

3. Классен Л. Г. О схлопывании полости в идеальной несжимаемой жидкости силами поверхностного натяжения.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 14. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
4. Андреев В. К. Малые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей с учетом капиллярных сил.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
5. Андреев В. К., Пухначев В. В. О движении конечной массы жидкости.— ПМТФ, 1979, № 2.
6. Андреев В. К. Корректность задачи о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 13. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
7. Binnie A. M. The stability of the surface of a cavitation bubble.— Proc. Camb. Phil. Soc., 1953, vol. 49.
8. Меньщиков В. М. О малых возмущениях неустановившихся одномерных движений идеальной несжимаемой жидкости с осевой симметрией.— ПМТФ, 1979, № 2.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М., Наука, 1973.

УДК 532.517.4

РАЗВИТИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Ю. М. Давыдов, М. С. Пантелеев
(Москва)

Исследование рэлей-тейлоровской неустойчивости (РТН) является весьма актуальной задачей. Помимо несомненного теоретического интереса, оно имеет большое значение для ряда важных практических проблем, например для изучения устойчивости сжатия оболочек в задачах лазерного термоядерного синтеза, при получении сверхсильных магнитных полей и др.

В развитии РТН прослеживаются следующие ярко выраженные стадии: линейная, промежуточная, регулярная асимптотическая и турбулентная [1, 2]. Линейная стадия характеризуется малостью амплитуды a по сравнению с длиной волны возмущения L и экспоненциальной скоростью роста. Когда величина амплитуды возмущения a достигает $0,4 L$, процесс вступает в стадию, промежуточную между линейной и регулярной асимптотической. На регулярной асимптотической стадии, наступающей при $a \approx 0,75 L$, окончательно формируются «шпики» тяжелой жидкости, проваливающиеся с постоянным ускорением, и «пузыри» легкой жидкости, всплывающие с постоянной скоростью. Эта стадия РТН является неустойчивой [1, 2] и сменяется турбулентной стадией, в ходе которой происходит интенсивное взаимодействие возмущений различных длин волн и перемешивание жидкости.

РТН наиболее исследована для случая плоской поверхности раздела и стремящегося к бесконечности отношения плотностей тяжелой и легкой жидкостей. Линейная стадия подробно изучена в классических работах [3—5], регулярная асимптотическая — в [6—8], в [9] развита феноменологическая теория турбулентной стадии, а в [2] высказаны некоторые соображения о механизме ее образования.

Однако аналитического математического аппарата для анализа в целом столь сложного явления, как РТН, недостаточно, экспериментальные исследования весьма трудоемки. Наиболее полная информация может быть получена из численных расчетов; так, случай свободной поверхности изучался в [10], случай двух несжимаемых жидкостей — в [11], двух сжимаемых сред — в [12]. Отметим также [13], где проводится численный расчет РТН сжимаемой оболочки.

До сих пор во всех как аналитических, так и вычислительных работах исследовался только двумерный случай. Однако двумерная модель неадекватна физике явления: в физическом эксперименте двумерные структуры разрушаются из-за поперечной коротковолновой неустойчивости и превращаются в трехмерные.

Численные методы, примененные в [10, 11], в принципе могут быть распространены на трехмерный случай. Однако это приведет к столь значительному увеличению времени счета и возрастанию объема необходимой машинной памяти, что подобные расчеты на современных ЭВМ не реализованы.

В данной работе численный эксперимент по исследованию трехмерной РТН проводится с помощью метода крупных частиц (см., например, [14]), хорошо зарекомендовавшего себя при решении широкого класса сложных задач газодинамики (см., например, [14, 15]). Развитие двумерной РТН вплоть до больших амплитуд, когда процесс носит существенно нелинейный характер, впервые изучалось данным методом в [12].

Методом крупных частиц решается полная пространственно-трехмерная нестационарная система вихревых уравнений Эйлера у учетом гравитационного поля

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{W}) &= 0, \\ \partial \rho u / \partial t + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{W}) + \partial p / \partial x &= 0, \\ \partial \rho v / \partial t + \operatorname{div}(\rho v \mathbf{W}) + \partial p / \partial y + \rho g &= 0, \\ \partial \rho w / \partial t + \operatorname{div}(\rho w \mathbf{W}) + \partial p / \partial z &= 0, \\ \partial \rho E / \partial t + \operatorname{div}(\rho E \mathbf{W}) + \operatorname{div}(p \mathbf{W}) + \rho g v &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{W} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости; ρ — плотность среды; $E = e + \mathbf{W}^2/2$ — удельная полная энергия; e — удельная внутренняя энергия; p — давление; ускорение свободного падения g направлено по оси y .

