

ЛИТЕРАТУРА

1. О. И. Лейпунский. ЖФХ, 1960, 34, 1.
2. М. А. Гуревич, Г. Е. Озерова, А. М. Степанов. Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
3. П. Б. Вайнштейн, Р. И. Нигматулин. ПМТФ, 1971, 4.
4. R. H. Essenhigh, J. Csaba. 9-th Symposium (International) on Combustion, Academic: N. Y., 1963, p. 111.
5. О. М. Тодес, А. Д. Гольцикер и др. Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
6. D. Bhaduri, S. Bandyopadhyay. Combustion and Flame, 1971, 17, 1.
7. Э. Н. Руманов, Б. И. Хайкин. Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
8. Г. Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. М., ИЛ, 1961.
9. К. С. Шифрин. Рассеяние света в мутной среде. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
10. А. Г. Блох. Тепловое излучение в котельных установках. Л., «Энергия», 1967.
11. R. Ruedy. Canadian Journal of Research, 1941, A19, 10; 1942, A20, 3.
12. Э. М. Спэрроу, Р. Д. Сесс. Теплообмен излучением. Л., «Энергия», 1971.
13. А. С. Предводителев, Л. Н. Хитрин и др. Горение углерода. М., Изд-во АН СССР, 1949.
14. H. M. Cassel, I. Liebman, W. K. Mosk. 6-th Symposium (International) on Combustion, Reinhold: N. Y., 1956, p. 602.
15. W. F. Marshall, H. B. Palmer, D. J. Seery. J. Inst. of Fuel., 1964, 37, 342.
16. H. Hattory, 6-th Symposium (International) on Combustion, Reinhold: N. Y., 1956, p. 590.
17. B. Grosh, D. Basu, N. K. Roy. 6-th Symposium (International) on Combustion, Reinhold: N. Y., 1956, p. 595.
18. J. M. Beer, M. W. Thring, R. H. Essenhigh. Combustion and Flame, 1959, 3, 4.

УДК 536.46

О БЕГУЩИХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАМЕНИ, РАССМАТРИВАЕМОЙ КАК ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАЗРЫВ

В. Б. Либрович

(Москва)

В некоторых экспериментах, в частности, на горелках с ячеистыми пламенами было отмечено распространение периодических возмущений вдоль поверхности пламени [1].

В настоящей работе предлагается общая теория распространения периодических волн вдоль поверхности фронта пламени, который рассматривается как газодинамический разрыв. Устанавливаются соотношения, выполнение которых необходимо для того, чтобы существовали волновые решения и с этой точки зрения проводится анализ некоторых феноменологических моделей пламени.

Постановка задачи, основные соотношения. Ограничив себя рассмотрением бегущей волны, распространяющейся вдоль фронта пламени с постоянной скоростью, все исследование будем проводить в прямоугольной системе координат (x, y) , движущейся вместе с волной (рис. 1). В этой системе поле течения является стационарным. На рис. 1 область 1, которую будем обозначать нижним индексом $-$, отвечает потенциальному полю течения холодного газа. Вдали от пламени при $y \rightarrow -\infty$ скорость течения равна U_- . Область 2 характеризуемая нижним индексом $+$, заполнена продуктами горения, которые приобретают завихренность на поверхности разрыва. На рис. 1, 1 показаны линии тока продуктов горения при невозмущенном, в отсутствие волны, течении газа; горячий газ движется в этом случае со скоростью $U_+ = \sqrt{U_-^2 + U_+^{0^2}}$, где U_+^0 скорость распространения плоского фронта пламени относительно

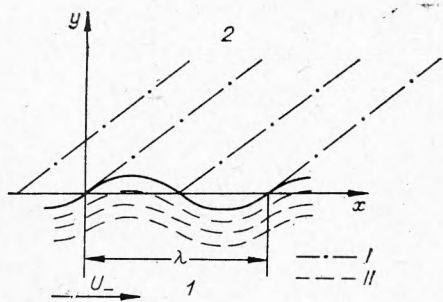


Рис. 1.

продуктов сгорания. На рис. 1, II обозначены линии тока холодного газа при волновом движении жидкости. В силу предположения о непроницаемости фронта пламени, которое будет использовано позже, эти линии тока эквивалентны поверхности фронта пламени, совпадающей с одной из линий тока. Длину волны обозначим через λ .

Исследование стационарного плоского течения несжимаемого газа удобно проводить, используя в

качестве основных функций, описывающих течение, потенциал течения и функцию тока в области 1 и функцию тока и завихренность течения в области 2. Введение функций тока исключает из рассмотрения уравнение неразрывности, которое выполняется тождественно.

