

УДК 539.3

СТАЦИОНАРНОЕ ФРИКЦИОННОЕ ТЕПЛООБРАЗОВАНИЕ НА ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КОНТАКТЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ СФЕРЫ И ЖЕСТКОГО ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОГО ОСНОВАНИЯ

Р. Д. Кульчицкий-Жигайло, А. А. Евтушенко*

Политехнический университет, 15333 Бялысток, Польша

* Львовский государственный университет им. И. Франко, 290602 Львов

Предлагается подход к построению расчетной схемы определения размеров площадки контакта, давления и температуры для термочувствительной сферы, скользящей по жесткому теплоизолированному основанию. Как частный случай из полученного решения следует известное решение для постоянных теплофизических свойств материала сферы.

Введение. Осесимметричная контактная задача с учетом установившегося тепловыделения от трения скольжения исследовалась в работах [1–4]. При этом выявлен ряд новых (по сравнению с задачей Герца [5]) особенностей в поведении основных контактных характеристик. Так, в [1] численно, а в [2] аналитическим путем получено значение предельного (критического) радиуса площадки контакта при неограниченном увеличении прижимающей силы. Установлена связь этой величины с началом развития на контакте термоупругой неустойчивости.

Все перечисленные решения получены в предположении постоянства теплофизических свойств взаимодействующих тел. Однако современные фрикционные материалы, работающие в условиях высоких контактных давлений и температур, являются в большинстве своем термочувствительными, т. е. обладают температурозависимыми коэффициентами теплопроводности, удельной теплоемкости и линейного температурного расширения. В основном разработаны методы решения температурных задач теории трения [6–8]. Решения соответствующих граничных задач термоупругости малочисленны [9], а контактных задач отсутствуют.

1. Постановка задачи. Пусть упругая сфера радиуса R вдавливается силой P в жесткое, движущееся с постоянной скоростью v основание. Вследствие трения в области контакта генерируется тепло, приводящее к возникновению температурного поля и связанных с ним термических деформаций. Последние оказывают существенное влияние на распределение контактного давления p .

Предполагаем:

- 1) вертикальные перемещения сферы не зависят от касательных напряжений на площадке контакта, т. е. трение влияет на размеры контактной области только посредством теплообразования;
- 2) вся поверхность основания и свободная часть поверхности сферы теплоизолированы. Интенсивность фрикционного теплового потока q , направленного в области контакта на разогрев сферы, пропорциональна удельной мощности трения:

$$q = fvp \quad (1.1)$$

(f — коэффициент трения). Продолжительность нагрева сферы тепловым потоком (1.1) достаточна для достижения температурным полем стационарного состояния;

3) материал сферы термочувствителен: его коэффициенты теплопроводности K и линейного температурного расширения α являются функциями температуры T вида

$$K(T) = K_0 K^*(T), \quad \alpha(T) = \alpha_0 \alpha^*(T), \quad (1.2)$$

где $K_0 = K(T_0)$; $\alpha_0 = \alpha(T_0)$; $T_0 = 25^\circ\text{C}$ — температура точек сферы, удаленных от области взаимодействия.

На основании предположений 1 и 2 задачу будем рассматривать в осесимметричной постановке. Выберем начало цилиндрической системы координат $r\varphi z$ в центре контактного круга радиуса a , направив ось z внутрь сферы. Полагая дополнительно $a \ll R$, в соответствии с подходом Герца [5] граничные задачи теплопроводности и термоупругости для сферы сформулируем для полупространства.

2. Задача теплопроводности. Температурное поле T , возникающее в результате нагрева термочувствительного тела тепловым потоком (1.1), находится из решения нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[K(T) \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[K(T) \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right] = 0, \quad 0 \leq \rho, \zeta < \infty, \quad (2.1)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$K \frac{\partial T}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = -fva\rho H(1-\rho), \quad 0 \leq \rho < \infty; \quad (2.2)$$

$$T \rightarrow T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где $\rho = r/a$; $\zeta = z/a$; $H(\cdot)$ — единичная функция Хевисайда.