Программно данный численный эксперимент был выполнен в рамках пакета прикладных программ КРУЧА (крупные частицы) [16], в который были добавлены модули, отражающие специфику задачи (гравитацию, начальные данные). Отметим, что, хотя в качестве уравнения замыкания системы (1) используется уравнение состояния идеального газа $e = p/(\kappa - 1)\rho$ (κ — показатель адиабаты), сжимаемость мало влияет на характер процесса (значение числа Маха в расчетной области нигде не превышает 0,3).

Расчет производится сквозным образом без выделения контактной поверхности раздела тяжелой и легкой жидкостей. Двумерные расчеты показали, что, несмотря на «размазывание» контактной поверхности раздела (7—8 ячеек в районе «пики» и 4—5 ячеек в районе «пузыря»), ее с достаточной точностью можно отождествить с поверхностью, на которой $\rho = 0,5(\rho_1 + \rho_2)$, ρ_2 — плотность тяжелой жидкости, ρ_1 — легкой (ближние результаты дает определение этой поверхности разрыва другими эвристическими способами: по $\max \operatorname{grad} \rho$ и т. д.). Для сравнения с данными других авторов по трехмерной программе были рассчитаны двумерные тестовые задачи. Начальные данные и параметры тестов были идентичны используемым в [11], за исключением того, что рассматривалась среда с уравнением состояния идеального газа. Из-за малости числа Маха в расчетной области сжимаемость здесь проявляется слабо, поэтому возможно сравнение с расчетами течений несжимаемой жидкости. Ниже приводятся некоторые из полученных результатов. Размеры расчетной области составляли 20 ячеек по горизонтали (ось x) и 60 по вертикали (ось y). На всех границах области ставились условия симметрии, так что потоки массы, импульса и энергии на границах области обращались в нуль. Так как на верхней и нижней границах $v=0$, то из уравнения для вертикальной компоненты импульса имеем $\partial p / \partial y + \rho g = 0$. Это краевое условие ставилось на верхней и нижней границах для исключения возможности генерации на них возмущений. В момент времени $t = 0$ задавались начальные данные: в верхнем полупространстве тяжелая жидкость с плотностью ρ_2 , в нижнем — легкая с плотностью $\rho_1 = 0,1$. На границе сред

$e_2/(\kappa - 1) = 10$, $e_1/(\kappa - 1) = 100$, в обеих средах $\partial e/\partial y = -g$. Таким образом, в начальный момент $\partial p/\partial y + \rho g = 0$, и развитие неустойчивости идет из положения равновесия. Начальное возмущение задавалось в виде поля скоростей:

$$u = A \sin \frac{\pi x}{L} [2H(y) - 1] \exp\left(\frac{-\pi |y|}{L}\right),$$

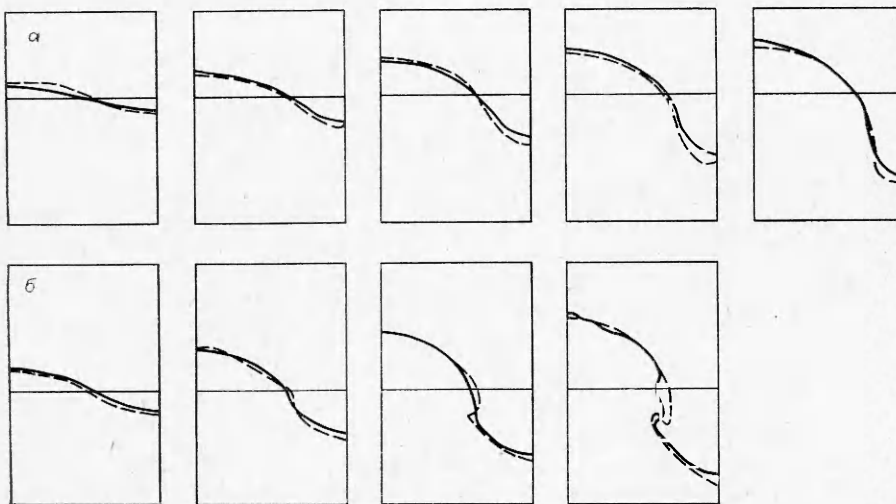
$$v = A \cos \frac{\pi x}{L} \exp\left(\frac{-\pi |y|}{L}\right),$$