В потенциальной области течения 1 определим потенциал и функцию тока соотношениями:

$$\begin{aligned} u_x^- &= \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} - \frac{\partial \psi_-}{\partial y}, \\ u_y^- &= \frac{\partial \varphi_-}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_-}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_x^- , u_y^- — компоненты скорости по осям (x, y) соответственно. В вихревой области течения 2 функцию тока введем как

$$u_x^+ = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi_+}{\partial y}, \quad u_y^+ = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi_+}{\partial x}, \quad \alpha = \rho_+ / \rho_-, \quad (2)$$

где ρ_- — постоянная плотность газа в области 1; ρ_+ — плотность продуктов сгорания, которая может изменяться при переходе от одной линии тока к другой. Завихренность газа в области 2 определяется соотношением

$$\omega = \frac{\partial u_y^+}{\partial x} - \frac{\partial u_x^+}{\partial y}. \quad (3)$$

Она также зависит от функции тока. Константы в φ_- , ψ_- , ψ_+ определим из условия

$$\begin{aligned} x=0, \quad y=0, \\ \varphi_- = \psi_- = \psi_+ = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (1) — (4) сохраняются, если ввести в дальнейшем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} u_x' &= \frac{u_x}{U_-}, \quad u_y' = \frac{u_y}{U_-}, \quad p' = p / (U_-^2 / 2), \\ \psi' &= \psi \left(\frac{\lambda U_-}{2\pi} \right), \quad \varphi' = \varphi \left(\frac{\lambda U_-}{2\pi} \right), \\ \omega' &= \omega \left(\frac{\lambda U_-}{2\pi} \right), \quad x' = \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad y' = \frac{2\pi}{\lambda} y. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь штрихами помечены новые переменные, которые в дальнейшем будут опускаться, p — давление.

В потенциальной области течения 1 функция тока и потенциал течения удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta \psi_- = \Delta \varphi_- = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}.$$

В вихревой области 2 функция тока удовлетворяет следующему уравнению, которое получается, если в (3) подставить выражение для компонент скорости (2):

$$\Delta\psi_+ - \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\psi_+} \left[\left(\frac{\partial\psi_+}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_+}{\partial y} \right)^2 \right] + \alpha\omega = 0. \quad (6)$$

Граничным условием уравнения для ψ_- (4) на поверхности пламени является

$$\psi_- = 0,$$

которое означает, что фронт пламени рассматривается как поверхность, непроницаемая для холодного газа области 1. Его можно использовать в случае, если скорость распространения волны вдоль фронта пламени во много раз превышает нормальную скорость распространения пламени относительно холодного газа.

Вдали от поверхности пламени при $y \rightarrow -\infty$

$$u_x^- = \frac{\partial\psi_-}{\partial y} = 1.$$

Граничными условиями для решения уравнения (5) в области продуктов сгорания на поверхности фронта пламени служат

$$\psi_+ = - \int_0^s u ds, \quad (7)$$

где u — нормальная скорость пламени по отношению к холодному газу; s — длина дуги, отсчитываемая вдоль дуги поверхности фронта пламени в положительную сторону оси x , $s=0$ соответствует $x=0$;

$$u_\tau^- = u_\tau^+, \quad (8)$$

где u_τ — компонента скорости, касательная к поверхности фронта пламени;

$$p_- + p_+ = 2u^2 \frac{1-\alpha}{\alpha}. \quad (9)$$

Вдали от пламени в области продуктов сгорания при $y \rightarrow +\infty$ будем требовать ограниченности решения. Волновое движение в идеальной жидкости в отсутствие диссипативных процессов может распространяться на бесконечные расстояния.

Для решения уравнения (6) следует знать функции $\alpha(\psi_+)$ и $\omega(\psi_+)$, которые определяются на поверхности пламени.

При решении задачи в потенциальной области течения воспользуемся методами, подробно развитыми в работах [2—4]. Введем комплексный потенциал соотношением

$$f = \varphi_- + i\psi_-$$

и комплексную плоскость независимых переменных

$$z = x + iy, \quad (10)$$

тогда комплексно сопряженная скорость

$$\bar{w} = \frac{df}{dz} = \bar{u}_x - iu_y. \quad (11)$$

Для периодического решения вдоль оси x имеем

$$\bar{w}(z + \lambda) = \bar{w}(z),$$

где λ — действительное число. Из (11)

$$f(z + \lambda) = f(z) + \lambda_\kappa,$$

где λ_κ — комплексная константа. В нашем случае она действительна,

так как поверхность разрыва совпадает с линией тока и за параметр вдоль поверхности разрыва можно взять значение потенциала φ . На промежутке в одну длину волны в безразмерных переменных φ изменяется на 2π , поэтому $\lambda_k = 2\pi$.

