

ТЕОРИЯ КОРОТКИХ ВОЛН*

А. А. Гриб, О. С. Рыжов, С. А. Христианович

(Ленинград, Москва, Новосибирск)

Проблема взаимодействия ударных волн с препятствиями привлекала внимание многих исследователей. Однако теоретически до последнего времени были изучены только простейшие случаи явления отражения [1-6].

Для упрощения математического исследования процессов распространения волн с небольшими избыточными давлениями обычно пользуются уравнениями акустики. Однако в ряде задач, связанных с взаимодействием ударных волн, такое приближение дает качественно неверную картину явления. Хорошо известно, например, что в рамках акустической теории всегда возможно регулярное отражение и угол отражения равен углу, под которым ударный фронт падает на жесткую стенку. В действительности же регулярное отражение возможно не при всех углах падения, а когда оно возможно и угол падения близок к критическому, то он примерно в два раза превышает угол отражения. Аналогичная ситуация возникает и при изучении выхода ударной волны, распространяющейся в воде, на свободную поверхность.

В этих и многих других нестационарных газодинамических явлениях изменения параметров течения происходят в узких областях, прилегающих к ударным фронтам. Несмотря на малость избыточных величин, характеризующих возмущенное движение, их изменения в таких областях происходят весьма быстро. Поэтому градиенты давления, плотности и скорости частиц велики и становится существенной зависимость скорости распространения возмущений от величины давления. Такие течения с небольшими, но резкими изменениями параметров среды, происходящими на относительно небольших расстояниях можно назвать «короткими волнами». Их математическое исследование не может, естественно, опираться на волновое уравнение акустики. В качестве аналога коротких волн в стационарной газодинамике можно привести течения с околосвуковыми скоростями, которые также не могут быть исследованы с помощью линейной теории. Общие принципы теории коротких волн были развиты в работе [7].

§ 1. Вывод уравнений. 1°. Для слабых ударных волн можно считать с большой точностью, что процесс сжатия происходит при постоянной энтропии и положить

$$p = P_0 \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (1.1)$$

Здесь p — избыточное давление, ρ — плотность, ρ_0 — начальная плотность, P_0 и n — постоянные величины. Для воды $P_0 \approx 3000 \text{ кг/см}^2$, $n \approx 7$; для воздуха P_0 означает начальное давление, а $n \approx 1.4$.

Если ограничиться течениями, имеющими ось симметрии, то удобно ввести полярные координаты r и ϕ . Проекция вектора скорости на эти оси обозначим соответственно через u и v , а время — через t .

В дальнейшем будем рассматривать движения, в которых избыточные давления малы по сравнению с начальным. Для их исследования введем безразмерные функции, положив

$$\begin{aligned} u &= a_0 M_0 \alpha, & v &= a_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} V_0 \gamma, \\ a &= a_0 \left(1 + \frac{n-1}{2} M_0 \alpha \right), & a_0 &= \sqrt{\frac{n P_0}{\rho_0}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

* Доклад, прочитанный 1 февраля 1960 г. на 1-ом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

Здесь a — скорость звука, a_0 — начальная скорость звука, величины μ , ν и α — порядка единицы, а постоянные M_0 и V_0 — значительно меньше единицы.

Для вывода приближенных уравнений коротких волн перейдем к подвижной системе координат

$$r = a_0 t \left[1 + \frac{n+1}{2} M_0 \Delta(\tau) + \frac{n+1}{2} \delta_0 \delta \right], \quad \vartheta = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \vartheta_0 Y, \quad \tau = \ln t \quad (1.3)$$

Здесь функция Δ , зависящая только от времени, порядка единицы, безразмерные переменные δ и Y — также порядка единицы, постоянная δ_0 мала по сравнению с ней, а величина постоянной ϑ_0 может быть как порядка единицы, так и значительно меньше нее.

Подставляя формулы (1.2) и (1.3) в уравнения движения и уравнение неразрывности и заменяя в последнем разность $\partial\mu/\partial\delta - \partial\alpha/\partial\delta$ ее выражением из уравнений движения, получим, отбрасывая малые величины [7].

$$\alpha = \mu \left(M = \frac{P}{nP_0} \right), \quad \frac{\partial\nu}{\partial\delta} - \frac{M_0\delta_0}{V_0\vartheta_0} \frac{\partial\mu}{\partial Y} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau} + \left[\frac{M_0}{\delta_0} \mu - \frac{M_0}{\delta_0} \left(\Delta + \frac{d\Delta}{d\tau} \right) - \delta \right] \frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \frac{1}{2} \frac{V_0}{M_0\vartheta_0} \frac{\partial\nu}{\partial Y} + k\mu = 0$$

где $k = 1$.