где $H(y)$ — функция Хэвисайда

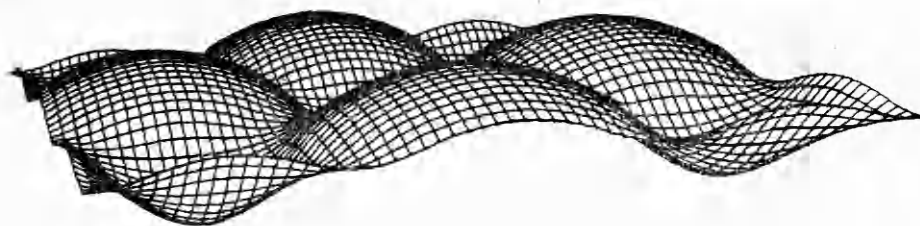
$$H(y) = \begin{cases} 1 & y > 0, \\ 0 & y < 0, \end{cases}$$

L — поперечный размер области. В обезразмеренных единицах $L = 2$, $g = 1$, $A = 0,78$, $\delta x = \delta y = 0,1$. Здесь δx и δy — размеры ячейки расчетного поля по осям x и y соответственно. Заметим, что при задании начального возмущения в расчетах со сжимаемыми средами важно соблюдать условие $\text{div } \mathbf{W} = 0$ везде, за исключением поверхности раздела. Иначе возникнут возмущения плотности, которые могут исказить картину развития РТН.

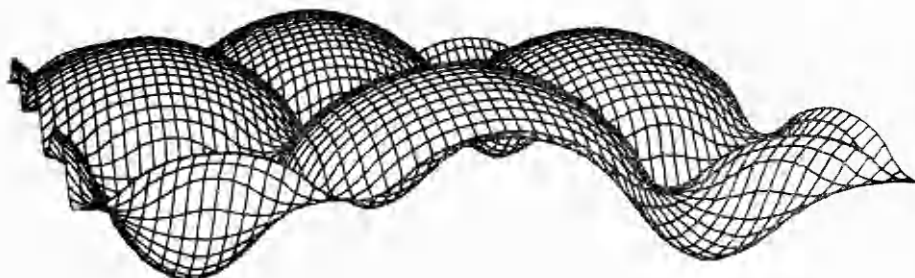
Двумерные расчеты методом крупных частиц показали хорошее совпадение с [11]. На фиг. 1, а приведены формы контактной поверхности при $\rho_2/\rho_1 = 10$ в различные моменты времени (0,25; 0,49; 0,73; 0,97; 1,21); сплошные линии соответствуют расчетам методом крупных частиц, штриховые — результатам работы [11]. График скорости движения «пика» также близок к приведенному в [11], среднее ускорение «пика», как и в [11], составило примерно половину ускорения силы тяжести. Отношение радиуса кривизны «пузыря» к длине волны возмущения $R/2L$ составило 0,40, что ближе к значению 0,39, приведенному в [10], и теоретическому значению 0,35 [6], чем 0,48 в [11]. Скорость подъема «пузыря» оказалась несколько большей, чем в [11]. Нами получено значение $u_B \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g R \right)^{-1/2} = 0,44$, в [11] — соответственно 0,32, теоретическое значение для этой величины $\approx 0,5$ [7].