Возьмем в качестве независимой переменной комплексный потенциал f , тогда

$$\bar{w}(f + 2\pi) = \bar{w}(f).$$

Введем комплексную переменную ξ

$$\xi = \exp[-f] = R e^{i\sigma}.$$

При таком преобразовании поверхность разрыва, соответствующая $\varphi = 0$ и заключенная между точками, которые соответствуют значениям $\varphi = \pm\pi$, переходит единичную окружность, разрезанную в точке A ($\sigma = \pm\pi$) (верхний знак соответствует точке $+\pi$, а нижний $-\pi$). При прохождении отрезка поверхности фронта пламени слева направо (в сторону положительных x) точка проходит окружность по часовой стрелке (рис. 2). Внутренность единичного круга соответствует области потенциального течения.

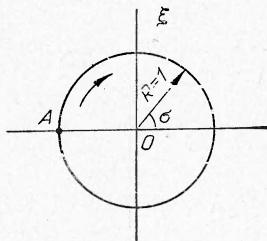


Рис. 2.

Введем, следуя [4], вместо \bar{w} функцию Ω :

$$\bar{w} = \text{const } e^{-i\Omega} = \text{const } e^{\tau} e^{-i\vartheta},$$

$$\Omega = \vartheta + i\tau.$$

Константу выберем таким образом, чтобы в Ω , рассматриваемую как функцию комплексной переменной ξ , не входила бы постоянная мнимая составляющая. Обратим внимание, что

$$|\bar{w}| = \text{const } e^{\tau},$$

$$u_x^- = \text{const } e^{\tau} \cos \vartheta,$$

$$u_y^- = \text{const } e^{\tau} \sin \vartheta,$$

так что

$$\text{tg } \vartheta = \frac{u_y^-}{u_x^-}, \quad \vartheta = \text{arctg } \frac{u_y^-}{u_x^-}.$$

Из условия, чтобы поток стремился к плоскопараллельному при $y \rightarrow -\infty$, следует, что

$$\text{const} = 1.$$

Переход к плоскости z осуществляется формулой

$$dz = \frac{df}{w} = i e^{i\Omega} \frac{d\xi}{\xi}$$

или

$$z = i \int_1^{\xi} e^{i\Omega} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (12)$$

В частности, из (12) следует уравнение поверхности фронта пламени. Для его получения следует принять $R = 1$, $\xi = e^{i\sigma}$.

Чтобы найти полное решение задачи в области I , необходимо знать скорость на поверхности разрыва, которая должна определяться из условий сопряжения решения задачи в потенциальной области с решением в области вихревого течения. Предположим, что эта функция известна. Пусть на поверхности разрыва в потенциальной области

$$|\bar{w}| = \sqrt{u_x^{-2} + u_y^{-2}} = \sqrt{u_n^2 + u_t^2} \cong |u_t|.$$

Пренебрежение составляющей скорости u_n , нормальной к поверхности разрыва, согласуется с основным исходным предположением о том, что линия тока совпадает с поверхностью разрыва.

Выделим чисто периодическую часть

$$u_\tau = 1 + r(\varphi_-)$$

и будем в дальнейшем рассматривать решение, как состоящее из двух частей: решение, соответствующее чисто плоскопараллельному течению (со скоростью, равной 1), и волновое решение. Будем также предполагать, что u_τ нигде не обращается в нуль.

Если $r(\varphi_-)$ известна, то известна мнимая часть комплексной функции Ω на плоскости ξ на окружности единичного круга

$$\tau = \text{Im } \Omega = \ln(1+r).$$

Очевидно также, что $\tau(\varphi_- + 2\pi) = \tau(\varphi_-)$. Согласно теории функций комплексного переменного, по мнимой части функции комплексного переменного на окружности единичного радиуса можно найти и всю функцию комплексного переменного внутри единичного круга. нас интересует решение задачи, при котором функция $\Omega(\xi)$ остается регулярной во всех точках круга, так как в области потенциального течения отсутствуют источники и стоки, и скорость газа, по предположению, нигде не обращается в нуль.