Для плоско-параллельных течений, рассматриваемых в цилиндрических координатах, которые мы также обозначим через $r\vartheta$, можно получить аналогичную систему. Ее первые два уравнения совпадают с двумя первыми уравнениями (1.4), а последнее уравнение отличается от последнего уравнения (1.4) только численным значением коэффициента k : он равен не 1, а $1/2$.

В случае, когда постоянная ϑ_0 мала по сравнению с единицей, переход от цилиндрической системы координат $r\vartheta$ к декартовой xy осуществляется по формулам

$$x = a_0 t \left[1 + \frac{n+1}{2} M_0 \Delta(\tau) + \frac{n+1}{2} \delta_0 X \right], \quad y = r\vartheta, \quad \delta = X + \frac{1}{2} \frac{\vartheta_0^2}{\delta_0} Y^2$$

2°. Система уравнений (1.4) является основной при исследовании коротких волн. Перейдем теперь к более детальному изучению различных типов этих течений.

1) Пусть $\vartheta_0 \sim 1$. Тогда $V_0/M_0 \sim \delta_0$ и последнее уравнение (1.4) совпадает с уравнением, которое описывает одномерные течения. Отсюда следует, что в том случае, когда производные от искомых функций по направлению, перпендикулярному направлению основного потока, малы, движение волны вдоль луча не зависит от движения по соседним лучам.

2) Пусть $\vartheta_0 \ll 1$. Положим в этом случае

$$\delta_0 = M_0^{1/2} \vartheta_0, \quad V_0 = M_0^{3/2} \quad (1.5)$$

Течения, удовлетворяющие равенствам (1.5), делятся на два основных вида.

а) Пусть $\delta_0 = M_0$. Тогда имеем

$$\frac{\partial\nu}{\partial\delta} = \frac{\partial\mu}{\partial Y}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\tau} + \left[\mu - \left(\Delta + \frac{d\Delta}{d\tau} \right) - \delta \right] \frac{\partial\mu}{\partial\delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial\nu}{\partial Y} + k\mu = 0 \quad (1.6)$$

в) Пусть $\delta_0 \ll M_0$. Отсюда следует, что и $\vartheta_0 \ll M_0^{1/2}$. Соответствующие течения газа можно назвать «очень короткими волнами». Примером таких волн служит течение, возникающее при нерегулярном отражении ударной волны от жесткой стенки, когда угол падения близок к критиче-

скому [7]. Размер области, где градиенты давления, плотности и скорости частиц газа велики, будет определяться углом между траекторией тройной точки *A* и стенкой (фиг. 1). Обозначим этот угол через χ . При χ^2/M_0 порядка нескольких сотых можно пользоваться уравнениями очень коротких волн. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial \delta} = \frac{\partial \mu}{\partial Y}, \quad \left[\mu - \left(\Delta + \frac{d\Delta}{d\tau} \right) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial Y} \right] = 0 \quad (1.7)$$

В этом случае $\delta = X$, т. е. цилиндрические и декартовы координаты совпадают в первом приближении между собой.

Если $\Delta = \text{const} = X_0$, то система (1.7) совпадает с уравнениями трансзвуковых течений [8, 9].

Отметим, что течения газа в коротких волнах являются безвихревыми.

3°. С помощью уравнений коротких волн в первую очередь можно исследовать течения, явно не зависящие от времени. Для таких течений $\Delta + d\Delta/d\tau = \text{const}$, $\partial \mu / \partial \tau = 0$. Однако уравнения коротких волн допускают и более общую систему решений, которые могут быть названы обобщенными автомодельными. Для их определения произведем следующую замену переменных

$$\delta = \delta^\circ e^{-b\tau}, \quad \mu = \mu^\circ e^{-b\tau}, \quad v = v^\circ e^{-1/2 b\tau}, \quad Y = Y^\circ e^{-1/2 b\tau} \quad (1.8)$$

причем в качестве независимых переменных выберем величины τ , μ° и Y° . Система уравнений коротких волн примет теперь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\circ}{\partial \mu^\circ} + \frac{\partial \delta^\circ}{\partial Y^\circ} &= 0 \\ (b-1)\delta^\circ + \mu^\circ - \left(\Delta + \frac{d\Delta}{d\tau} \right) \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \tau} + (b-1)\mu^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \mu^\circ} - \\ - \frac{1}{2} b Y^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial Y^\circ} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^\circ}{\partial Y^\circ} \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \mu^\circ} - \frac{\partial v^\circ}{\partial \mu^\circ} \frac{\partial \delta^\circ}{\partial Y^\circ} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если положить $\Delta + d\Delta/d\tau = \text{const} = \omega$ и $\partial \delta^\circ / \partial \tau = 0$, то получим систему уравнений, не зависящую явно от времени.