После применения к уравнению (2.1) и условиям (2.2), (2.3) преобразования Кирхгофа

$$\Phi(T) \equiv \int_{T_0}^T K^*(T') dT' \quad (2.4)$$

получим

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad 0 \leq \rho, \zeta < \infty; \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = -\frac{fva}{K_0} \rho H(1-\rho), \quad 0 \leq \rho < \infty; \quad (2.6)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial \rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial \rho + \partial^2/\partial \zeta^2$ — оператор Лапласа.

Решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условиям (2.6) и (2.7), имеет вид [4]

$$\Phi(\rho, \zeta) = \frac{fva}{K_0} \int_0^\infty e^{-s\zeta} J_0(s\rho) ds \int_0^1 xp(x) J_0(xs) dx \quad (2.8)$$

($J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода порядка нуль).

Вычислим интегралы [10]

$$\int_0^\infty e^{-s\zeta} J_0(s\rho) J_0(sx) ds = \frac{2}{\pi} \frac{K[\lambda(\rho, \zeta, x)]}{\sqrt{\zeta^2 + (\rho+x)^2}}; \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \int_0^{\infty} e^{-s\zeta} J_0(s\rho) J_0(sx) ds = -\frac{2}{\pi} \frac{\zeta E[\lambda(\rho, \zeta, x)]}{\sqrt{\zeta^2 + (\rho + x)^2} [\zeta^2 + (\rho - x)^2]}, \quad \zeta > 0, \quad (2.10)$$

где $\lambda(\rho, \zeta, x) = 2\sqrt{\rho x / (\zeta^2 + (\rho + x)^2)}$; $K(\cdot)$, $E(\cdot)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. С учетом (2.9), (2.10) для функции Φ (2.8) и ее частной производной $\partial\Phi/\partial\zeta$ получим

$$\Phi(\rho, \zeta) = \frac{2fva}{\pi K_0} \int_0^1 xp(x) \frac{K[\lambda(\rho, \zeta, x)]}{\sqrt{\zeta^2 + (\rho + x)^2}} dx; \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial\Phi(\rho, \zeta)}{\partial\zeta} = -\frac{2fva}{\pi K_0} \int_0^1 xp(x) \frac{\zeta E[\lambda(\rho, \zeta, x)]}{\sqrt{\zeta^2 + (\rho + x)^2} [\zeta^2 + (\rho - x)^2]} dx, \quad \zeta > 0. \quad (2.12)$$

3. Задача термоупругости. Рассмотрим уравнения равновесия в перемещениях для термочувствительного тела [11]

$$\nabla^2 u_\rho - \frac{1}{\rho^2} u_\rho + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial\theta}{\partial\rho} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_0 \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}, \quad \nabla^2 u_\zeta + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial\theta}{\partial\zeta} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_0 \frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\Psi(T) \equiv \int_{T_0}^T \alpha^*(T') dT'; \quad (3.2)$$

$\theta = \partial u_\rho / \partial\rho + u_\rho / \rho + \partial u_\zeta / \partial\zeta$; $u_\rho = u_r / a$; $u_\zeta = u_z / a$; u_r, u_z — компоненты вектора перемещений в направлении осей r и z ; ν — коэффициент Пуассона.

Частное решение уравнений термоупругости (3.1) представим в виде [12]

$$u_\rho^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial\rho}, \quad u_\zeta^{(1)} = \frac{\partial F}{\partial\zeta}, \quad (3.3)$$

где термоупругий потенциал F и функция Ψ (3.2) удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 F = \beta\Psi \quad (\beta = \alpha_0(1+\nu)/(1-\nu)). \quad (3.4)$$

Напряжения $\sigma_{\zeta\zeta}^{(1)}$ и $\sigma_{\rho\zeta}^{(1)}$, соответствующие функции F , находятся по формулам [12]

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(1)} = -2\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial\rho} \right), \quad \sigma_{\rho\zeta}^{(1)} = 2\mu \frac{\partial^2 F}{\partial\rho \partial\zeta} \quad (3.5)$$

(μ — модуль сдвига).

Решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условиям убывания при $\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \rightarrow \infty$, имеет вид

$$F(\rho, \zeta) = \beta \int_0^{\infty} J_0(s\rho) ds \int_{\zeta}^{\infty} \Psi(s, y) \operatorname{sh}[s(y - \zeta)] dy, \quad (3.6)$$

где

$$\bar{\Psi}(s, y) = \int_0^{\infty} \rho \Psi(\rho, y) J_0(s\rho) d\rho. \quad (3.7)$$

Подставляя функцию F (3.6) в соотношения (3.5), находим при $\zeta = 0$

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(1)} = 2\mu\beta \int_0^\infty s^2 J_0(s\rho) ds \int_0^\infty \bar{\Psi}(s, y) \operatorname{sh}(sy) dy, \quad \sigma_{\rho\zeta}^{(1)} = 2\mu\beta \int_0^\infty s^2 J_1(s\rho) ds \int_0^\infty \bar{\Psi}(s, y) \operatorname{ch}(sy) dy, \quad (3.8)$$

т. е. поверхность полупространства несвободна. Поэтому рассмотрим дополнительную задачу о действии на поверхности $\zeta = 0$ усилий, иницирующих напряжения (обозначенные индексом 2) такие, что

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(1)} + \sigma_{\zeta\zeta}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{\rho\zeta}^{(1)} + \sigma_{\rho\zeta}^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0. \quad (3.9)$$

Напряженное состояние, обусловленное усилиями, осесимметрично распределенными по поверхности упругого полупространства, определим при помощи функции Лява L [13] из решения бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 L = 0. \quad (3.10)$$

Вертикальное перемещение $u_\zeta^{(2)}$ и напряжения $\sigma_{\zeta\zeta}^{(2)}$, $\sigma_{\rho\zeta}^{(2)}$ связаны с функцией L соотношениями

$$u_\zeta^{(2)} = \frac{1}{1-2\nu} \left[2(1-\nu) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2} \right], \quad \sigma_{\zeta\zeta}^{(2)} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(2-\nu) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2} \right], \quad (3.11)$$

$$\sigma_{\rho\zeta}^{(2)} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1-\nu) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2} \right].$$

Общее решение уравнения (3.10), убывающее при $\rho \rightarrow \infty$ или $\zeta \rightarrow \infty$, имеет вид

$$L = \int_0^\infty s [A_1(s) + \zeta A_2(s)] e^{-s\zeta} J_0(s\rho) ds. \quad (3.12)$$

Подставляя функцию L (3.12) в соотношения (3.11), получим

$$u_\zeta^{(2)} = -\frac{1}{1-2\nu} \int_0^\infty s^2 \{s[A_1(s) + \zeta A_2(s)] + 2(1-2\nu)A_2(s)\} e^{-s\zeta} J_0(s\rho) ds; \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\zeta\zeta}^{(2)} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \int_0^\infty s^3 \{s[A_1(s) + \zeta A_2(s)] + (1-2\nu)A_2(s)\} e^{-s\zeta} J_0(s\rho) ds; \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\rho\zeta}^{(2)} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \int_0^\infty s^3 \{s[A_1(s) + \zeta A_2(s)] - 2\nu A_2(s)\} e^{-s\zeta} J_1(s\rho) ds. \quad (3.15)$$

Из граничных условий (3.9) с учетом формул (3.8), (3.14), (3.15) находим

$$A_1(s) = -(1-2\nu)\beta s^{-2} \left[(1-2\nu) \int_0^\infty \bar{\Psi}(s, \zeta) \operatorname{ch}(s\zeta) d\zeta + 2\nu \int_0^\infty \bar{\Psi}(s, \zeta) \operatorname{sh}(s\zeta) d\zeta \right],$$

$$A_2(s) = (1-2\nu)\beta s^{-1} \int_0^\infty \bar{\Psi}(s, \zeta) e^{-s\zeta} d\zeta.$$

Тогда из соотношений (3.3), (3.6), (3.13) получаем выражение для вертикальных перемещений поверхности термочувствительного полупространства, нагреваемого фрикционным тепловым потоком (1.1):

$$u_\zeta^{th}(\rho) \equiv u_\zeta^{(1)}(\rho, 0) + u_\zeta^{(2)}(\rho, 0) = -2(1+\nu)\alpha_0 \int_0^\infty s J_0(s\rho) ds \int_0^\infty \bar{\Psi}(s, \zeta) e^{-s\zeta} d\zeta. \quad (3.16) \quad 15$$