Решение задачи дается в виде тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \tau(R, \sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\alpha_n \cos n\sigma + \beta_n \sin n\sigma), \\ \vartheta(R, \sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} R^n (\beta_n \cos n\sigma - \alpha_n \sin n\sigma), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\sigma_*) \cos n\sigma_* d\sigma_*, \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\sigma_*) \sin n\sigma_* d\sigma_*. \end{aligned} \quad (13)$$

При выводе (13) и (14) было учтено, что при $R=0$ $\tau=\vartheta=0$. Распределение давления в потенциальной области течения можно получить из интеграла Бернулли

$$p_- + \omega \bar{\omega} = P = \frac{p_- - \infty}{U_-^2/2} + 1. \quad (14)$$

Решение задачи в вихревой области течения. Общая постановка задачи. Для решения уравнения (6), описывающего зависимость $\psi_+ = \psi_+(x, y)$, необходимо знать входящие в него функции $\alpha(\psi_+)$ и $\omega(\psi_+)$, которые могут быть определены на поверхности фронта пламени, поскольку она пересекается линиями тока, и значения этих функций остаются вдоль них постоянными.

Будем считать, что на поверхности фронта пламени известны $\alpha(\sigma_*)$ и $u(\sigma_*)$. Они должны быть периодическими и поэтому представимы в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u(\sigma_*) &= u^0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n \cos n\sigma_* + \delta_n \sin n\sigma_*) \right], \\ \alpha(\sigma_*) &= \alpha^0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n \cos n\sigma_* + h_n \sin n\sigma_*) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь в качестве параметра, характеризующего поверхность фронта пламени, выбрано $\sigma_* = -\varphi_-$. Коэффициенты γ_n , σ_n , g_n и h_n предполагаются заданными.

Чтобы из (15) найти $\alpha(\psi_*)$, нужно на поверхности пламени знать $\varphi_+(\sigma_*)$. Эта зависимость дается формулой (7). Дифференциал длины дуги ds можно связать с функцией $\tau(\sigma_*)$:

$$d_s = -\sqrt{dz_i d\bar{z}_i} = -e^{-\tau} d\sigma_*.$$

Таким образом, запись (7) в форме $\varphi_+(\sigma_*)$ имеет вид

$$\psi_+ = \int_0^{\sigma_*} \frac{u}{1+r} d\sigma_*.$$

Выражая из этой зависимости $\sigma_* = \sigma_*(\psi_+)$ и подставляя в (15), можно получить искомую функцию $\alpha = \alpha(\psi_+)$.

Получим теперь формулу, позволяющую рассчитывать завихренность потока за фронтом пламени по полю скоростей перед фронтом. Образование завихренности на поверхностях разрыва рассматривалось раньше в [5]. Будем исходить из следующей формулы теории плоских установившихся течений [6]:

$$\omega = -\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_+} \frac{V_+^2(p_+, \psi_+)}{2}, \quad (16)$$

$$V_+^2 = u_x^2 + u_y^2.$$

Пусть $l(\psi_+, p_+)$ — уравнение поверхности фронта пламени. Введем вместо p_+ переменную $l = l(\psi_+, p_+)$. Тогда для частной производной по ψ_+ некоторой произвольной функции σ имеем

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \psi_+} \right)_{p_+} = \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \psi_+} \right)_l - \left(\frac{\partial p_+}{\partial \psi_+} \right)_l \left(\frac{\partial \sigma}{\partial p_+} \right)_{\psi_+} \right]. \quad (17)$$

Применим формулу (17) к $G = V_+^2/2$. На поверхности разрыва имеют место соотношения, следующие из граничных условий (7)–(9) и формулы (14):

$$V_+^2 = u_{n+}^2 + u_{\tau+}^2 = \frac{u^2}{\alpha^2} + u_{\tau-}^2 = \frac{u^2}{\alpha^2} + (1+r)^2,$$

$$p_+ = P - (1+r)^2 - 2u^2 \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

В вихревой области интеграл Бернулли записывается в виде

$$p_+ + \alpha(\psi_+) V_+^2 = \alpha(\psi_+) F(\psi_+),$$

где $F(\psi_+)$ — функция от функции тока. Поэтому (16) записывается

$$\omega = \frac{1-\alpha}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \psi_+} (1+r)^2 \right]_l + \frac{1+2\alpha}{2\alpha} \left[\frac{\partial u^2}{\partial \psi_+} \right]_l. \quad (18)$$

Можно отметить определенную аналогию между условиями на поверхности разрыва, определяющими завихренность и энтропию за фронтом разрыва. Эти величины могут быть вычислены, исходя из модели течения идеальной жидкости, хотя они генерируются внутри разрыва, благодаря процессам вязкости, диффузии и теплопроводности, определяющим структуру гидродинамического разрыва.