Система уравнений (1.9) имеет частное решение вида

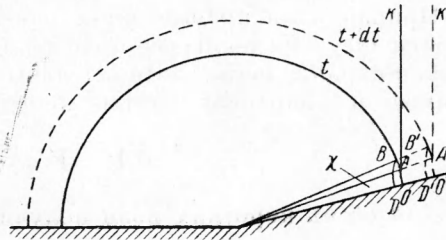
$$v^\circ = \varphi(\mu^\circ, \tau) Y^\circ, \quad \delta^\circ = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu^\circ} Y^{\circ 2} + F(\mu^\circ, \tau) \quad (1.10)$$

В частности, для сферических волн при $b = 1$ функции φ и F определяются решением следующих уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu^\circ} &= z, \quad \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \varphi z \frac{\partial z}{\partial \varphi} + z^2 + z = 0 \\ \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial F}{\partial \mu^\circ} - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \mu^\circ - \left(\Delta + \frac{d\Delta}{d\tau} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

§ 2. Граничные условия. 1°. Дифференциальное уравнение, определяющее положение ударного фронта, получается следующим путем. Скорость его распространения в направлении радиуса-вектора r равна

$$N_r = \frac{N}{\cos \psi} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{4} M_0 (\mu + \mu_1) + \frac{\psi^2}{2} \right] \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Здесь μ_1 — значение функции μ , соответствующее начальному избыточному давлению p_1 , а ψ — угол между нормалью к ударному фронту и направлением радиуса-вектора. Пусть, далее, имеется некоторое решение системы уравнений (1.6) или (1.7)

$$\delta = \delta(\mu, Y, \tau), \quad v = v(\mu, Y, \tau)$$

Тогда для скорости распространения N_r верна формула

$$N_r = \frac{dr}{dt} = a_0 \left[1 + \frac{n+1}{2} M_0 \left(\Delta + \frac{d\Delta}{d\tau} \right) + \frac{n+1}{2} \delta_0 \left(\delta + \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\tau} \right) \right] \quad (2.2)$$

Приравнивая правые части равенств (2.1) и (2.2), получим искомое выражение, определяющее положение ударного фронта. В частности, для плоско-параллельных автомодельных движений, не зависящих явно от τ , имеем в декартовой системе координат

$$\frac{dX}{dY} = - \left[Y + \sqrt{2X + Y^2 - (\mu + \mu_1)} \right]$$

Для очень коротких волн получим соответственно

$$\frac{dX}{dY} = \sqrt{2X_0 - (\mu + \mu_1)}$$

Дифференциальное уравнение фронта ударной волны после преобразования (1.8) примет вид

$$\delta(1-b) + \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \tau} + \frac{1}{2} b Y^\circ \frac{\partial \delta^\circ}{\partial Y^\circ} + \frac{\partial \delta^\circ}{\partial \mu^\circ} \frac{d\mu^\circ}{d\tau} = \frac{1}{2} (\mu^\circ + \mu_1^\circ) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta^\circ}{\partial Y^\circ} \right)^2$$

Заметим теперь, что уравнение Гюгонио на ударном фронте удовлетворяется с принятой точностью автоматически, поскольку во всем потоке число M и избыточное давление p связаны первым соотношением (1.4). Граничное условие на фронте ударной волны, которое должно быть удовлетворено дополнительно, заключается в требовании непрерывности составляющей скорости, параллельной фронту, при переходе через него. Это граничное условие в некоторых случаях удобно заменить выполнением эквивалентного ему интегрального соотношения [7].

Вывод указанного интегрального соотношения проведем на примере нерегулярного отражения ударной волны от жесткой стенки (фиг. 1). Для этого рассмотрим изменение количества движения массы жидкости, находящейся в момент t в области $O'A'B'D$ за время dt в направлении оси, перпендикулярной стенке DO' . С точностью до малых величин более высокого порядка относительно M_0 оно равно выражению

$$\left[u_1 \alpha (\psi - \chi) + \int_{DB} w d\vartheta \right] a_0^2 \rho_0 t dt \quad (2.3)$$

Здесь α — угол между плоскостью падающей волны и перпендикуляром к стенке, w — составляющая вектора скорости, перпендикулярная стенке. Импульс сил давления, действующих на выделенную массу жидкости, равен

$$\int_{BDOA} (p - p_1) \cos \gamma dl dt \quad (2.4)$$

где γ — угол между касательной к контуру $BDOA$ и стенкой, dl — элемент дуги. Приравнивая величины (2.3) и (2.4), получим искомое интегральное соотношение. Оно автоматически удовлетворяется в том простейшем случае, когда параметры течения зависят только от времени и одной пространственной координаты. Остановимся на этом случае подробнее.

2°. Из второго уравнения (1.9) можно сразу получить общие интегралы для одномерных течений. Полагая $b = 1$, имеем для сферических волн

$$\delta = \mu \ln \frac{t}{t_0} + \frac{t_0}{t} \Phi \left(\mu \frac{t}{t_0} \right) \quad (2.5)$$

Для цилиндрических волн получим аналогично

$$\delta = 2\mu + \frac{t_0}{t} \Phi \left(\mu^2 \frac{t}{t_0} \right) \quad (2.6)$$

Здесь Φ — произвольные функции.

