ПМТФ, № 4, 1969

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

П. Я. Кочина

(Москва)

Рассматривается задача о растекании прямоугольного бугра грунтовых вод между двумя каналами с разными уровнями воды. Испарение учитывается в зависимости от глубины грунтового потока. Задача приводится к решению нелинейного интегрального уравнения и приближенно решается методом, представляющим собой развитие метода последовательной смены стационарных состояний. Приводится численный пример.

1. Рассматривается следующая задача: найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f(h) \tag{1.1}$$

где $f(h)$ — нелинейная функция

$$f(h) = \begin{cases} 0 & (h < h_0) \\ -bh + cH & (h > h_0) \end{cases} \qquad (b \geqslant 0) \tag{1.2}$$

в области $0 < x < L$ с начальным условием

$$h(x, 0) = \varphi(x) \tag{1.3}$$

и граничными условиями

$$h(0, t) = H_1, \qquad h(L, t) = H_2 \tag{1.4}$$

Эта задача относится к типу задач, рассмотренных в статьях [1-5].

К интегрированию уравнения (1.1), (1.2) с условиями (1.3) и (1.4) сводится решение задачи о растекании бугра грунтовых вод, имеющего начальную форму (1.3), между двумя каналами, находящимися на расстоянии L один от другого в предположении, что в начальный момент уровень воды в каналах внезапно становится равным H_1 и H_2, причем считается также, что при $h > h_0$ происходит испарение, а при $h < h_0$ испарение отсутствует. Интенсивность испарения — $f(h)$ предполагается либо линейной функцией уровня грунтовых вод h ($b > 0$, $c = b$, $H = h_0$), либо постоянной ($b = 0$, $cH < 0$).

В формуле (1.1) $a^2 = kH_* / \sigma$, где k — коэффициент фильтрации, H_* — средняя глубина грунтового потока, σ — недостаток насыщения или водоотдача.

Рассмотрим случай, когда в начальный момент уровень грунтовых вод постоянен

$$h(x, 0) = H_0 \tag{1.5}$$

причем будем предполагать, что выполнены неравенства $H_1 < h_0 \leqslant H_0 \leqslant H_2$. Тогда задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) сводится к решению уравнений

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \quad h_1(0, t) = H_1, \quad h_1(\chi(t), t) = h_0 \qquad (0 < x < \chi(t)) \tag{1.6}$$

и уравнений

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - bh_2 + cH$$

$$h_2(x, 0) = H_0, \quad h_2(L, t) = H_2, \quad h_2[\chi(t), t] = h_0 \qquad (\chi(t) < x < L) \tag{1.7}$$

Здесь $x = \chi(t)$ — неизвестная заранее граница, на которой выполняются условия

$$h[\chi(t), t] = h_0, \quad \frac{\partial h_1[\chi(t), t]}{\partial x} = \frac{\partial h_2[\chi(t), t]}{\partial x} \tag{1.8}$$

Последнее условие означает непрерывность расхода в сечении $x = \chi(t)$; после предположения, что функция $\chi(t)$ такая, что $\chi(0) = 0$, известна, из (1.6) и (1.7) найдены функции $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$, зависимость $\chi(t)$ определяется из второго уравнения (1.8).

Рассмотрим асимптотическое представление решения искомой задачи вблизи значений $t = 0$, $x = 0$. Можно видеть, что имеют место равенства

$$h_1(x, t) = h_2(x, t) = H_1 + (H_0 - H_1)\,\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-s^2)\,ds\right) \tag{1.9}$$

При этом уравнения (1.6) и (1.7) удовлетворены с точностью до членов высшего порядка малости, начальное условие (1.5), первое из граничных условий (1.4) и второе условие (1.8) также удовлетворены. Удовлетворяя первому граничному условию (1.8), находим уравнение для кривой $x = \chi(t)$ в окрестности значений $t = 0$, $x = 0$

$$x = \chi(t) = D\sqrt{t} \tag{1.10}$$

где D — единственный корень уравнения

$$\Phi\left(\frac{D}{2a}\right) = \frac{h_0 - H_1}{H_0 - H_1} \tag{1.11}$$

Рассмотрим случай $b > 0$, $c = b$, $H = h_0$. Подстановкой

$$v = (h - h_0)e^{bt} \tag{1.12}$$

сведем задачу (1.7) к задаче о решении уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{1.13}$$

$$v(x, 0) = H_0 - h_0 \tag{1.14}$$

$$v(L, t) = (H_2 - h_0)e^{bt}, \quad v[\chi(t), t] = 0, \qquad (0 < \chi(t) < L) \tag{1.15}$$