Будем в дальнейшем пользоваться методом разложения функций в ряд по малому параметру — амплитуде волнового решения. В данной работе ограничимся первым приближением — членами, нелинейными по амплитуде.

Выпишем сначала в линейном приближении основные функции, описывающие решение в области 1, которые потребуются для решения задачи в области 2

$$ur_- = 1 + r = 1 + \alpha_1 \cos \sigma_* + \beta_1 \sin \sigma_*$$

Уравнения фронта пламени:

$$x_i = -\sigma_* - \beta_1 \cos \sigma_* + \alpha_1 \sin \sigma_*;$$

$$y_i = -\alpha_1 \cos \sigma_* - \beta_1 \sin \sigma_* + \alpha_1;$$

$$\psi_+ = u^0 \sigma_* + u^0 (\beta_1 - \delta_1) \cos \sigma_* + u^0 (\gamma_1 - \alpha_1) \sin \sigma_* - u^0 (\beta_1 - \delta_1) \quad (19)$$

при

$$x = x_i \quad), \quad y = y_i(\sigma_*).$$

В этих соотношениях коэффициенты α_1 , β_1 , δ_1 , γ_1 предполагаются величинами первого порядка малости. Воспользовавшись этим, из (19) можно получить ряд (ψ_+) , обратный к (19)

$$\sigma_* = \frac{\psi_+}{u^0} - (\beta_1 - \delta_1) \cos \frac{\psi_+}{u^0} - (\gamma_1 - \alpha_1) \sin \frac{\psi_+}{u^0},$$

который необходим для получения из (15) и (18) зависимостей $\alpha(\psi_+)$ и $\omega(\psi_+)$.

Вычисление по формуле (18) дает для завихренности выражение

$$\omega = \frac{1}{u^0} \left[(1 - \alpha^0) \beta_1 + u^{0^2} \frac{1 - 2\alpha^0}{\alpha^0} \delta_1 \right] \cos \sigma_* - \frac{1}{u^0} \left[(1 - \alpha^0) \alpha_1 + u^{0^2} \frac{1 - 2\alpha^0}{\alpha^0} \gamma_1 \right] \sin \sigma_*.$$

Переход от переменной σ_* к ψ_+ сводится к

$$\alpha(\psi_+) = \alpha^0 \left(1 + g_1 \cos \frac{\psi_+}{u^0} + h_1 \sin \frac{\psi_+}{u^0} \right)$$

(здесь g_1 и h_1 — коэффициенты первого порядка малости) и к

$$\omega(\psi_+) = \frac{1}{u^0} \left[(1 - \alpha^0) \beta_1 + u^{0^2} \frac{1 - 2\alpha^0}{\alpha^0} \delta_1 \right] \cos \frac{\psi_+}{u^0} - \frac{1}{u^0} \left[(1 - \alpha^0) \alpha_1 + u^{0^2} \frac{1 - 2\alpha^0}{\alpha^0} \gamma_1 \right] \sin \frac{\psi_+}{u^0}.$$

Перейдем к решению основного уравнения (6), описывающего движение продуктов горения. Будем искать его в виде

$$\psi_+(x, y) = \psi^0 + \hat{\psi},$$

$$\psi^0 = -u^0 x + \alpha^0 y,$$

где $\hat{\psi}$ функция, описывающая волновое движение. Решение для $\hat{\psi}$ найдем:

$$\hat{\psi}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(y) \cos nx + b_n(y) \sin nx],$$

где функции $a_n(y)$ и $b_n(y)$ имеют порядок малости, соответствующий их индексу.

