02k}^2$  (линия 4), вычисленные по формулам (10), которые получены на основе традиционной модели (2). Из рис. 1 следует, что в новом решении расстройка собственных частот преимущественно изгибных колебаний тонких оболочек незначительна, что подтверждается опытными данными [1]. Близость частот  $\Omega_{01}$  и  $\Omega_{02}$  обуславливает интенсивный энергообмен между сопряженными формами. Наоборот, традиционное решение приводит к существенной расстройке собственных частот. Следует также отметить, что в отличие от традиционного в новом решении основная частота несовершенной оболочки меньше частоты основного тона соответствующей идеальной оболочки.

Для относительно длинных несовершенных оболочек (при  $\theta < 0,5$ ) из частотного уравнения может быть получено следующее приближенное выражение для квадрата основной частоты:

$$\Omega_{01}^2 \approx \Omega_{02}^2 [1 - 3\varepsilon(a_{10}^2 + a_{20}^2)/8]. \quad (15)$$

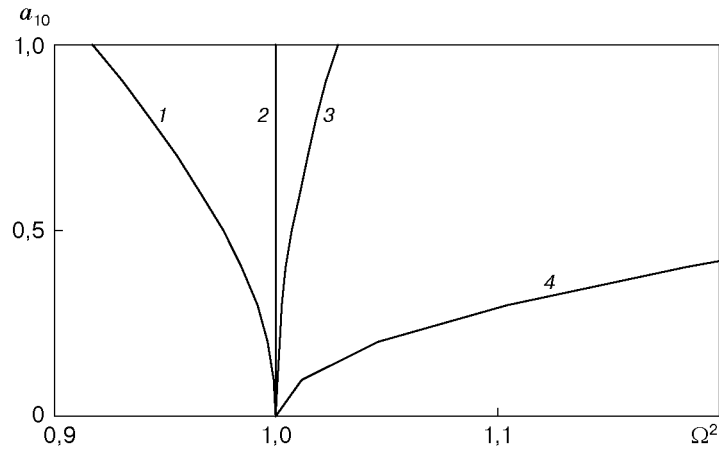


Рис. 1. Зависимость квадрата собственной изгибной частоты оболочки от амплитуды начального отклонения:

1 — новое решение ( $\Omega_{01}^2$ ); 2 — решение для идеальной оболочки ( $\Omega^2$ ); 3 — новое ( $\Omega_{02}^2$ ) и традиционное ( $\Omega_{01k}^2$ ) решения; 4 — традиционное решение ( $\Omega_{02k}^2$ )

Из (15) следует, что с ростом амплитуды начальных отклонений их влияние на основную частоту усиливается.

При предельном переходе к бесконечно длинной несовершенной оболочке формулы (14) и (15) принимают вид  $\Omega_{01}^2 \approx 1 - 3\varepsilon(a_{10}^2 + a_{20}^2)/8$ ,  $\Omega_{02}^2 = 1$ , т. е. аналогичны формулам в работе [5].

Частота преимущественно радиальных колебаний оболочки  $\Omega_{03}$  повышается с ростом амплитуды отклонений.

**Влияние формулировки граничных условий.** Известно, что удовлетворение “в среднем” тангенциальным граничным условиям в случае идеальной оболочки конечной длины при определении ее динамических характеристик приводит к значительной погрешности. Тангенциальные условия закрепления торцов влияют и на колебания оболочек с начальными отклонениями. Однако это влияние вследствие существенного усложнения задачи практически не изучалось. В настоящей работе на основе уточненной конечномерной модели (12) рассматриваются четыре варианта тангенциальных граничных условий

$$\sigma_x = \tau = 0, \quad \sigma_x = v = 0, \quad u = \tau = 0, \quad u = v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l. \quad (16)$$

Эти условия считаются одинаковыми на торцах и удовлетворяются точно.

