О МЕТОДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ В УСЛОВИЯХ УПРУГОСТИ И УСИЛИЕ РАЗРУШЕНИЯ

В. Д. Клюшников (Москва)

В заметке показывается, что метод суперпозиции, аналогичный методу Батдорфа — Будянского в теории скольжения [1], при естественных предположениях о связи напряжений и деформаций в системе из плоскости и направления позволяет получить обычные соотношения упругости. Этот результат, подтверждающий законность аппарата теории скольжения, представляет интерес еще и потому, что указывает, по-видимому, на новый аспект в вопросе о взаимосвязи теоретического и наблюдаемого усилия хрупкого разрушения.

Пусть в осях x, y, z задана деформация ε_{ij}. Тогда на площадке с нормалью n будет иметь место нормальная деформация

$$\varepsilon_{nn} = l_{in} l_{jn} \varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

и в направлении m на этой площадке — сдвиговая деформация

$$\varepsilon_{nm} = l_{in} l_{jm} \varepsilon_{ij} \qquad (2)$$

Здесь l_{in}, l_{im} — направляющие косинусы в осях x, y, z нормали n и направления m соответственно. В результате этого на площадке с нормалью n возникает нормальное напряжение σ_{nn} и в направлении m на этой площадке — касательное σ_{nm}. Напряжения σ_{nn} и σ_{nm} создадут в осях x, y, z напряжения

$$\sigma_{ij}^{\circ} = \sigma_{nn} l_{in} l_{jn} + \sigma_{nm} (l_{in} l_{jm} + l_{im} l_{jn}) \qquad (3)$$

Считая, что полное напряжение σ_{ij} в осях x, y, z есть среднее из таких единичных напряжений по всем возможным площадкам и направлениям в них (это положение совпадает с тем, что имеет место в теории скольжения с точностью до замены напряжений на деформации), получим

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{Q_1} \int\limits_{Q_1} \sigma_{nn} l_{in} l_{jn} dQ_1 + \frac{1}{Q_2} \int\limits_{Q_2} \sigma_{nm} (l_{in} l_{im} + l_{jm} l_{jn}) \, dQ_2 \qquad (4)$$

$$dQ_1 = d\Omega, \quad dQ_2 = d\Omega d\beta \qquad (5$$

Здесь Ω — телесный угол, β — угол, составленный направлением m на площадке с нормалью n и некоторым фиксированным направлением.

Направляющие косинусы l_{in} и l_{im} нетрудно выразить через долготу α и широту φ на единичной сфере и угол β так же, как это сделано в теории скольжения [1]

$$\begin{aligned} &l_{xn} = \sin\alpha \cos\varphi, \quad && l_{xm} = \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta \sin\varphi \\ &l_{yn} = \cos\alpha \cos\varphi, \quad && l_{ym} = -\sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \,\mathrm{con}\, \beta \sin\varphi \\ &l_{zn} = \sin\varphi, && l_{zm} = \cos\beta \cos\varphi \end{aligned} \qquad (6)$$

при этом

$$d\Omega = \cos\varphi d\varphi d\alpha \qquad (7)$$

Исследуя законности такого аппарата для получения связи между напряжениями и деформациями в случае упругости, естественно принять, что в системе из плоскости и направления напряжения и деформации связаны соотношениями

$$\sigma_{nn} = a\varepsilon_{nn}, \qquad \sigma_{nm} = b\varepsilon_{nm} \qquad (a, b = \mathrm{const}) \qquad (8)$$

В противоположность случаю пластических деформаций в рассматриваемом случае интегрирование нужно проводить по всем плоскостям и по всем направлениям в них, т. е. в пределах

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \qquad -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, \qquad -\pi/2 \leqslant \beta \leqslant \pi/2 \qquad (9)$$