Подставляя в соотношение (3.16) выражение для трансформанты $\bar{\Psi}$ (3.7) с учетом (3.2), получим

$$u_{\zeta}^{th}(\rho) = -2(1 + \nu)\alpha_0 \int_0^{\infty} s J_0(s\rho) ds \int_0^{\infty} e^{-s\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} x J_0(sx) dx \int_{T_0}^T \alpha^*(T') dT'. \quad (3.17)$$

Поскольку

$$\int_{T_0}^T \alpha^*(T') dT' = \Phi(T) + \int_{T_0}^T [\alpha^*(T') - K^*(T')] dT',$$

где функция Φ определяется соотношением (2.8), равенство (3.17) перепишем в виде

$$u_{\zeta}^{th}(\rho) = -\delta fva u_{\zeta_1}^{th}(\rho) - 2(1 + \nu)\alpha_0 u_{\zeta_2}^{th}(\rho), \quad \rho \geq 0. \quad (3.18)$$

Здесь

$$u_{\zeta_1}^{th}(\rho) = \int_0^{\infty} s^{-1} J_0(s\rho) ds \int_0^1 xp(x) J_0(sx) dx; \quad (3.19)$$

$$u_{\zeta_2}^{th}(\rho) = \int_0^{\infty} s J_0(s\rho) ds \int_0^{\infty} e^{-s\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} x J_0(sx) dx \int_{T_0}^T [\alpha^*(T') - K^*(T')] dT'; \quad (3.20)$$

$\delta = \alpha_0(1 + \nu)/K_0$ — коэффициент термического искажения [1].

Первое слагаемое в формуле (3.18) определяет решение рассматриваемой граничной задачи термоупругости для постоянных (не зависящих от температуры) свойств материала полупространства [2]. Эту задачу в дальнейшем назовем линейной. Второе слагаемое в формуле (3.18) вносит поправку за счет термочувствительности материала.

Из (3.20) следует, что при выполнении равенства $\alpha^*(T) = K^*(T)$ вертикальное перемещение $u_{\zeta_2}^{th}(\rho) = 0$, а выражение для $u_{\zeta}^{th}(\rho)$ будет таким же, как и в соответствующей линейной задаче. При $\alpha^*(T) > K^*(T)$ термическое искажение поверхности тела увеличится по сравнению с линейным случаем, а при $\alpha^*(T) < K^*(T)$ уменьшится.

Преобразуем соотношение (3.20) к более удобной для приложений форме. Интегрирование по частям дает

$$u_{\zeta_2}^{th}(\rho) = \int_0^{\infty} J_0(s\rho) ds \int_0^{\infty} x J_0(sx) dx \int_{T_0}^T [\alpha^*(T') - K^*(T')] dT' \Big|_{\zeta=0} + \\ + \int_0^{\infty} J_0(s\rho) ds \int_0^{\infty} e^{-s\zeta} d\zeta \int_0^{\infty} x J_0(sx) \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\alpha^*(T) - K^*(T)}{K^*(T)} dx. \quad (3.21)$$

Принимая во внимание значение интеграла (2.9), из соотношения (3.21) находим

$$u_{\zeta_2}^{th}(\rho) = \frac{z}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} x \int_{T_0}^{T(x,0)} [\alpha^*(T') - K^*(T')] dT' \Big|_{\zeta=0} \frac{K[\lambda(\rho, 0, x)]}{\rho + x} dx + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} x \frac{K[\lambda(\rho, \zeta, x)]}{\sqrt{\zeta^2 + (\rho + x)^2}} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\alpha^*(T) - K^*(T)}{K^*(T)} dx \right\}, \quad (3.22)$$

где $\partial\Phi/\partial\zeta$ определяется по формуле (2.12).

4. Контактная задача. Запишем условие контакта сферы с жестким основанием:

$$u_{\zeta}^e(\rho) + u_{\zeta}^{th}(\rho) = \Delta - \frac{a}{2R} \rho^2, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (4.1)$$

Здесь $u_{\zeta}^e = u_z^e/a$ — безразмерное нормальное перемещение точек сферы в результате действия механической нагрузки; u_{ζ}^{th} — термическое искривление поверхности вследствие фрикционного теплообразования (определяется соотношениями (3.18), (3.19), (3.22)); Δ — вертикальное смещение удаленной точки сферы. Перемещение u_{ζ}^e имеет вид [14]

$$u_{\zeta}^e(\rho) = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_0^1 r r'(x) \frac{K[\lambda(\rho, 0, x)]}{\rho+x} dx, \quad \rho \geq 0. \quad (4.2)$$