Подстановка (3) и (12) в первое уравнение (1) приводит к дифференциальному уравнению, из которого определяется функция напряжений  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi = E \{ & \Phi_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) + \Phi_1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) + \Phi_2 \sin(\beta y) + \Phi_3 \cos(\beta y) + \Phi_4 \cos(2\alpha x) \sin(\beta y) + \\ & + \Phi_5 \cos(2\alpha x) \cos(\beta y) + \Phi_6 \sin(\alpha x) + \Phi_7 \cos(2\alpha x) + \Phi_8 \sin(2\beta y) + \Phi_9 \cos(2\beta y) + \Phi_{01} x^2/2 + \\ & + \Phi_{02} xy + \Phi_{03} y^2/2 + [\Phi_{10} \text{ch}(\beta x) + \Phi_{11} \text{sh}(\beta x) + \Phi_{12} \beta x \text{sh}(\beta x) + \Phi_{13} \beta x \text{ch}(\beta x)] \sin(\beta y) + \\ & + [\Phi_{20} \text{ch}(\beta x) + \Phi_{21} \text{sh}(\beta x) + \Phi_{22} \beta x \text{sh}(\beta x) + \Phi_{23} \beta x \text{ch}(\beta x)] \cos(\beta y) + \\ & + [\Phi_{30} \text{ch}(2\beta x) + \Phi_{31} \text{sh}(2\beta x) + \Phi_{32} 2\beta x \text{sh}(2\beta x) + \Phi_{33} 2\beta x \text{ch}(2\beta x)] \sin(2\beta y) + \\ & + [\Phi_{40} \text{ch}(2\beta x) + \Phi_{41} \text{sh}(2\beta x) + \Phi_{42} 2\beta x \text{sh}(2\beta x) + \Phi_{43} 2\beta x \text{ch}(2\beta x)] \cos(2\beta y) \}. \quad (17) \end{aligned}$$

Первые десять коэффициентов в (17) вычисляются по формулам (5), остальные зависят от варианта тангенциальных граничных условий (16).

При  $\sigma_x = \tau = 0$

$$\Phi_{01} = 4\alpha^2\Phi_7, \quad \Phi_{02} = \Phi_{03} = 0, \quad \Phi_{10} = -(\Phi_2 + \Phi_4),$$

$$\Phi_{11} = \frac{1}{\beta l + \text{sh}(\beta l)} \left\{ [1 - \text{ch}(\beta l)]\Phi_{10} - \frac{\alpha}{\beta} \beta l \Phi_0 \right\},$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\beta l + \text{sh}(\beta l)} \left\{ -\text{sh}(\beta l)\Phi_{10} + \frac{\alpha}{\beta} [1 + \text{ch}(\beta l)]\Phi_0 \right\},$$

$$\Phi_{13} = \frac{1}{\beta l + \text{sh}(\beta l)} \left\{ -[1 - \text{ch}(\beta l)]\Phi_{10} - \frac{\alpha}{\beta} \text{sh}(\beta l)\Phi_0 \right\},$$

$$\Phi_{20} = -(\Phi_3 + \Phi_5), \quad \Phi_{21} = \frac{1}{\beta l + \text{sh}(\beta l)} \left\{ [1 - \text{ch}(\beta l)]\Phi_{20} - \frac{\alpha}{\beta} \beta l \Phi_1 \right\},$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{\beta l + \text{sh}(\beta l)} \left\{ -\text{sh}(\beta l)\Phi_{20} + \frac{\alpha}{\beta} [1 + \text{ch}(\beta l)]\Phi_1 \right\},$$

$$\Phi_{23} = \frac{1}{\beta l + \text{sh}(\beta l)} \left\{ -[1 - \text{ch}(\beta l)]\Phi_{20} - \frac{\alpha}{\beta} \text{sh}(\beta l)\Phi_1 \right\},$$

$$\Phi_{30} = -\Phi_8, \quad \Phi_{31} = \frac{1 - \text{ch}(2\beta l)}{2\beta l + \text{sh}(2\beta l)} \Phi_{30},$$

$$\Phi_{32} = -\frac{\text{sh}(2\beta l)}{2\beta l + \text{sh}(2\beta l)} \Phi_{30}, \quad \Phi_{33} = -\frac{1 - \text{ch}(2\beta l)}{2\beta l + \text{sh}(2\beta l)} \Phi_{30},$$

$$\Phi_{40} = -\Phi_9, \quad \Phi_{41} = \frac{1 - \text{ch}(2\beta l)}{2\beta l + \text{sh}(2\beta l)} \Phi_{40},$$

$$\Phi_{42} = -\frac{\text{sh}(2\beta l)}{2\beta l + \text{sh}(2\beta l)} \Phi_{40}, \quad \Phi_{43} = -\frac{1 - \text{ch}(2\beta l)}{2\beta l + \text{sh}(2\beta l)} \Phi_{40}.$$

Значения коэффициентов для других вариантов тангенциальных закреплений торцов оболочки не приводятся из-за их громоздкости.