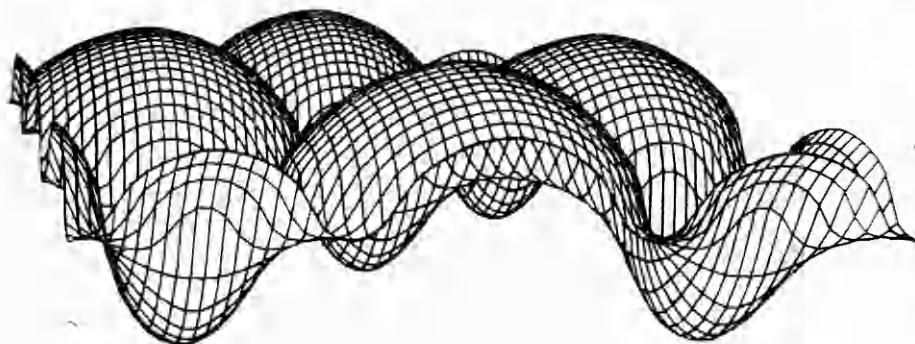
Ф и г. 1



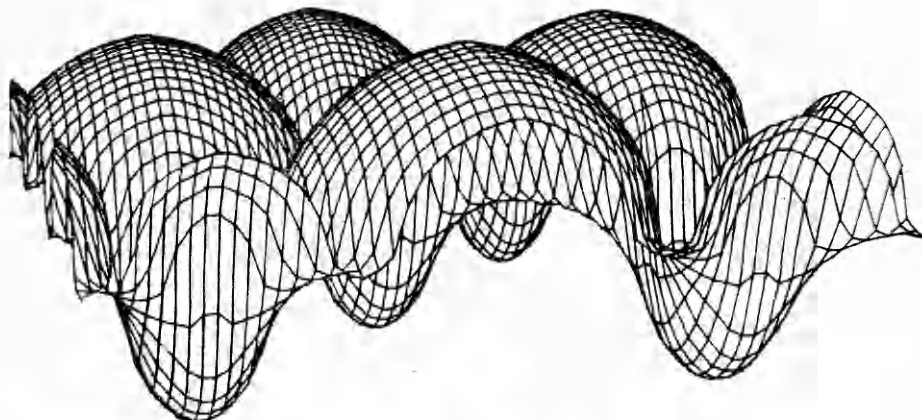
Ф и г. 2



Ф и г. 3

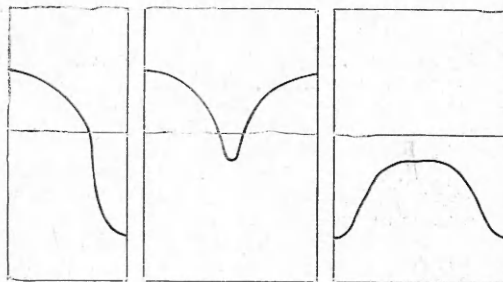


Ф и г. 4



Ф и г. 5

Заметим, что, несмотря на «размазывание» контактной поверхности, метод крупных частиц позволяет также проследить развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца при малых значениях ρ_2/ρ_1 . На фиг. 1, б приведены формы контактной поверхности при $\rho_2/\rho_1 = 2$ в моменты времени 0,45; 0,89; 1,34; 1,79.



Фиг. 6

Перейдем к рассмотрению результатов численного моделирования трехмерной РТН методом крупных частиц. Размеры расчетной области составляли 20; 60 и 20 ячеек по осям x , y и z соответственно. При этом сеточные параметры $\delta x = \delta y = \delta z$. В трехмерном случае возмущения поверхности раздела могут образовывать либо гексагональную, либо квадратную решетки [17]. В данной работе был выбран последний случай (не представляет затруднений промоделировать гексагональную решетку). Для его реализации начальное возмущение задавалось в виде

$$u = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi z}{L} [2H(y) - 1] \exp\left(\frac{-2\pi |y|}{L}\right),$$

$$v = A \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi z}{L} \exp\left(\frac{-2\pi |y|}{L}\right),$$

$$w = A \cos \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi z}{L} [2H(y) - 1] \exp\left(\frac{-2\pi |y|}{L}\right).$$

В остальном все начальные, граничные условия и параметры задачи были такими же, как и в двумерном случае.

На фиг. 2—5 приведены поверхности раздела в перспективной проекции, построенные в последовательные моменты времени $t = 0,6; 0,9; 1,2; 1,5$ соответственно. Отчетливо видно «всплытие» широких «пузырей» и «проваливание» достаточно узких «пиков».