При этом второе условие (1.8) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial h_1[\chi(t), t]}{\partial x} = \exp(-bt)\,\frac{\partial v[\chi(t), t]}{\partial x} \tag{1.16}$$

Будем рассматривать вместо функции $h_1(x, t)$ функцию $h_1(x, t) - h_0$. Тогда начальное условие (1.6) примет вид

$$h_1[\chi(t), t] - h_0 = 0 \tag{1.17}$$

Задача, аналогичная описываемой уравнениями (1.6) и (1.13) с начальным условием (1.14) и граничными условиями (1.6), (1.17) и (1.15), (1.16), была рассмотрена в работе [2].

Можно видеть, что функция $h_1(x, t)$ описывается формулой

$$h_1(x, t) = h_0 + \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_1(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp\left\{-\frac{[x-\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{[x+\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right] d\tau + (H_1 - h_0)\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] \quad (1.18)$$

$$\left(\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2)\, ds\right)$$

Для $v(x, t)$ получаем следующее выражение:

$$v(x, t) = -\frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp\left\{-\frac{[x-\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{-\frac{[x+\chi(\tau)-2L]^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right] d\tau + \quad (1.19)$$

$$+ \frac{(H_0 - h_0)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^L \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+\xi-2L)^2}{4a^2 t}\right\}\right] d\xi -$$

$$- \frac{(H_2 - h_0)}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x-L}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{b\tau - \frac{(x-L)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau$$

Здесь

$$v_1(t) = \left.\frac{\partial(h_1 - h_0)}{\partial x}\right|_{x=\chi(t)-0}, \qquad v_2(t) = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\chi(t)+0} \quad (1.20)$$

Используя свойства теплового потенциала двойного слоя [6], из (1.18) — (1.20) для нахождения функций $v_1(t)$, $v_2(t)$ и $\chi(t)$ получим следующие интегральные уравнения:

$$v_1(t) = \int_0^t K_1(t, \tau) v_1(\tau)\, d\tau + \eta(t), \qquad v_2(t) = -\int_0^t K_2(t, \tau) v_2(\tau) + \gamma(t) \quad (1.21)$$

Здесь

$$K_i(t, \tau) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} \left\{[\chi(t) - \chi(\tau)] \exp\left\{-\frac{[\chi(t)-\chi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \right.$$

$$\left. - [\chi(t) + \chi(\tau) - 2(i-1)L] \exp\left\{-\frac{[\chi(t)+\chi(\tau)-2(i-1)L]^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right\} \quad (i = 1, 2) \quad (1.22)$$

$$\eta(t) = -\frac{2(H_1 - h_0)}{a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{\chi^2(t)}{4a^2 t}\right\} \quad (1.23)$$

$$\gamma(t) = \frac{2b(H_2 - h_0)}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{b\tau - \frac{(\chi(t)-L)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\tau +$$

$$+ \frac{2(H_2 - H_0)}{a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\chi(t)-L)^2}{4a^2 t}\right] + \quad (1.24)$$

$$+ \frac{(H_0 - h_0)}{a\sqrt{\pi t}} \left\{\exp\left[-\frac{\chi^2(t)}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(\chi(t)-2L)^2}{4a^2 t}\right]\right\}$$

Решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода (1.21) имеют вид [7]

$$v_1(t) = \xi(t) + \int_0^t \xi(\tau) S_1(t, \tau)\, d\tau, \quad v_2(t) = \mu(t) + \int_0^t \mu(\tau) S_2(t, \tau)\, d\tau \quad (1.25)$$