Подстановка перемещений u_{ζ}^e (4.2) и u_{ζ}^{th} (3.18) в условие (4.1) приводит к нелинейному интегральному уравнению относительно контактного давления $p(\rho)$. Для нахождения Δ служит условие равновесия

$$\int_0^1 \rho p(\rho) d\rho = \frac{P}{2\pi a^2}. \quad (4.3)$$

Определение точного решения нелинейного интегрального уравнения — трудоемкая задача, осложняющаяся тем, что радиус a участка контакта априори также неизвестен. Поэтому в работах [15, 16] предложена методика построения приближенного решения контактных задач, состоящая в следующем. Представим контактное давление в виде

$$p(\rho) = p_0 \{d + (5/4)(3 - 2d)\rho^2\} \sqrt{1 - \rho^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad p_0 = P/(\pi a^2), \quad (4.4)$$

где неизвестный параметр $d = p(0)/p_0$. Отметим, что распределение давления (4.4) точно удовлетворяет условию равновесия (4.3).

Подставляя $p(\rho)$ (4.4) в соотношение (4.2) и интегрируя, находим

$$u_{\zeta}^e(\rho) = \frac{P}{a^2} \gamma \left\{ \frac{1}{16} (15 - 6d) \left(1 - \frac{1}{2} \rho^2\right) - \frac{15}{64} (3 - 2d) \left(1 - \rho^2 + \frac{3}{8} \rho^4\right) \right\}, \quad (4.5)$$

где $\gamma = (1 - \nu)/\mu$.

Нормальное перемещение поверхности сферы вследствие фрикционного разогрева аппроксимируем полиномом четвертого порядка

$$u_{\zeta}^{th}(\rho) \approx \tilde{u}_{\zeta}^{th}(\rho) = u_{\zeta}^{th}(0) + C_1 \rho^2 + C_2 \rho^4. \quad (4.6)$$

Коэффициенты C_i ($i = 1, 2$) определяем из физических условий

$$\tilde{u}_{\zeta}^{th}(0) - \tilde{u}_{\zeta}^{th}(1) = U_1, \quad \int_0^1 [\tilde{u}_{\zeta}^{th}(\rho) - \tilde{u}_{\zeta}^{th}(1)] \rho d\rho = U_2, \quad (4.7)$$

где

$$U_i = -\frac{\delta f \nu P}{\pi a} U_i^{(1)} - 2(1 + \nu) \alpha_0 U_i^{(2)}, \quad i = 1, 2,$$

$$U_1^{(j)} = V_j [u_{\zeta_j}^{th}(0) - u_{\zeta_j}^{th}(1)], \quad U_2^{(j)} = V_j \int_0^1 [u_{\zeta_j}^{th}(\rho) - u_{\zeta_j}^{th}(1)] \rho d\rho, \quad j = 1, 2, \quad (4.8)$$

$$V_1 = \pi a^2 / P, \quad V_2 = 1,$$

а u_{ζ}^{th} ($j = 1, 2$) находим по формулам (3.19) и (3.22). После подстановки $p(\rho)$ (4.4) в соотношения (3.19) получим

$$U_1^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} - \ln 2 \right) d + \frac{1}{6} \left(\frac{31}{30} - \ln 2 \right) (3 - 2d), \quad U_2^{(1)} = \frac{d}{20} + \frac{1}{56} (3 - 2d).$$

Из соотношений (4.6)–(4.8) с учетом формул (2.4), (2.11), (2.12), (3.19), (3.22), (4.4) следует, что

$$C_i = -\frac{\delta f v P}{\pi a} C_i^{(1)}(d) - 2(1 + \nu) \alpha_0 C_i^{(2)} \left(\frac{f v P}{a K_0}, d \right), \quad i = 1, 2, \quad (4.9)$$