Заметим, что «высоты» (размеры по осп y) «пузыря» и «пика» на фиг. 2—5 в действительности неодинаковы. Это объясняется тем, что точка поверхности раздела с координатами $x = z = \pi/2L$, $y = 0$, в которой первоначально $u = v = w = 0$, движется вниз с ускорением, примерно равным половине ускорения «пика». Более четкое представление о характере процесса дает фиг. 6, на которой изображены сечения контактной поверхности в плоскостях $x = 0$ ($z = 0$) и $x = z$, $x = -z$ в момент времени $t = 1,5$.

Отношение радиуса кривизны «пузыря» к длине волны возмущения $R/2L$ составляет 0,34 в сечениях $x = 0$ и $z = 0$ и 0,31 в сечении $x = z$. Теоретическое и экспериментальное значения этой величины, полученные при исследовании подъема воздушных пузырьков в вертикальных трубах, заполненных жидкостью, составляют 0,35 [18]. Безразмерная скорость подъема «пузыря» $u_B (2Lg)^{-1/2}$ равнялась $0,31 \pm 0,02$, в то время как согласно данным, приведенным в [18], для цилиндрических труб она составляет 0,32, а для труб прямоугольного сечения с отношением сторон прямоугольника 1 : 4 — 0,29. Ускорение «пика» было примерно на 20% больше, чем в двумерном случае, в то время как сам «пик» был несколько шире.

Авторы выражают благодарность С. И. Анисимову за ценные обсуждения.

Поступила 17 IX 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгофф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора.—В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. М., Мир, 1964.
2. Inogamon N. A. Turbulent phase of the Rayleigh—Taylor instability. Препринт Ин-та теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР. Черногловка, 1978.
3. Lord Rayleigh. Theory of sound. Vol. 2. N. Y., Dover Publications Inc., 1894. Рус. пер. Д. Стретт (Рэлей). Теория звука. Т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
4. Taylor G. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I.— Proc. Roy. Soc. London, 1950, vol. A 201, N 1065.
5. Lewis D. J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II.— Proc. Roy. Soc. London, 1950, vol. A 202, N 1068.
6. Birkhoff G. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA—1862, 1955.
7. Birkhoff G.— In: Proceedings XIII Applied Mathematics Symposium, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1960.
8. Garabedian P. R. On steady state bubbles generated by Taylor instability.— Proc. Roy. Soc. London, 1957, vol. A 241, N 1226.
9. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания.— Труды ФИАН, 1965, т. 29.
10. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical study of large amplitude free-surface motion.— Phys. Fluids, 1966, vol. 9, N 5.
11. Daly B. J. Numerical study of two fluid Rayleigh—Taylor instability.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 2.
12. Давыдов Ю. М. Численное исследование тейлоровской неустойчивости в нелинейном приближении.— Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 3.
13. Волкова Р. А., Головизнин В. М., Улинич Ф. Р., Фаворский А. П. Численное моделирование обжата магнитного поля кумулирующим лайнером. Препринт ИПМ АН СССР № 111, 1976.
14. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов.— ЖВММФ, 1971, т. 11, № 1.
15. Давыдов Ю. М. Численный эксперимент в газовой динамике.— В сб.: Вычислительная математика и математическая физика. Вып. 2, 1975.
16. Давыдова И. М., Давыдов Ю. М. Элементы организации больших программ. М., изд. МФТИ, 1977.
17. Иногамов Н. А. Модельный анализ тейлоровской неустойчивости оболочек.— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 7.
18. Биркгофф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., Мир, 1964.

УДК 532.593 : 539.3

**ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ
НА РАЗВИТИЕ ВОЛНОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОТОКА
ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ
С ВЕРТИКАЛЬНЫМ СДВИГОМ СКОРОСТИ**

А. Е. Букатов, В. И. Мордашев

(Севастополь)

Влияние упругой пластинки на волновое возмущение потока с постоянной глубиной скоростью изучалось без учета сжимающих усилий в работах [1, 2], а в случае продольного растяжения при отсутствии потока — в работе [3].

1. Пусть на поверхности потока однородной идеальной несжимаемой жидкости с вертикальным сдвигом скорости плывет тонкая упругая изотропная пластинка. В начальный момент времени поток не возмущен, а поверхность пластинки — жидкость горизонтальна. Начиная с момента $t = 0$, к поверхности пластинки прикладывается давление

$$(1.1) \quad p = p_0 f(x).$$