Здесь

$$\xi(t)=\eta(t)+\int_0^t K_1(t,\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau,\qquad \mu(t)=\gamma(t)-\int_0^t K_2(t,\tau)\,\gamma(\tau)\,d\tau$$

$$G_1^{(i)}(t,\tau)=\int_\tau^t K_i(t,\sigma)\,K_i(\sigma,\tau)\,d\sigma \tag{1.26}$$

$$G_{m+1}^{(i)}(t,\tau)=\int_\tau^t G_1^{(i)}(t,\sigma)G_m^{(i)}(\sigma,\tau)\,d\sigma,\qquad S_i(t,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty} G_m^{(i)}(t,\tau)\qquad (i=1,2)$$

Пользуясь соотношениями (1.16), (1.20), (1.22) — (1.26), находим для определения функции $\chi(t)$ такой, что $\chi(0)=0$, следующее интегральное уравнение

$$\gamma(t)-e^{bt}\eta(t)=\int_0^t [K_2(t,\tau)\,\gamma(\tau)+e^{bt}\eta(\tau)\,K_1(t,\tau)]\,d\tau+$$

$$+\int_0^t [\xi(\tau)\,S_1(t,\tau)\,e^{bt}-\mu(\tau)\,S_2(t,\tau)]\,d\tau \tag{1.27}$$

2. Предположим, что начальный уровень грунтовых вод равен уровню воды в канале при $x=L$, $H_0=H_2$. Для приближенного решения рассмотренной выше задачи и нахождения функции $\chi(t)$ используем некоторое развитие метода последовательной смены стационарных состояний [8,9].

Будем считать, что уравнение (1.1), где правая часть дана зависимостью (1.2), удовлетворяется только в интегральном смысле, т. е. после того как оно проинтегрировано по всей области $0\leqslant x\leqslant L$ значений независимого переменного x

$$\int_0^L \frac{\partial h}{\partial t}\,dx=\int_0^L a^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dx+\int_0^L f(h)\,dx \tag{2.1}$$

Функции же $h_1(x,t)$ и $h_2(x,t)$, удовлетворяющие соответственно граничным условиям (1.7), (1.8) и (1.11), (1.12), определим при $b\neq 0$ выражениями

$$h_1(x,t)=h_0+(h_0-H_1)\frac{[x-l(t)]}{l(t)}+C(t)\,x\,[x-l(t)]\qquad (0\leqslant x\leqslant l(t)) \tag{2.2}$$

$$h_2(x,t)=\frac{cH}{b}+\left(h_0-\frac{cH}{b}\right)\frac{\operatorname{sh}\omega(L-x)}{\operatorname{sh}\omega[L-l(t)]}- \tag{2.3}$$

$$-\left(H_2-\frac{cH}{b}\right)\frac{\operatorname{sh}\omega[l(t)-x]}{\operatorname{sh}\omega[L-l(t)]}\qquad \left(\omega=\frac{\sqrt{b}}{a},\ l(t)\leqslant x\leqslant L\right)$$

В формулы (2.2) и (2.3) входят две неизвестные функции $t-C(t)$ и $l(t)$. Здесь $l(t)$ — приближенное значение функции $\chi(t)$.

Задача теперь сведена к определению функций $C(t)$ и $l(t)$.

Для нахождения функции $C(t)$ используем уравнение (1.14)

$$\frac{\partial h_1[l(t),t]}{\partial x}=\frac{\partial h_2[l(t),t]}{\partial x} \tag{2.4}$$

Отсюда

$$C=\frac{1}{l}\left\{\frac{H_1-h_0}{l}-\frac{\omega}{\operatorname{sh}\omega(L-l)}\left[\left(h_0-\frac{cH}{b}\right)\operatorname{ch}\omega(L-l)-\left(H_2-\frac{cH}{b}\right)\right]\right\} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.1) с использованием выражений (2.2), (2.3) и (2.5) позволяет получить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $l\,(t)$, которое интегрируется в квадратурах