Для первого приближения из (6) получаем уравнение

$$\Delta \psi^{(1)} - \left(-\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\psi_+} \right)^{(1)} \left[\left(\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right] + \alpha^{(0)} \omega^{(1)} = 0.$$

Индексы (0) и (1) обозначают порядок малости членов, присутствующих в уравнении. Решение для $\psi^{(1)}(x, y)$, ограниченное при $y \rightarrow +\infty$, может быть записано в виде

$$\psi^{(1)} = (A_1 \cos x + A_2 \sin x) e^{-y} - \left\{ u^0 h_1 - \frac{\alpha^0 u^0}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \left[(1 - \alpha^0) \beta_1 + \right. \right.$$

$$+ u^0 \frac{1-2\alpha^0}{\alpha^0} \delta_1 \left. \right\} \cos \left(-x + \frac{\alpha^0}{u^0} y \right) + \left\{ u^0 g_1 - \frac{\alpha^0 u^0}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \left[(1 - \alpha^0) \alpha_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + u^0 \frac{1-2\alpha^0}{\alpha^0} \gamma_1 \right] \right\} \sin \left(-x + \frac{\alpha^0}{u^0} y \right) + \text{const}$$

(A_1 и A_2 — константы интегрирования, а const — постоянная, с точностью до которой определяется функция тока).

Для определения констант A_1 , A_2 , а также скорости распространения волны U_- следует воспользоваться двумя из трех граничных условий на поверхности фронта пламени (7), (8).

Составляющая скорости, касательная к поверхности фронта пламени со стороны продуктов сгорания.

$$u_\tau^+ = u_x^+ \cos \vartheta + u_y^+ \sin \vartheta, \\ u_x^+ = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi^+}{\partial y}, \quad u_y^+ = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi^+}{\partial x}.$$

Здесь ϑ — угол между касательной к поверхности фронта пламени и осью x .

Подставляя решение в граничные условия и полагая $x=x_1$, $y=y_1$, получаем после исключения A_1 и A_2 :

$$\left[2 + \frac{\alpha^0(1-\alpha^0)}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \right] \alpha_1 - \frac{u^0}{\alpha^0} \left[1 + \frac{\alpha^0(1-\alpha^0)}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \right] \beta_1 = -(1-2\alpha^0) \frac{u^{0^2}}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \gamma_1 + \\ + \frac{u^0}{\alpha^0} \left[1 + (1-2\alpha^0) \frac{u^{0^2}}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \right] \delta_1 - \frac{u^0}{\alpha^0} h_1, \quad (20)$$

$$\frac{u^0}{\alpha^0} \left[1 + \frac{\alpha^0(1-\alpha^0)}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \right] \alpha_1 + \left[2 + \frac{\alpha^0(1-\alpha^0)}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \right] \beta_1 = \\ = -\frac{u^0}{\alpha^0} \left[1 + (1-2\alpha^0) \frac{u^{0^2}}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \right] \gamma_1 - (1-2\alpha^0) \frac{u^{0^2}}{u^{0^2} + \alpha^{0^2}} \delta_1 + \frac{u^2}{\alpha^0} g_1. \quad (21)$$

Из коэффициентов α_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 , g_1 , h_1 независимыми являются только α_1 и β_1 , определяющие амплитуду волнового движения с точностью до которой в линейном приближении решается задача. Коэффициенты g_1 , γ_1 , δ_1 , h_1 , задающие изменение нормальной скорости распространения пламени и плотности продуктов горения вдоль фронта пламени, могут быть выражены в виде линейных комбинаций α_1 , β_1 . Множители пропорциональности будут разными в различных феноменологических моделях распространения искривленного ламинарного фронта пламени.

Условия, необходимые для существования бегущих волн малой амплитуды. Не уточняя пока феноменологическую модель искривленного фронта пламени, запишем связь между α_1 , β_1 , γ_1 , δ_1 , g_1 и h_1 :

$$\gamma_1 = \Gamma_\gamma^\alpha \alpha_1 + \Gamma_\gamma^\beta \beta_1, \\ \delta_1 = \Gamma_\delta^\alpha \alpha_1 + \Gamma_\delta^\beta \beta_1, \\ g_1 = \Gamma_g^\alpha \alpha_1 + \Gamma_g^\beta \beta_1, \\ h_1 = \Gamma_h^\alpha \alpha_1 + \Gamma_h^\beta \beta_1, \quad (22)$$

где Γ_i^j ($i = \gamma, \delta, g, h$; $j = \alpha, \beta$) — множители пропорциональности. Среди восьми коэффициентов Γ_i^j независимыми фактически являются только четыре. Это видно из следующих общих соображений. При изменении начала отсчета пространственной координаты x (или, что эквивалентно, независимой переменной σ) результат исследования не должен изменяться, поскольку рассматривается бесконечный цуг волн.

