

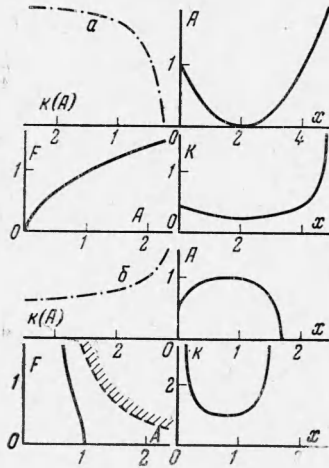
ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ К ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

И. Ф. Будагян, Д. И. Миrowsкий
(Москва)

Рассматривается применение изложенного в [1] метода решения задачи распространения волн для неоднородных сред с немонотонной и осциллирующей зависимостью волнового числа от координаты.

Описанный ранее метод [1] заключается в переходе от уравнения $\psi'' + k^2\psi = 0$ для полного поля $\psi = \alpha + \beta$ в неоднородной среде $k = k(x)$ к уравнениям, записанным относительно амплитуды и фазы прямой парциальной волны $\alpha(x) = A(x)e^{i\varphi(x)}$, с последующей заменой переменной $x \rightarrow A$. Применение асимптотического метода теории нелинейных колебаний [2,3], сводящегося к построению на фазовой плоскости ряда фазовых траекторий, позволяет решить полученное дифференциальное уравнение. В заключение производится замена $A \rightarrow x$. Прямая α и обратная β парциальные волны, полное поле ψ и зависимость $k = k(x)$ определяются при этом видом выбранной зависимости $k = k(A)$. Предложенный метод позволяет рассматривать среды с монотонно убывающим или возрастающим вдоль координаты волновым числом, изменяющимся немонотонно, а также осциллирующим с постоянными или переменными периодом и амплитудой, т. е. область его применимости не ограничивается тем или иным определенным классом неоднородных сред, а точность его зависит от точности соответствующих графических построений (или численных расчетов).

1. Переход от заданного закона $k = k(x)$ к зависимости $k = k(A)$. Прямая задача теории распространения волн сводится к определению поля ψ в неоднородной среде $k = k(x)$. Выбор зависимости $k = k(A)$ достаточно легко производится на основе закона $k = k(x)$, характеризующего заданную неоднородную среду. Действительно, рассмотрим основные соотношения, необходимые для решения задачи распространения волн и устанавливаемые последовательными функциональными связями между:



Фиг. 1

Этим значениям A , в свою очередь, соответствуют волновые числа $k = 0.45, 0.25, 0.45$. Таким образом, закон $k = k(x)$ соответствует (по характеру изменения вдоль оси x) функции $A = A(x)$.

При монотонном убывании зависимости $k(A)$ вдоль оси OA имеет место обратная картина, показанная на фиг. 1, б. Здесь уже минимумы кривой $k = k(x)$ отвечают максимумам кривой $A = A(x)$, а участки убывания (или возрастания) кривой $k = k(x)$ — участкам возрастания (или убывания) кривой $A = A(x)$. Следовательно, в этом случае характер зависимости $k = k(x)$ обратен функции $A = A(x)$.

При немонотонном изменении функции $k(A)$, например, при периодической зависимости, фазовая плоскость распадается на ряд независимых областей, для каждой из которых имеет место свое решение, соответствующее тому или иному закону изменения волнового числа $k = k(x)$. При этом внутри каждой независимой области функция $k(A)$ изменяется монотонно, следовательно, этот случай сводится, в зависимости от характера изменения функции $k(A)$, к первому или второму из только что рассмотренных вариантов связи законов $k = k(x)$ и $A = A(x)$.