где $C_1^{(j)} = 3U_1^{(j)} - 12U_2^{(j)}$, $C_2^{(j)} = -4U_1^{(j)} + 12U_2^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Подставляя u_{ζ}^e (4.5) и u_{ζ}^{th} (4.6) с учетом (4.9) в условие контакта (4.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ , получим

$$\begin{aligned} \frac{9d}{32} - \frac{15}{64} + \frac{\delta f v a}{\pi \gamma} C_1^{(1)}(d) + \frac{2(1 + \nu) \alpha_0 a^2}{\gamma P} C_1^{(2)} \left(\frac{f v P}{a K_0}, d \right) &= \frac{a^3}{2PR\gamma}, \\ \frac{45}{512} (3 - 2d) + \frac{\delta f v a}{\pi \gamma} C_2^{(1)}(d) + \frac{2(1 + \nu) \alpha_0 a^2}{\gamma P} C_2^{(2)} \left(\frac{f v P}{a K_0}, d \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обозначим

$$a_0 = a/a_H, \quad a_1 = (1 + \nu) \alpha_0 a_H^2 / \gamma P, \quad a_2 = f v P / a_H K_0, \quad (4.11)$$

где $a_H^3 = 3PR\gamma/8$ — радиус участка контакта в задаче Герца [5]. Тогда уравнения (4.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{9d}{32} - \frac{15}{64} + \frac{1}{\pi} a_0 a_1 a_2 C_1^{(1)}(d) + 2a_0^2 a_1 C_1^{(2)} \left(\frac{a_2}{a_0}, d \right) &= \frac{3}{16} a_0^3, \\ \frac{45}{512} (3 - 2d) + \frac{1}{\pi} a_0 a_1 a_2 C_2^{(1)}(d) + 2a_0^2 a_1 C_2^{(2)} \left(\frac{a_2}{a_0}, d \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом, приходим к системе двух нелинейных уравнений относительно a_0 и d . Входные параметры задачи — величины a_1 и a_2 (4.11), имеющие размерности a_1 — $[^\circ\text{C}^{-1}]$, a_2 — $[^\circ\text{C}]$. Отметим, что произведение $a_1 a_2$ является единственным безразмерным входным параметром соответствующей линейной задачи [1, 2].

Для проведения расчетов удобно задавать параметры a_0 и a_2 , а величины a_1 и d считать искомыми. Тогда из второго уравнения (4.12) следует

$$a_1 = \frac{45(2d - 3)/512}{(1/\pi) a_0 a_2 C_2^{(1)}(d) + 2a_0^2 C_2^{(2)}(a_2/a_0, d)}. \quad (4.13)$$

Подставляя a_1 (4.13) в первое уравнение (4.12), получим одно нелинейное уравнение для определения d .

Отметим, что, положив в уравнениях (4.12) $C_i^{(2)} = 0$ ($i = 1, 2$), получим решение соответствующей линейной задачи [1], для которой $d = 1,91$, $a_0 a_1 a_2 = 2,01$ при $P \rightarrow \infty$. Точное значение предельного (при $P \rightarrow \infty$) радиуса площадки контакта в линейной задаче найдено в работе [2]: $a_0^* = 2/(a_1 a_2)$. Таким образом, аппроксимация контактного давления в виде (4.4) позволяет получить приближенное решение, незначительно отличающееся от точного.

5. Численный анализ. В качестве материала термочувствительной сферы был взят графит, для которого $K_0 = 79,8$ Вт/(м·К). Зависимость функции K^* (1.2) от температуры

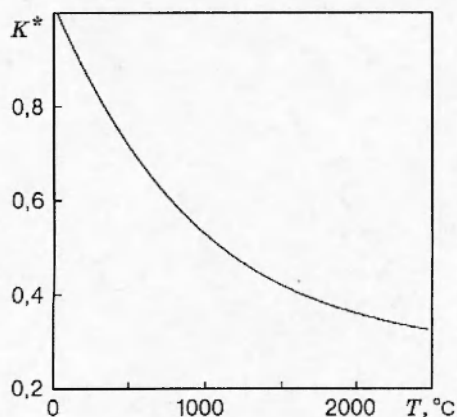


Рис. 1

i	k_i	φ_i
0	1,018 86	25,0
1	$-7,629 80 \cdot 10^{-4}$	1,005 39
2	$3,445 10 \cdot 10^{-7}$	$3,617 45 \cdot 10^{-4}$
3	$-7,768 78 \cdot 10^{-11}$	$1,108 48 \cdot 10^{-7}$
4	$7,036 91 \cdot 10^{-15}$	$2,411 02 \cdot 10^{-10}$
5	—	$-1,098 51 \cdot 10^{-13}$

по данным работы [17] показана на рис. 1. Аппроксимация этих результатов методом наименьших квадратов с абсолютной погрешностью, не превышающей 3 %, имеет вид

$$K^*(T) = \sum_{i=0}^4 k_i T^i$$

(коэффициенты k_i приведены в таблице). Коэффициент линейного температурного расширения $\alpha(T)$ считали постоянным ($\alpha^*(T) = 1$).