Произведем замену $\sigma_*' = \sigma_* + \frac{\pi}{2}$, при этом произойдет преобразо-

вание $\cos \sigma \rightarrow -\sin \sigma^*$ и $\sin \sigma \rightarrow \cos \sigma^*$, что эквивалентно замене α_1 на $-\beta_1$, а β_1 на α_1 , γ_1 на $-\delta_1$, δ_1 на γ_1 , g_1 на $-h_1$ и h_1 на g_1 . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma}^{\alpha} &= \Gamma_{\delta}^{\beta}, & \Gamma_{\gamma}^{\beta} &= -\Gamma_{\delta}^{\alpha}, \\ \Gamma_{g}^{\alpha} &= \Gamma_{h}^{\beta}, & \Gamma_{g}^{\beta} &= -\Gamma_{h}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (22) с учетом соотношений (23) в (20) и (21), получим однородную систему двух линейных уравнений относительно α_1 и β_1 . Для существования нетривиального решения определитель системы должен быть равен нулю. Это дает условие для определения скорости распространения волны U , входящей в качестве обезразмеривающего знаменателя в u^0 . Общее выражение для определителя достаточно сложно, поэтому оно не приводится. Рассмотрим предельный случай «горячих» пламен ($\alpha \ll 1$), когда выкладки могут быть значительно упрощены.

Введем новое обозначение $Z = u^0/\alpha^0$ и будем искать решение для Z при $\alpha^0 \rightarrow 0$. Переходя в соотношениях (20) — (21) к пределу и ограничиваясь членами наивысшего порядка, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1+Z}{Z} \beta_1 &= -2\delta_1 + h_1, \\ \frac{1+Z}{Z} \alpha_1 &= -2\gamma_1 + g_1. \end{aligned}$$

Подставляя (22) и (23) и приравнявая определитель нулю, найдем:

$$\begin{aligned} (Y + 2\Gamma_{\gamma}^{\alpha} - \Gamma_g^{\alpha})^2 + (2\Gamma_{\gamma}^{\beta} - \Gamma_g^{\beta})^2 &= 0, \\ Y &= (1+Z)/Z. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку представляют интерес $0 < Z < \infty$, то следует искать решение при условии $1 < Y < \infty$.

Чтобы такое решение существовало, из (24) следует, что необходимо требовать выполнения двух условий

$$2\Gamma_{\gamma}^{\beta} - \Gamma_g^{\beta} = 0, \quad (25)$$

$$\Gamma_g^{\alpha} - 2\Gamma_{\gamma}^{\alpha} > 1. \quad (26)$$

Пусть решению соответствует $Z = Z^*$. Тогда скорость распространения волны

$$U_- = \frac{u_n^0}{\sqrt{Z^* \alpha^0}},$$

где u_n^0 — размерная скорость распространения плоского фронта пламени по холодному газу. Таким образом, при $\alpha \rightarrow 0$, т. е. для высокотемпературных пламен, скорость распространения волны во много раз превышает скорость распространения пламени и в этом случае обоснованно полагать, что линия тока течения в потенциальной области совпадает с поверхностью фронта пламени, как это предполагалось в начале исследования.

Решение Z^* выражается через коэффициенты Γ_{γ}^{α} и Γ_g^{α} , и, следовательно, определяется выбранной моделью искривленного фронта пламени.

Феноменологические модели искривленного фронта пламени и их связь с волновым решением. Из условий (25), (26) видно, что если считать скорость распространения пламени и плотность продуктов сгорания независимыми от искривления пламени ($\gamma_1 = \delta_1 = g_1 = h_1 = 0$), как это было предложено Л. Д. Ландау, то волнового решения не существует.

Рассмотрим теперь другие феноменологические модели искривленного фронта пламени, в которых учитывались влияния искривлений на скорость распространения пламени. В модели Дж. Маркштейна [1]

полагается, что скорость пламени зависит только от локальной кривизны фронта

$$u = u^0 \left(1 - k\mu \frac{d^2 y_l}{dx^2} \right),$$

где μ — феноменологическая константа Маркштейна, имеющая размерность длины. Выписывание коэффициентов Γ_i^j дает

$$\Gamma_\gamma^\alpha = \Gamma_\delta^\beta = -k\mu, \quad \Gamma_\delta^\alpha = \Gamma_\gamma^\beta = \Gamma_{\xi}^{\alpha,\beta} = \Gamma_k^{\alpha,\beta} = 0.$$

Уравнение (24) в этом случае имеет волновое решение при $2\mu k > 1$:

$$Z^* = \frac{1}{2\mu k - 1}$$

и, следовательно, скорость распространения волны

$$U_- = \frac{u_\pi^0}{\sqrt{\alpha^0}} \sqrt{2k\mu_0 \frac{\kappa}{u_\pi^0} - 1}.$$

Здесь учтено, что μ из соображений размерности пропорциональна характерной толщине ламинарного фронта пламени κ/u_π^0 (κ — температуропроводность) с безразмерным множителем μ_0 . Неравенство $2\mu k > 1$ следует рассматривать как ограничение на длину волны

$$k > \frac{1}{2\mu_0 \frac{\kappa}{u_\pi^0}}, \quad \text{Re} = \frac{u_\pi^0}{\kappa k} < 2\mu_0,$$

где Re — число Пекле, построенное по длине волны.