При помощи этих интегралов и уравнения, определяющего положение ударного фронта и полученного приравниванием правых частей выражений (2.1) и (2.2), можно найти законы движения фронта взрывной волны и изменения всех ее параметров на далеких расстояниях от места взрыва, если в момент $t = t_0$ известно начальное распределение в волне этих величин [10]. Сравнение эпюр давления, полученных при расчете на электронной счетной машине и с помощью уравнения (2.5), дано на фиг. 2, где введены следующие обозначения: $r^\circ = r P_0^{1/3} / \beta E_0^{1/3}$, E_0 — энергия взрыва, $\beta = 1,175$, Δr° — координата, отсчитываемая от ударного фронта к центру взрыва. Начальная эпюра получена также при расчете на электронной счетной машине¹. Сравнение произведено П. Ф. Коротковым [12].



Фиг. 2

3°. С помощью теории коротких волн в дальнейшем будет исследовано отражение слабой ударной волны от твердой стенки, когда угол падения, т. е. угол между плоскостью волны и перпендикуляром к стенке, мал. В рамках этой теории будет изучено также отражение ударной волны в воде от свободной поверхности, происходящее в аналогичных условиях.

Обе задачи решают приближенно следующим путем. Ищут частные решения дифференциальных уравнений коротких волн, которые удовлетворяют всем граничным условиям, кроме условий на ударных фронтах. Эти решения зависят от некоторого числа постоянных. Затем с помощью дифференциального уравнения, полученного приравниванием выражений (2.1) и (2.2), определяют положения фронтов ударных волн, причем постоянные, входящие в решения, подбирают так, чтобы приближенно удовлетворить условию равенства касательных составляющих скорости по обе стороны ударных фронтов. При этом получается известная неопределенность в условиях на границе, отделяющей область, занятую короткой волной, от остального течения. Ее положение до некоторой степени остается произвольным. В качестве основного условия на указанной границе мы будем требовать, чтобы градиенты давления, плотности и скорости частиц были на ней малы. Деформация этой границы и изменение условий на ней слабо влияют на распределение скорости в области больших градиентов. Такая постановка задачи аналогична тому, что имеет место в теории пограничного слоя вязкой жидкости при определении граничных условий на внешней границе слоя.

§ 3. Отражение ударной волны от жесткой стенки. 1°. Рассмотрим отражение плоской ударной волны от жесткой стенки. При больших углах падения имеет место регулярное отражение и картина отражения близка к той, которая следует из акустической теории: угол отражения β примерно равен углу падения α , а избыточное давление в отраженной волне постоянно в некоторой области вблизи стенки и близко к удвоенному давлению в падающей волне.

¹ Эти расчеты выполнены под руководством Д. Е. Охоцимского в ОПМ МИАН СССР. Они уточняют прежние результаты, полученные в работе [11], и до сих пор не опубликованы.

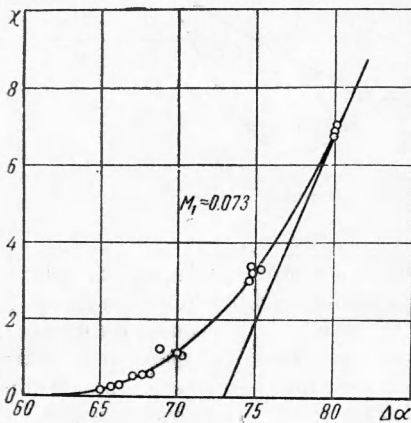
Регулярное отражение имеет место до тех пор, пока угол падения не станет меньше критического угла α_* . В первом приближении

$$\alpha_* = 2 \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \quad \left(M_1 = \frac{P_1}{n P_0} \right) \quad (3.1)$$

где M_1 — число Маха в падающей волне. Более точно критический угол определяется из соотношения

$$\alpha_* = 2 \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \quad \left(1 - \frac{4n+13}{6} M_1 \right) \quad (3.2)$$

При приближении угла падения к критическому картина отражения существенно изменяется. Область постоянного давления за фронтом отраженной волны уменьшается. За ней следует область, где параметры потока изменяются резко. Течение в ней может быть определено с помощью теории коротких волн [7]. Интерферограмма подобного режима регулярного отражения приведена в работе [6].



Фиг. 3

При дальнейшем уменьшении угла α размеры области постоянного давления за отраженным ударным фронтом продолжают сокращаться. При $\alpha = \alpha_s \approx 1.03 \alpha_*$ фронт звуковой волны, который служит границей области постоянного давления, догоняет фронт падающей ударной волны. Избыточное давление за отраженным фронтом при этом значении угла α равно $2.65 p_1$.