(б) Связь между $A = A(x)$ и $F = F(A)$ вытекает из определения функции $F = dA/dx$, данного в работе [1]. Переход к кривой $F = F(A)$ производится путем дифференцирования $A(x)$, т. е. нахождения dA/dx , и введения зависимости $x = x(A)$, получен-

ной из кривой $A = A(x)$. Так, для широко применяемого в теории распространения радиоволн (для качественной оценки влияния ионосферы на радиосвязь) и в квантовой механике (при изучении просачивания волн материи через потенциальный барьер) симметричного слоя

$$A(x) = N - 4Me^{\gamma(x-c)} [1 + e^{\gamma(x-c)}]^{-2} \quad (1.1)$$

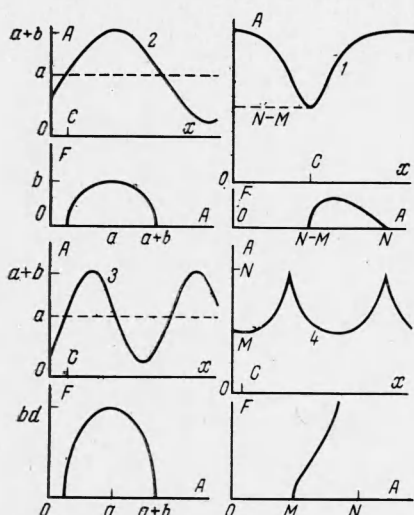
для которого

$$\frac{dA}{dx} = -4M\gamma e^{\gamma(x-c)} [1 - e^{\gamma(x-c)}] [1 + e^{\gamma(x-c)}]^{-3} \quad (1.2)$$

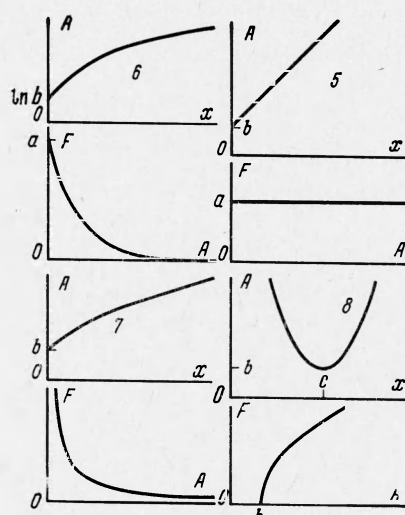
легко, определяя из (1.1) функцию $e^{\gamma(x-c)}$ и вводя ее в (1.2), получить

$$F(A) = \pm \gamma (N - A) [M^{-1} (M - N + A)]^{1/2} \quad (1.3)$$

Это приводит к симметричной (относительно оси OA) кривой (1.3), пересекающей ось OA в точках $A = N - M$ и $A = N$; в первой точке касательная параллельна оси OF (см. фиг. 2, 1).]



Фиг. 2



Фиг. 3

Нетрудно по аналогии найти функции $F = F(A)$ для зависимостей $A = A(x)$, даваемых формулами (1.4)–(1.10)

$$A(x) = a + b \sin(x - c), \quad F^2 = b^2 - (A - a)^2 \quad (1.4)$$

$$A(x) = a + b \sin d(x - c), \quad F^2 = (bd)^2 [1 - b^{-2} (A - a)^2] \quad (1.5)$$

$$\text{arc tg} [(N - A)(A - M)^{-1}]^{1/2} = [(A - M)(N - A)]^{1/2} - (x - c) \\ F^2 = (A - M)(N - A)^{-1} \quad (1.6)$$

$$A(x) = ax + b, \quad F = a \quad (1.7)$$

$$A(x) = (ax + b)^{1/2}, \quad F = 1/2 a A^{-1} \quad (1.8)$$

$$A(x) = \ln(ax + b), \quad F = a \exp(-A) \quad (1.9)$$

$$A(x) = a(x - c)^2 + b, \quad F^2 = 4a(A - b) \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что синусоида (1.4) с амплитудой b , построенная на плоскости Ax , приводит на фазовой плоскости FA к окружности радиуса b , расположенной симметрично относительно оси OA и сдвинутой на величину a относительно начала координат, а синусоида (1.5) с переменным периодом $(x - c) = 2\pi d^{-1}$ — к эллипсу. Периодической кривой типа «обратной циклоиды» на плоскости Ax соответствует кривая (1.6) на фазовой плоскости, имеющая вертикальную асимптоту в точке $A = N$, симметричная относительно оси OA и пересекающая ее в точке $A = M$ вертикально. Наклонная прямая (1.7) переходит на плоскости FA в параллельную оси OA прямую.