Таким образом распространяются достаточно короткие волны, причем чем короче длина волны, тем ее скорость распространения больше (дисперсия). Легко видеть, что волновые решения существуют и в случае, если скорость пламени зависит не только от второй производной $\frac{d^2 y_l}{dx^2}$ (кривизны), но и от других четных производных.

В модели Экхауза [1] скорость пламени связана с разностью кривизны фронта пламени и поля течения холодного газа перед пламенем, в ней также вводилось время релаксации. Вычисление коэффициентов Γ_i^j в этом случае показывает, что $\Gamma_\gamma^\beta \neq 0$ и, следовательно, волновых решений не существует.

Интерес также представляют случаи, когда скорость нормального распространения пламени зависит от изменения касательной скорости холодного газа, поскольку поток газа вдоль искривленного фронта может приводить к перераспределению потоков и вещества внутри пламени. Если задать гипотетически связь между изменениями нормальной скорости пламени и относительным изменением скорости потока в виде

$$u = u^0 (1 - \Pi r), \quad (27)$$

где Π — безразмерная константа, то оказывается, что в случае $\Pi > 1/2$ существует характерная скорость распространения волновых возмущений вдоль фронта пламени, независимая от длины волны возмущения:

$$U_- = \frac{u_\pi^0}{\sqrt{\alpha_0}} \sqrt{2\Pi - 1}.$$

Волновое движение также возникает, если вместо (27) использовать зависимость скорости пламени от второй производной скорости газа по x или от первой производной, но при определенном сдвиге фаз между величинами, скорость волны при этом зависит от длины волны.

В заключение автор благодарит Г. И. Баренблатта за плодотворное обсуждение задачи, на которую он обратил внимание автора, Г. М. Махвиладзе за интересные дискуссии, а также Н. И. Кидина и В. И. Лисицина, оказавших помощь в работе.

Поступила в редакцию
3/V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Нестационарное распространение пламени. Под ред. Дж. Маркштейна. М., «Мир», 1968.
2. А. И. Некрасов. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951.
3. Л. Н. Сретенский. Теория волновых движений жидкости. М.—Л., ОНТ НКТП СССР, 1936.
4. Н. Н. Кочин. Полное собрание сочинений. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1955.
5. W. D. Hayes. J. of Fluid Mechanics, 1957, 6, 6.
6. Л. И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.

УДК 536.46

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕЦИРКУЛЯЦИИ ПРИ ГОРЕНИИ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Т. И. Алексеева, М. А. Гуревич, А. М. Степанов

(Ленинград)

Рециркуляцию — возврат продуктов горения в начальные зоны камеры сгорания принято условно делить на два типа: естественную, характерную для некоторых течений (ограниченные и закрученные струи, стабилизация пламени плохообтекаемыми телами и пр.), и механическую — принудительную рециркуляцию по конструктивным камерам.

Ниже на простейших моделях рассматриваются две задачи. Первая из них представляет собой попытку качественного анализа режимов рециркуляции, оптимальных в смысле получения максимальных объемных теплонапряжений при сжигании заранее подготовленной газовой смеси. Во второй рассмотрены условия воспламенения и погасания в прямой стесненной струе. Везде основной поток и рециркуляция считаются адиабатическими, смешение в поперечном направлении предполагается мгновенным и идеальным, а в продольном — пренебрежимо малым. Не учитывается реагирование в рециркулянте за время возврата.

Оптимальные режимы

Рассмотрим некоторый участок камеры сгорания с постоянным расходом. Состав и температура продуктов на выходе из него однозначно определяются составом и температурой на входе и временем пребывания смеси на этом участке. Если не учитывать (как это сделано здесь) изменение плотности газа, его время пребывания

$$\tau = \frac{V}{u_0 F_0} \quad (1)$$

однозначно связано с объемом участка камеры V при заданном объ-