Для определения температуры T по найденной переменной Кирхгофа Φ (2.4) получена полиномиальная (с абсолютной погрешностью не более 1 %) зависимость вида

$$T(\Phi) = \sum_{i=0}^5 \varphi_i \Phi^i.$$

Значения коэффициентов φ_i также приведены в таблице.

Зависимость величины $a_0^{-1} = a_H/a$, обратной к безразмерному радиусу участка контакта a_0 (4.11), от параметра $b = a_1 a_2$ для двух значений a_2 (4.11) показана на рис. 2. При $b = 0$ фрикционный разогрев отсутствует: $a = a_H$. В случае линейной задачи (штриховая кривая) увеличение параметра b приводит к уменьшению площадки контакта и стремлению ее радиуса к критической величине $a_0^* = 2/b$ (пунктирная линия). Видно, что уже при $b > 6$ фактическое значение радиуса площадки контакта можно заменить предельным a_0^* . Влияние термочувствительности на размер площадки проявляется прежде всего в том, что при фиксированном входном параметре b значение радиуса контактного круга значительно меньше полученного в линейной задаче. Это различие увеличивается с ростом b или с ростом a_2 при фиксированном b . В нелинейном варианте задачи тенденции стремления радиуса контактного круга к некоторому предельному значению в рассмотренном диапазоне входных параметров не обнаружено.

Изменение величины d (отношения давления в центре площадки контакта к среднему его значению) в зависимости от параметра b для двух значений a_2 показано на рис. 3. В линейной задаче (штриховая линия) увеличение параметра b приводит к росту d , а при $b > 6$ можно положить $d = 1,91$. В случае термочувствительного материала d увеличивается с ростом b , так и не достигая предельной величины. При фиксированном b значение d тем больше, чем больше параметр a_2 . Таким образом, влияние термочувствительности сказывается на увеличении максимального контактного давления и локализации контактных напряжений в центральной части площадки контакта.

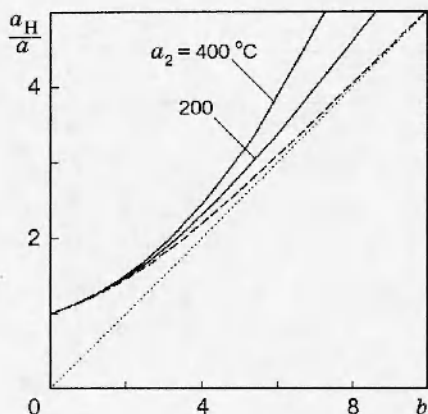


Рис. 2

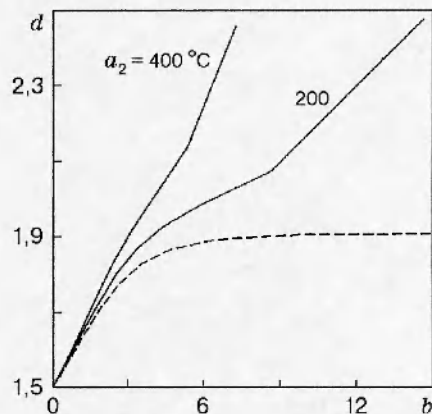


Рис. 3

На рис. 4 показана зависимость температуры T от параметра b (сплошные кривые) для $a_2 = 200; 400$ °С в центре контактного круга ($\rho = 0, \zeta = 0$). Штриховые кривые соответствуют значениям функции Кирхгофа Φ (2.11). Как и следовало ожидать, уменьшение радиуса площадки контакта и рост давления в центральной ее части приводят к резкому повышению температуры в центральной части контактного круга.