при этом

$$Q_1 = \frac{1}{4\pi}, \qquad Q_2 = \frac{1}{4\pi^2} \qquad (10)$$

На основании этого и соотношения (8) формула (4) примет вид

$$\sigma_{ij} = \frac{a}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \, [\varepsilon_{nn} l_{in} l_{jn}] + \frac{b}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta \, [\varepsilon_{nm} (l_{in} l_{jm} + l_{im} l_{jn})] \qquad (11)$$

При учете формул (6) после интегрирования получим

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (12)$$

т. е. обычный обобщенный закон Гука, где

$$\lambda = \frac{a+b}{15}, \quad \mu = \frac{2a+3b}{30} \tag{13}$$

На основании известных формул связи коэффициентов Ламе с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν получим

$$E = \frac{a}{3}\left[\frac{2a+3b}{4a+b}\right], \quad \nu = \frac{a-b}{4a+b} \tag{14}$$

Отсюда вытекает

$$a = \frac{3E}{1-2\nu} = 3K \tag{15}$$

Здесь K — модуль объемного сжатия.

Пусть в опыте на одноосновное растяжение замерено предельное сопротивление разрушению $\sigma = \sigma_H$, а теоретическое усилие, подсчитанное по условиям отрыва атомных плоскостей, равно σ_T. Максимальные отрывающие усилия испытывают атомные плоскости, перпендикулярные к направлению растяжения. В силу соотношений (6)

$$\sigma_{nn} = \sigma_T = a\varepsilon_{nn} = a\varepsilon \tag{16}$$

где ε — осевая деформация. С другой стороны, $\varepsilon = \sigma_0/E$; но тогда на основании формулы (16) имеем

$$\sigma_H = 3(1-2\nu)\,\sigma_T \tag{17}$$

Из этого следует, что при приближении v к 1/2 (несжимаемое тело) наблюдаемое усилие разрушения может быть много меньше теоретического. Хотя это и нельзя считать (в силу несимметрии примененного метода относительно напряжений и деформаций) новым объяснением резкого различия между теоретическим и наблюдаемым усилиями разрушения, однако надо более критично подходить к существующим расчетам теоретического усилия в отношении учета не совпадающих с направлением отрыва взаимодействий.

Поступила
18 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Batdorf S. B. and Budiansky B. A Mathematical Theory of Pfasticity Based on the Concept of Slip. NACA Technical Notes, No. 1871, April, 1949.

ОБ ОБЩИХ СООТНОШЕНИЯХ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Л. В. Ершов, В. Н. Телиянц
(Москва)

Применение метода малого параметра для плоской задачи по теории малых упруго-пластических деформаций [1] рассмотрено в работе [2]. Ниже этим методом изучается осесимметричная задача.

Воспользуемся цилиндрическими безразмерными координатами ρ, θ, ξ.

Приведем основные обозначения: δ — безразмерный малый параметр; σ_ρ, σ_θ, σ_ξ, $\tau_{\rho\xi}$ — компоненты напряжений; e_ρ, e_θ, e_ξ, $e_{\rho\xi}$ — компоненты деформаций; u, w — перемещения в направлении радиуса ρ и оси ξ соответственно; σ_i — интенсивность напряжений; e_i — интенсивность деформаций. Зависимость между σ_i и e_i принимается в виде $\sigma_i = Ae_i^m$.

В качестве нулевого приближения берется решение упруго-пластической осесимметричной задачи при плоском деформированном состоянии, материал предполагается несжимаемым.

Если a и b — радиусы цилиндрической трубы и p — внутреннее давление, то

$$\sigma_\rho^\circ = -p\frac{\alpha^{2m}(1-\rho^{2m})}{\rho^{2m}(1-\alpha^{2m})}, \qquad \sigma_\theta^\circ = p\frac{\alpha^{2m}[(2m-1)+\rho^{2m}]}{\rho^{2m}(1-\alpha^{2m})} \tag{1}$$

$$\sigma_\xi^\circ = \frac{1}{2}(\sigma_\rho^\circ + \sigma_\theta^\circ), \qquad \tau_{\rho\xi}^\circ = 0, \qquad u^\circ = -\frac{c}{\rho}, \qquad w^\circ = 0$$