При дальнейшем уменьшении угла α размеры области постоянного давления за отраженным ударным фронтом продолжают сокращаться. При $\alpha = \alpha_s \approx 1.03 \alpha_*$ фронт звуковой волны, который служит границей области постоянного давления, догоняет фронт падающей ударной волны. Избыточное давление за отраженным фронтом при этом значении угла α равно $2.65 p_1$.

При $\alpha_s \geq \alpha \geq \alpha_*$ за фронтом отраженной волны нет области постоянного давления, но угол наклона касательной к фронту отраженной волны и давление у стенки за ее фронтом определяются по-прежнему теорией регулярного отражения. При приближении угла падения к критическому избыточное давление в отраженной волне стремится к $3p_1$, а угол β к $1/2 \alpha_*$. Распределение давления у стенки при $\alpha = \alpha_*$ получено в работе [7].

2°. При $\alpha < \alpha_*$ регулярное отражение невозможно. Возникает нерегулярное (маховское) отражение, схема которого приведена на фиг. 1. Опыты показывают [13], что для слабых ударных волн в значительном диапазоне изменения угла α (примерно при $0.6 \alpha_* < \alpha < \alpha_*$) угол χ между траекторией тройной точки A и стенкой является очень малым (фиг. 3, где $\Delta\alpha = 90^\circ - \alpha$). Поэтому исследование течения в области, прилегающей к маховскому и отраженному ударным фронтам, может быть проведено на основе уравнений очень коротких волн.

Координата точки пересечения фронта волны Маха со стенкой определяется в этом случае равенством $X = 0.5$. Положим

$$X = 0.5 + \varepsilon(\xi - \xi_0), \quad Y = \varepsilon\eta \quad (3.3)$$

Из уравнений (1.7) получим

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial \mu}{\partial \eta}, \quad (\mu - 0.5) \frac{\partial \mu}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (3.4)$$

Решение этой системы уравнений, определяющее течение в малой области за фронтом волны Маха, дано в работе [7]. При его построении остаются непонятными условиями на линии $\mu = 0.5$, от-

деляющей приближенно область очень короткой волны от области, в которой справедливы уравнения коротких волн. На этой линии, вообще говоря, должно быть выполнено только условие малости градиентов давления, плотности и скорости частиц.

Величина ε , определяющая размер области очень резких градиентов параметров потока, определяется по значению угла

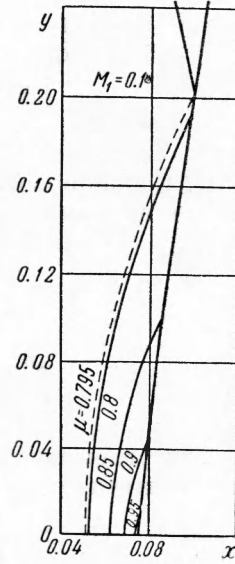
$$\chi = 0.5\varepsilon \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \quad (3.5)$$

Таким образом, в большом диапазоне изменений угла α эпюра давления вдоль стенки имеет резкий пик вблизи основания волны Маха. Протяженность этого пика определяется величиной ε и, следовательно, углом χ . При приближении угла падения к критическому протяженность этого пика стремится к нулю.

3°. При углах α , меньших примерно $0.3\alpha_*$, отраженную волну можно считать звуковой. Интерферограмма подобного течения приведена в работе [6].

Определяя точку пересечения звуковой волны с падающим ударным фронтом, получим

$$\chi + \alpha = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \quad (3.6)$$



Фиг. 4

Вблизи фронта волны Маха давление резко меняется, поэтому в этой области справедливы уравнения коротких волн. При практическом определении течения вблизи волны Маха можно воспользоваться частным решением этих уравнений [7]

$$v = \varphi(\mu) Y, \quad \delta = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\mu} Y^2 + F(\mu) \quad (3.7)$$

где

$$\varphi = -\frac{1}{c} \operatorname{cthc}(a - \mu) - \mu, \quad F = \mu - \frac{1 + e^{-2c(a-\mu)}}{2c} - \frac{\lambda}{2c} [1 + \operatorname{ch} 2c(a - \mu)] \quad (3.8)$$

Если положить $a = 1$, то условие непрерывности касательной составляющей скорости вдоль волны Маха приближенно выполняется. Далее, если принять за M_0 число Маха в основании волны Маха у стенки, то при $\mu = 1$ должно быть $F = 0.5$. Отсюда

$$c = 2(k + 1)$$

Линия $\mu = \mu_1$ должна проходить через тройную точку и при этом должно выполняться соотношение (3.6). Положение линии $\mu = \mu_1$ получается при этом произвольным. Основным условием на ней является малость градиентов давления. Оно выполняется при значениях c , больших 2. В этом случае положение линии $\mu = \mu_1$ будет мало влиять на распределение давления вблизи волны Маха, где градиенты давления велики.