Распределение поверхностной контактной температуры (сплошные кривые) при $a_2 = 200$ °С для двух значений a_0 показано на рис. 5. Штриховые кривые — распределения функции Кирхгофа Φ (2.11). Максимальная температура достигается в центре площадки контакта, быстро уменьшаясь с увеличением расстояния ρ . При этом влияние термочувствительности резко уменьшается с удалением от центра площадки контакта.

Проведенный анализ показал, что влияние термочувствительности на контактные характеристики следует учитывать при достижении температур порядка 500 °С и выше. Отметим также значительное по сравнению с линейной задачей влияние на те же характеристики мощности теплообразования fvP (параметр a_2).

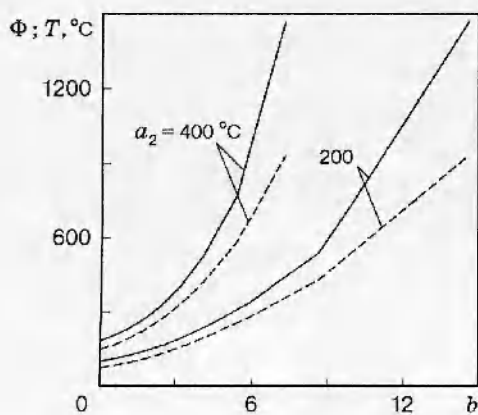


Рис. 4

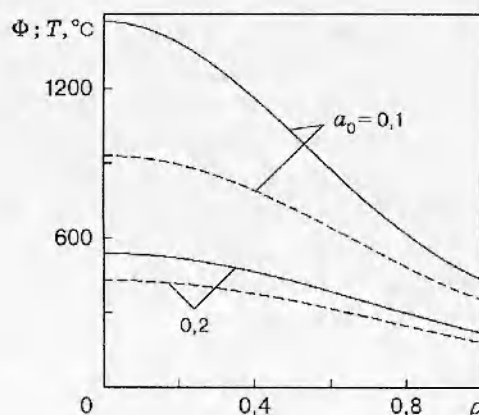


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Barber J. R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29, N 1. P. 1–13.
2. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Determination of limiting radii of the contact area in axi-symmetric contact problems with frictional heat generation // J. Mech. Phys. Solids. 1995. V. 43, N 4. P. 599–604.
3. Евтушенко А. А., Кульчицкий-Жигайло Р. Д. Об одном способе решения осесимметричных контактных задач стационарной термоупругости с учетом фрикционного теплообразования // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 4. С. 54–61.
4. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Two axi-symmetrical contact problems with the steady-state frictional heating // J. Theor. Appl. Mech. 1996. V. 34, N 4. P. 767–779.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989.
6. Yune Y. G., Bryant M. D. Thermal evolution of hot spots in thermally nonlinear carbon graphite sliders // J. Tribology. 1989. V. 111, N 3. P. 591–596.
7. Yune Y. G., Bryant M. D. Electrically and frictionally derived mound temperatures in carbon graphite brushes // IEEE Trans. on Components, Hybrids and Manufacturing Technology. 1989. V. 12, N 2. P. 229–236.
8. Lu C.-T., Bryant M. D. Thermoelastic evolution of contact area and mound temperatures in carbon graphite electrical brushes // Wear. 1994. V. 174, N 1/2. P. 137–146.
9. Yune Y. G., Bryant M. D. Thermoelastic evolution of hot spots in thermally nonlinear carbon graphite sliders // J. Thermal Stresses. 1994. V. 17, N 1. P. 45–61.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
11. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992.
12. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
13. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: Гл. ред. общетехн. лит. и моногр., 1935.
14. Sneddon I. N. The use of transform methods in elasticity. Raleigh: North Carolina Univ., 1964 (Report / AFOSR; N 64-1789).
15. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Approximate solution of the thermoelastic contact problem with frictional heating in the general case of the profile shape // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44, N 2. P. 243–250.
16. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Simplified solution for elliptical-contact problem with wear // Intern. J. Eng. Sci. 1997. V. 35, N 14. P. 1327–1334.
17. Yune Y. G., Bryant M. D. Transient nonlinear thermal runaway effects in carbon graphite electrical brushes // IEEE Trans. on Components, Hybrids and Manufacturing Technology. 1988. V. 11, N 1. P. 91–100.

Поступила в редакцию 11/III 1997 г.