Рассмотренный в работе [1] закон (1.8) приводит к равносторонней гиперболы, логарифмическая кривая (1.9) — к экспоненциальной кривой, а парабола (1.10) — к симметричной относительно оси OA параболе, пересекающей ее в точке $A = b$. На фиг. 2 и 3 показаны соответствующие кривые (1.4)–(1.10).

(в) Связь между функциями $F = F(A)$ и $k = k(A)$ устанавливается дифференциальным уравнением (2.5) работы [1], поэтому для любой зависимости $k = k(A)$ нетрудно построить соответствующие кривые $F = F(A)$ на фазовой плоскости¹. Использование уравнения граничной траектории (3.2*) облегчает установление характера закона $k = k(x)$, так как форма фазовых траекторий, т. е. кривых $F = F(A)$, находится в определенном соответствии с формой граничной траектории, причем фазовые траектории пересекают ось OA фазовой плоскости вертикально, за исключением особых точек, в которых $\dot{f}_1 = k'(A) + 2k(A)A^{-1} = 0$. Лишь в некоторых частных задачах может встретиться случай, когда на фазовой плоскости имеет место несколько особых точек или они заполняют всю ось OA . Для построения кривых $F = F(A)$ в окрестностях особой точки требуется проведение дополнительного исследования или применение при построении не простого уравнения (3.2*) граничной траектории, а полного уравнения (2.5*).

В качестве примера рассмотрим зависимость $k(A) = A^{-m}$. В соответствии с (2.1*), (2.6*), (2.7*) и (2.8*) получим

$$p(A) = \frac{1-m}{A}, \quad \dot{f}_1 = \frac{2-m}{A^{m-1}}, \quad \dot{f}_2 = \frac{(2-m)(1-m)}{A^{3-m}},$$

$$\Phi = \frac{1}{A^m} - \left[\frac{1-m}{A^2} F^2 + \frac{1}{A^{2m}} \right]^{1/2}$$

Поэтому уравнение (2.5*) будет иметь вид

$$\frac{dF}{dA} = \frac{F}{A} \left[(1-m) + \frac{2-m}{1-G^{1/2}} G \right], \quad G = 1 + \frac{(1-m)F^2}{A^{2(1-m)}} \quad (1.11)$$

а уравнение граничной траектории (3.2*)

$$F = A^{1-m} (m-1)^{-1/2}$$

Особые точки имеют место при $m = 2$ (причем здесь $\dot{f}_1 = 0$ на всей оси OA). Этот случай подробно рассмотрен в [1], где показано, что граничная траектория на фазовой плоскости является равносторонней гиперболой. В остальных случаях (т. е. при $m > 2$) особых точек нет, так как функция \dot{f}_1 ни при каком значении A не обращается в нуль. Интегрируя (1.11), получим уравнение фазовых траекторий

$$F^2(A) = \frac{aA^{4(1-m)}(2A^m - aA^2)}{(1-m)(aA^{2-m} - 1)^2} \quad (1.12)$$

В частности, при $m = 3$ можно записать

$$F(A) = \frac{dA}{dx} = \pm \left[a \left(\frac{a}{2} - A \right) \right]^{1/2} \frac{1}{(a-A)A^2} \quad \left(0 \leq A \leq \frac{a}{2} \right) \quad (1.13)$$

При переходе от случая $m = 2$ к $m = 3$ граничные траектории, в отличие от фазовых, сохраняют свою форму. При $m > 2$, так как здесь $\dot{f}_1 \neq 0$, последние пересекают ось OA вертикально (см. кривую $F = F(A)$, построенную согласно (1.13) на фиг. 1, б). Соответствующую зависимость $A = A(x)$ найдем, представив (1.13) в виде

$$\pm A^2 (a-A) dA = [a(1/2a - A)]^{1/2} dx$$

и интегрируя

$$x - c = \pm 2 \frac{g}{\sqrt{a}} \left[\frac{1}{7} g^3 - \frac{1}{10} ag^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2} \right)^2 g + \left(\frac{a}{2} \right)^3 \right]$$

Здесь c — смещение кривой $A = A(x)$ вдоль оси x , а $g = 1/2a - A$. Если дифференциальное уравнение

$$kk'' - 2(k^*)^2 - AF^{-2}(A) k^3 k^* = 0 \quad (1.14)$$

полученное из уравнения (3.2*) для граничной траектории, в котором учтено выражение (2.1*), имеет точное решение, то зависимость $k = k(A)$, соответствующая фазовой траектории $F = F(A)$, определяется сразу. В самом деле, рассматривая слу-

¹ Все формулы работы [1], на которые даются ссылки в тексте, будут в дальнейшем снабжаться звездочкой, в отличие от формул настоящей статьи.