На фиг. 4 изображены в координатах

$$x^\circ = \frac{x - a_0 t}{a_0 t}, \quad y^\circ = \frac{y}{a_0 t}$$

линии равных давлений, вычисленные при $n = 1.4$, $M_1 = 0.1$ и $c = 4$.

В таблице 1 даны результаты вычислений избыточного давления в основании волны Маха для различных углов падения.

Таблица 1

α	1,8	2	2,5	3	4	7	10
$\frac{1}{\rho_1} = \frac{p_0}{p_1}$	1.42	1.37	1.31	1.26	1.20	1.11	1.08
$2 \frac{\alpha}{\alpha_*}$	0.548	0.525	0.458	0.414	0.335	0.248	0.174

4°. Сопоставляя скорости движения тройной точки и основания волны Маха в направлении стенки, получим

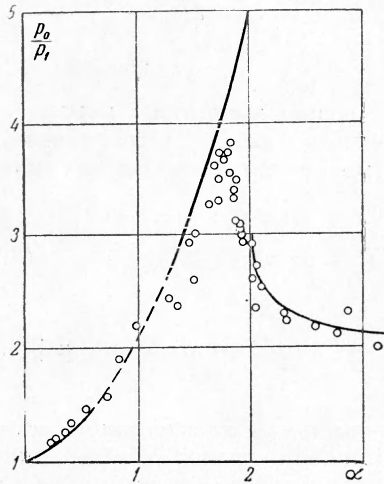
$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1 + \alpha^2 + 2\alpha\chi^\circ}{1 + 2(X_A - X_O)} \quad (3.9)$$

где

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha}{\sqrt{1/2(n+1)M_1}}, \quad \chi^\circ = \frac{\chi}{\sqrt{1/2(m+1)M_1}} \quad (3.10)$$

Для углов падения примерно в диапазоне $0.6\alpha_* < \alpha < \alpha_*$, когда можно пользоваться теорией очень коротких волн, угол χ и величина $X_A - X_O$ весьма малы. Формула (3.9) будет, следовательно, иметь вид

$$\frac{p_0}{p_1} = 1 + 4\left(\frac{\alpha}{\alpha_*}\right)^2 \quad (3.11)$$



Фиг. 5

На фиг. 5 дана кривая, показывающая изменение максимального относительного избыточного давления у стенки с изменением угла падения. Она получена следующим образом. При углах падения, больших критического, вычисления производились по теории регулярного отражения; при углах падения, меньших критического — по формуле (3.11) и на основании табл. 1. На фиг. 5 даны также экспериментальные точки по данным Д. Р. Уайта [14], которые были обработаны П. Ф. Коротковым.

Ввиду крайне малых размеров областей с резким увеличением избыточного давления при околкритических углах падения измерения должны производиться или очень малыми датчиками, или на волнах, имеющих большую протяженность. Отметим, что пятикратное увеличение избыточного давления, когда угол падения равен критическому, теоретически соответствует пику давления нулевой протяженности. Нам представляется, однако, что по мере улучшения методики эксперимента данные измерений максимальных избыточных давлений будут все ближе соответствовать теоретической кривой.

§ 4. Отражение ударной волны в воде от свободной поверхности. 1°. При отражении ударной волны в воде от свободной поверхности вблизи ударного фронта у поверхности жидкости возникает область с большими градиентами давления. Приближенное решение этой задачи было дано в работе [15]. Рассмотрим вкратце общую картину явления.

Скорость распространения ударного фронта вдоль свободной поверхности волны равна

$$\frac{N}{\cos \alpha} \approx a_0 \left(1 + \frac{n+1}{4} M_1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (4.1)$$

Если скорость звуковой волны, распространяющейся за фронтом ударной волны

$$a + u = a_0 \left(1 + \frac{n+1}{2} M_1 \right) \quad (4.2)$$

меньше скорости распространения ударного фронта вдоль поверхности, возмущения, идущие от свободной поверхности, не догоняют фронта ударной волны и имеет место регулярное отражение. Равенство этих скоростей определяет критический угол

$$\alpha_* = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_1} \quad (4.3)$$

При углах падения, меньших критического, имеет место нерегулярное отражение (фиг. 6). Фронт ударной волны при этом искривлен, и давление вдоль него изменяется с глубиной. Угол наклона ударной волны к свободной поверхности α' и число Маха M' на фронте ударной волны у свободной поверхности в точке A связаны соотношением

$$\alpha' = \sqrt{\frac{n+1}{2} M'}$$

Когда ударная волна плоская, область резких изменений давления определяется пересечением фронтов ударной волны и звуковой волны, распространяющейся из начальной точки. При этом $Y_B = \alpha_* - \alpha$.