Подставляя (3), (12) и (17) во второе уравнение (1) и применяя метод Бубнова — Галёркина, получим уравнения, аналогичные уравнениям (13). В этих уравнениях коэффициенты при  $\sigma_x = \tau = 0$  определяются по следующим формулам:

$$c_{11} = 1 - \frac{8\theta^7}{\pi\omega^2(1+\theta^2)^4} \frac{\text{ch}(\pi/\theta) + 1}{\text{sh}(\pi/\theta) + \pi/\theta} + \\ + \frac{\varepsilon}{8\omega^2} \left[ (3 + \theta^4)a_{10}^2 + \theta^4 a_{20}^2 - \frac{2\theta^5}{\pi} \frac{\text{ch}(2\pi/\theta) - 1}{\text{sh}(2\pi/\theta) + 2\pi/\theta} (a_{10}^2 + a_{20}^2) \right],$$

$$c_{22} = 1 - \frac{8\theta^7}{\pi\omega^2(1+\theta^2)^4} \frac{\text{ch}(\pi/\theta) + 1}{\text{sh}(\pi/\theta) + \pi/\theta} + \\ + \frac{\varepsilon}{8\omega^2} \left[ (3 + \theta^4)a_{20}^2 + \theta^4 a_{10}^2 - \frac{2\theta^5}{\pi} \frac{\text{ch}(2\pi/\theta) - 1}{\text{sh}(2\pi/\theta) + 2\pi/\theta} (a_{10}^2 + a_{20}^2) \right],$$

$$c_{33} = \frac{p^2}{\omega^2} + \frac{\varepsilon\theta^4}{8\omega^2} \left[ 2 + \frac{1}{(1+4\theta^2)^2} - \frac{512\theta^5(1+2\theta^2)^2}{\pi(1+4\theta^2)^4} \frac{\text{ch}(\pi/\theta) - 1}{\text{sh}(\pi/\theta) + \pi/\theta} \right] (a_{10}^2 + a_{20}^2),$$

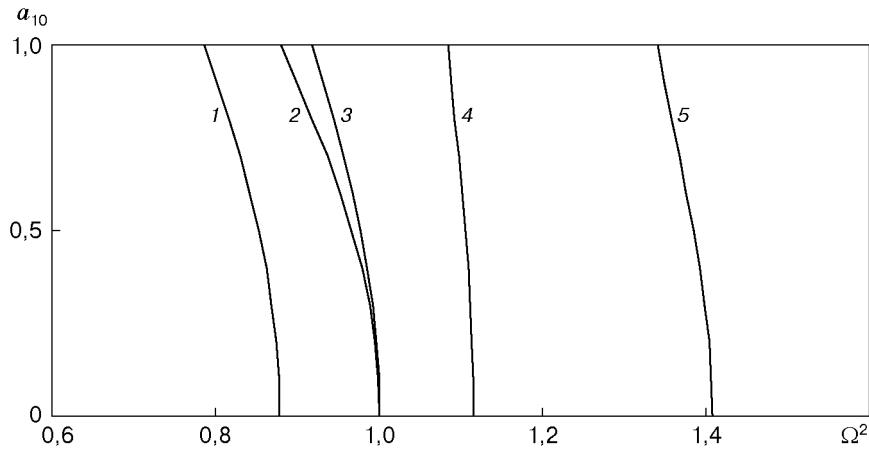


Рис. 2. Зависимость квадрата низшей собственной частоты оболочки от амплитуды начального отклонения:

1 —  $\Omega_{01\sigma\tau}^2$  ( $\sigma_x = \tau = 0$ ); 2 —  $\Omega_{01\sigma v}^2$  ( $\sigma_x = v = 0$ ); 3 —  $\Omega_{01}^2$  (при интегральных граничных условиях (6)); 4 —  $\Omega_{01u\tau}^2$  ( $u = \tau = 0$ ); 5 —  $\Omega_{01uv}^2$  ( $u = v = 0$ )

$$c_{13} = -\frac{8\varepsilon^{0,5}}{3\pi\omega^2} \left\{ 1 + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} + \frac{3\theta^8}{(1+\theta^2)^2(1+4\theta^2)} \left[ 1 - \frac{4(1+2\theta^2)}{1+4\theta^2} \frac{\text{sh}(\pi/\theta)}{\text{sh}(\pi/\theta) + \pi/\theta} \right] \right\},$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{3\varepsilon}{8\omega^2}, \quad c_{23} = c_{13}, \quad c_{31} = \frac{1}{2} c_{13}, \quad c_{32} = \frac{1}{2} c_{23}, \quad p^2 = 1 + \frac{\varepsilon\theta^4}{12(1-\mu^2)}.$$