$$t = \int\limits_0^l F\,(z)\,dz \tag{2.6}$$

$$F\,(z) = \frac{z}{f\,(z)}\{\beta\,\mathrm{sh}^2\,\omega\,(L - z) + 2\delta z\,\mathrm{sh}\,\omega\,(L - z)\,\mathrm{ch}\,\omega\,(L - z) +$$
$$+ 2\nu z\,\mathrm{sh}\,\omega\,(L - z) + \omega\,[\alpha + \delta z^2 + (\mu + \nu z^2)\,\mathrm{ch}\,\omega\,(L - z)]\}$$

$$f\,(z) = 2a^2\,\mathrm{sh}\,\omega\,(L - z)\ \ (H_1 - h_0)\,\mathrm{sh}\,\omega\,(L - z) - A z\,\mathrm{ch}\,\omega\,(L - z) + Bz\}$$

Здесь

$$A = \omega\left(h_0 - \frac{cH}{b}\right), \quad B = \omega\left(H_2 - \frac{cH}{b}\right), \quad \alpha = \frac{1}{\omega}\left(h_0 + H_2 - 2\,\frac{cH}{b}\right) \tag{2.7}$$

$$B = -cH\,/\,b + {}^2/_3 h_0 + {}^1/_3 H_1, \qquad \delta = {}^1/_6 A, \qquad \nu = {}^1/_6 B, \qquad \mu = -\alpha$$

Можно показать, что

$$F\,(z) \to \infty \ \text{ при } \ z \to \chi_0$$

где χ_0 — корень уравнения $C = 0$, причем C определено формулой (2.5).

Интеграл (2.6) при $l = \chi_0$ расходится, следовательно $t \to \infty$. Полагая $l\,(t) = \chi_0$, $C = 0$ в формулах (2.2) и (2.3), получаем решение стационарной задачи, соответствующей рассматриваемой здесь нестационарной. В окрестности значения $l = 0$ имеем

$$l = M\sqrt{t} \tag{2.8}$$

$$M = 2a\sqrt{h_0 - H_1}\left[\frac{1}{3}\left(H_2 + h_0 - 2\,\frac{cH}{b}\right)\mathrm{sch}^2\,\frac{\omega L}{2} + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{2}{3}\,h_0 - \frac{H_1}{3} + \frac{cH}{b}\right)\right]^{-1/2} \tag{2.9}$$

При $b \neq 0$, в формулах (2.2), (2.3), (2.5) — (2.7) и (2.9), дающих приближенное решение рассматриваемой нами задачи, нужно положить $c = b$, $H = h_0$, в случае же $b = 0$ решение получается из этих формул предельным переходом. Выпишем это решение

$$h_1\,(x,\,t) = h_0 + (h_0 - H_1)\,\frac{x - l}{l} + Cx\,(x - l) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.10}$$

$$h_2\,(x,\,t) = H_2 + \frac{H_2 - h_0}{L - l}\,(x - L) - \frac{cH}{2a^2}\,(x - l)\,(x - L) \qquad (l \leqslant x \leqslant L) \tag{2.11}$$

$$C = \frac{1}{l}\left[\frac{H_2 - h_0}{L - l} - \frac{h_0 - H_1}{l} + \frac{cH}{2a^2}\,(L - l)\right] \tag{2.12}$$

$$f\,(z) = \frac{z}{(L - z)}\,\frac{\alpha\,(L - z)^2 + \beta z\,(2L - z) + \eta\,(4z - 3L)\,(L - z)^2}{\zeta z\,(L - z)^2 + \gamma\,(L - z) + \delta z} \tag{2.13}$$

$$\alpha = \frac{h_0 + 2H_1 - 3H_2}{6}, \quad \beta = \frac{h_0 - H_2}{6}, \quad \eta = \frac{cHL}{12a^2}, \quad \zeta = cH \tag{2.14}$$

$$\gamma = -\,2a^2\,(h_0 - H_1), \qquad \delta = 2a^2\,(H_2 - h_0)$$

$$M = \frac{2a\,\sqrt{h_0 - H_1}}{\sqrt{{}^1/_6\,(3H_2 - 2H_1 - h_0 + {}^3/_2 cHa^{-2}L^2)}} \tag{2.15}$$