При приближенном решении задачи в работе [15] принималось, что возмущенное течение за фронтом ударной волны есть звуковая волна $\delta = \mu$. Действительно, для сферических волн при $M_0 \ll \delta_0$ из системы (1.4) следует

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} - \delta \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \mu = 0$$

Отсюда имеем

$$\delta = \frac{t_0}{t} \Phi \left(\mu \frac{t}{t_0} \right) \quad (4.4)$$

где Φ — произвольная функция. Если считать, что на дальних расстояниях течение за фронтом волны не должно зависеть от времени, получим $\delta = \mu$. В области сверхзвукового потока в этом случае всем граничным условиям удовлетворяет решение, полученное в [15]. Недавно О.А. Березинным и А. А. Грибом получено решение уравнений коротких волн для плоского течения, свободное от указанного выше дополнительного ограничения. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} q^2 \right) Y^2 + c_1 \left(\frac{5}{2} q - \frac{1}{4} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} + c_2 \\ \nu &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} q - \frac{1}{3} q^3 \right) Y^2 - 5c_1 \left(q - \frac{1}{2} \right) \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} q Y - \mu Y + \nu_0 \\ \delta &= \left(\frac{1}{2} - q \right) Y^2 + c_1 \left(q - \frac{1}{6} \right)^{-5/3} + c_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

где q — параметр, а координата Y отсчитывается от свободной поверхности. Если положить

$$c_1 = \frac{1}{9} \sqrt{3} \frac{(\alpha_*^2 - \alpha'^2)}{\alpha_*^2}, \quad c_2 = \left(\frac{\alpha'}{\alpha_*} \right)^2, \quad \nu_0 = \frac{\alpha}{\alpha_*}$$

то все граничные условия задачи удовлетворяются как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области. Условие непрерывности касательной

составляющей скорости при переходе через фронт ударной волны удовлетворяется приближенно с достаточной точностью.

При больших значениях Y градиенты давления становятся малыми, поэтому условие на границе области короткой волны также удовлетворяется.

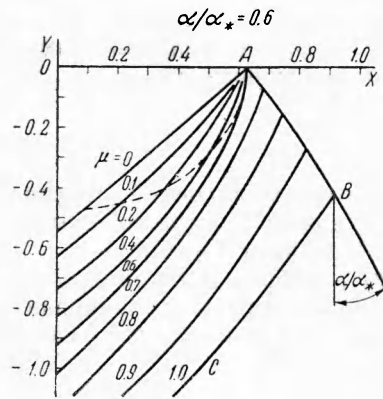
На фиг. 6 показаны линии равных давлений, вычисленные по формулам (4.5).

На фиг. 7 пунктирной кривой показано изменение величины давления на ударном фронте у свободной поверхности в зависимости от угла падения, определенное по этим же формулам, а сплошной кривой, вычисленное по равенству

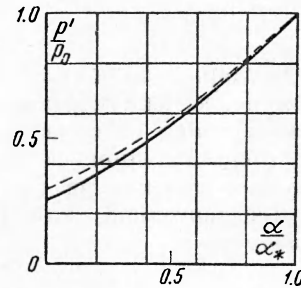
$$p' = \frac{p_1}{4} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_*}\right)^2 \quad (4.6)$$

полученному в работе [15].

2°. При взрыве сферического заряда вблизи свободной поверхности можно считать, что на больших расстояниях от места взрыва картина течения вблизи свободной поверхности не должна существенно зависеть от начальных условий взрыва. Поэтому в переменных δ° , Y° , μ° и ν° , вво-



Фиг. 6



Фиг. 7

димых преобразованием (1.8), она должна быть стационарной. При сферическом взрыве давление в волне падает обратно пропорционально расстоянию, так что в формулах (1.8) следует принять $b = 1$. Отсюда вытекает, что размеры области течения в направлении радиуса-вектора остаются примерно постоянными, а размер границы, отделяющей область резких градиентов давления от остального течения, растет пропорционально корню квадратному из расстояния.

Если положить в дозвуковой области $\delta = \mu$, то можно считать, что вблизи свободной поверхности течение будет тем же, что и в плоском случае, и использовать соотношения, приведенные в [15].

На фиг. 8 сплошной кривой показана эпюра давления от взрыва сферического заряда тротила радиуса $r_3 = 25$ см на глубине $2 r_3$, снятая на расстоянии $120 r_3$, причем глубина погружения датчика была также $2 r_3$. Через Δr° на фиг. 8 обозначена координата, отсчитываемая от ударного фронта к центру взрыва и отнесенная к радиусу заряда. Там же пунктиром нанесена эпюра давления, вычисленная указанным выше способом.