Из частотного уравнения в зависимости от тангенциальных граничных условий, характеризующихся далее индексами  $i$  и  $j$ , найдено три безразмерных собственных частоты:  $\Omega_{01ij} < \Omega_{02ij} \ll \Omega_{03ij}$ . Первым двум частотам соответствуют преимущественно изгибные колебания оболочки с отклонением  $w_0(x, y)$ , а третьей — преимущественно радиальные.

На рис. 2 представлена зависимость квадрата низшей безразмерной собственной частоты оболочки с параметрами  $l/R = 0,6$ ;  $R/h = 200$  от амплитуды начального отклонения  $a_{10}$  ( $a_{20} = 0$ ). Расчеты выполнены при числе окружных волн  $n = 10$  и коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,3$ . Линия 1 соответствует квадрату частоты  $\Omega_{01\sigma\tau}^2$  при граничных условиях  $\sigma_x = \tau = 0$ , линия 2 —  $\Omega_{01\sigma v}^2$  ( $\sigma_x = v = 0$ ), 3 —  $\Omega_{01}^2$  (при интегральных граничных условиях (6)), 4 —  $\Omega_{01u\tau}^2$  ( $u = \tau = 0$ ), 5 —  $\Omega_{01uv}^2$  ( $u = v = 0$ ). Из рис. 2 следует, что для оболочки с рассматриваемыми параметрами удовлетворение тангенциальным граничным условиям “в среднем” приводит к значительной погрешности при определении ее динамических характеристик. При всех вариантах тангенциальных граничных условий начальные отклонения уменьшают частоту основного тона по сравнению со случаем идеальной оболочки.

Из результатов расчетов следует, что при свободном сближении торцов оболочки с отклонением и без отклонения и относительной длине оболочки  $\theta > 0,3$  удовлетворение тангенциальным граничным условиям “в среднем” приводит к существенному завышению точных значений низших частот преимущественно изгибных колебаний. В отсутствие сближения торцов оболочки удовлетворение тангенциальным граничным условиям “в среднем” дает значительную погрешность уже при  $\theta > 0,2$ . При этом точные значения собственных частот занижаются.

**Выводы.** Проведенные исследования показали, что начальные отклонения от правильной круговой формы оказывают существенное влияние на собственные изгибные колебания оболочки, приводя к взаимодействию сопряженных изгибных форм, а также изгибных колебаний оболочки с радиальными. Частотный изгибный спектр расщепляется, при этом основная частота уменьшается по сравнению со случаем идеальной оболочки, а не увеличивается.

Точное удовлетворение тангенциальным граничным условиям позволяет с существенно меньшей погрешностью прогнозировать условия резонанса, который может возникнуть при воздействии на реальную оболочку внешних периодических или иных динамических нагрузок.

В работе выполнена лишь предварительная количественная оценка влияния начальных отклонений на частоты собственных колебаний, поскольку решение задачи получено в первом приближении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (Обзор) // Прикл. механика. 1998. № 8. С. 3–31.
2. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснопольская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1984.
3. Ладыгина Е. В., Маневич А. И. Нелинейные свободные изгибные колебания цилиндрической оболочки с учетом взаимодействия сопряженных форм // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 3. С. 169–175.
4. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.
5. Лейзерович Г. С. О влиянии начальной погиби на изгибные колебания круговых цилиндрических оболочек // Актуальные проблемы строительства и архитектуры в районах Дальнего Востока: Межвуз. сб. Иркутск: Иркут. политехн. ин-т; Благовещенск: Благовещ. технол. ин-т, 1990. Ч. 1. С. 90–94.

*Поступила в редакцию 24/IV 2000 г.,  
в окончательном варианте — 26/X 2000 г.*

---