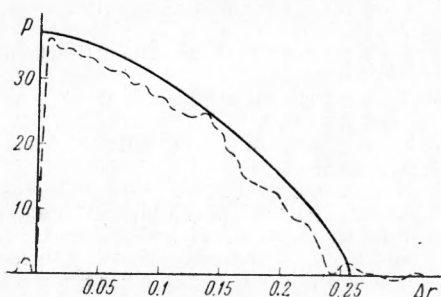
3°. Недавно Б. А. Луговцовым получено решение задачи о взрыве заряда в мелководном бассейне с абсолютно жестким дном. На больших

¹ Эксперимент был проведен Б. Д. Христофоровым.

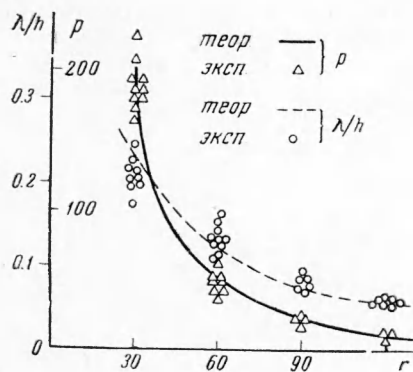
расстояниях от взрыва картина течения не должна зависеть от начальных условий и целиком определяется влиянием свободной поверхности и дна, так что можно снова воспользоваться преобразованием (1.8). Глубина бассейна h постоянна, следовательно, значения Y° должны изменяться обратно пропорционально расстоянию и $b = 2$.

Отсюда следует, что давление на фронте ударной волны должно падать обратно пропорционально квадрату расстояния, а размер волны в направлении радиуса-вектора — обратно пропорционально расстоянию. Эти соотношения справедливы как для взрыва сферического заряда, так и шнурового.

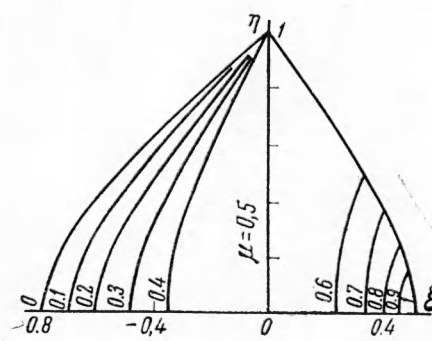
На фиг. 9 показаны данные, полученные Б. Д. Христофоровым при взрывах сферических зарядов в бассейне с дном, насыщенным пузырьками воздуха. В этом случае дно играет ту же роль, что и свободная поверхность, и эпюра давления симметрична относительно дна и свободной поверхности. Плоскость симметрии может быть принята за абсолютно жесткую стенку. На фиг. 9 показаны также соответствующие кривые, вычисленные по теории очень коротких волн.



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

На фиг. 10 показаны линии равных давлений, полученные на основании этой же теории. Величина ϵ в формулах (3.3) определяется глубиной бассейна, а начальный размер волны должен быть определен экспериментально.

Необходимо отметить, что соотношение между давлением на фронте ударной волны и размерами области возмущенного движения в направлении радиуса-вектора таковы, что лишь в первом приближении можно пользоваться теорией очень коротких волн, при которой исчезает различие между цилиндрическим и плоским взрывами.

В заключение считаем своим долгом выразить искреннюю благодарность Б. Д. Христофорову за предоставление экспериментальных данных. Мы признательны также О. А. Березину, П. Ф. Короткову и Б. А. Луговцову за помощь, оказанную при написании настоящего доклада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proc. Roy. Soc., A, 1949, vol. 198, № 1055.
2. Lighthill M. J. The diffraction of blast. II. Proc. Roy. Soc., A, 1950, vol. 200, № 1063.
3. Ting L., Ludloff H. F. Aerodynamics of blasts. Journ. Aer. Sci., 1951, vol. 18, № 2.
4. Ting L., Ludloff H. F. Aerodynamics of blasts. Journ. Aer. Sci., 1952, vol. 19, № 5.
5. Лудлофф Г. Ф. Аэродинамика взрывных волн. Проблемы механики. Сборник статей под редакцией Р. Мизеса и Т. Кормана. ИЛ, 1955.
6. Fletcher C. H., Taub A. H., Bleakney W. The Mach reflection of shock waves at nearly glancing incidence. Rev. Modern Phys., 1951, vol. 23, № 3.
7. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 5.
8. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалья. ПММ, 1946, т. X, вып. 4.
9. Karman Th. The similarity law of transonic flow. Journ. Math. Phys., 1947, vol. XXVI, № 3.
10. Христианович С. А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
11. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодействия. Труды МИАН СССР, 1957.
12. Коротков П. Ф. Об ударных волнах на значительном расстоянии от места взрыва. Известия АН СССР, ОТН, 1958, № 3.
13. Bleakney W., Taub A. H. Interaction of shock waves. Rev. Modern phys., 1944, vol. 21, № 4.
14. White D. R. An experimental survey of the Mach reflection of shock waves. Proc. Second Midwestern Conference Fluid Mechan., 1952.
15. Грив А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.