чай (б) (п. 1), получим для (1.10), что $F^2 = 4aA$ при $b = 0$, а (1.14) имеет вид

$$kk'' - 2(k')^2 - \frac{k^3}{4a} k' = 0 \quad (1.15)$$

Решение (1.15) дает уравнение, определяющее зависимость $k = k(A)$

$$(4ab)^{-1} \ln [bk^{-1}(A) + (4a)^{-1}] - k^{-1}(A) = B(A - D)$$

Здесь B и D — постоянные интегрирования.

На фиг. 1, a нанесена кривая $k = k(A)$, отвечающая выбранной зависимости (1.10) для $A = A(x)$, а также для уточненного закона $k = k(x)$. При построении принято: $a = 1/4$, $c = 2$, $D = 2$, $B = 1$.

Таким образом, чтобы определить, какую зависимость $k = k(A)$ надо выбрать для получения фазовой траектории $F = F(A)$ требуемого вида, следует использовать уравнение граничной траектории, интегрируя его (в тех случаях, когда это возможно) или строя при помощи его «прикидочные» граничные траектории. Фазовые траектории приближенно повторяют форму граничных траекторий, пересекая ось OA всюду вертикально, за исключением особых точек.

2. Основные результаты и анализ более сложных случаев задачи. При решении задачи распространения волн в среде с любым законом $k = k(x)$ следует прежде всего определить соответствующий этому закону вид фазовой траектории и выбрать такую зависимость $k = k(A)$, которая обеспечивала бы получение подобной траектории. После этого методом работы [1] осуществляются графические построения (или вычисления) для восстановления точного вида закона $k = k(x)$. Учитывая, что в практических приложениях обычно не встречается необходимость последовательного выполнения ряда прикидочных построений в процессе уточнения закона $k = k(x)$, на этом этапе одновременно производится и нахождение решения, т. е. определение функций $\psi = \psi(x)$, $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ для уточненного закона $k = k(x)$.

При анализе наиболее сложного варианта задачи распространения, т. е. осциллирующей зависимости $k = k(x)$, остановимся на случае (б) (п. 1), примеры (1.4), (1.5) и (1.6). Как следует из кривых фиг. 2, периодическим зависимостям $k = k(x)$ и $A = A(x)$ типа «обратной циклоиды» соответствуют фазовые траектории, имеющие вертикальную асимптоту при $F \rightarrow \infty$ и пересекающие ось OA вертикально. Периодическим зависимостям $k = k(x)$ и $A = A(x)$ типа синусоиды соответствуют замкнутые фазовые траектории типа эллипса, расположенные симметрично относительно оси OA и сдвинутые относительно начала координат по оси OA на величину a . Сдвиг a равен смещению кривой $A = A(x)$ на плоскости Ax в вертикальном направлении (над осью x). Величина полуоси эллипса, расположенного на фазовой плоскости вдоль OA , характеризует амплитуду колебаний кривой $A = A(x)$, тогда как полуось, параллельная OF , — периоды колебаний кривых $A = A(x)$ и $k = k(x)$. Смещение осциллирующей кривой $A = A(x)$ вдоль оси x , т. е. величина c , полностью определяется граничными условиями и совершенно произвольна для одной и той же фазовой траектории, так как является постоянной интегрирования при переходе от фазовой плоскости к плоскости Ax .

Лишь в окрестностях особых точек функции i_1 могут существовать замкнутые фазовые траектории, так как для этих точек не выполняется условие $dF/dA = \infty$. Поэтому для получения на фазовой плоскости замкнутых фазовых траекторий (например типа эллипса) существование особых точек является необходимым, но еще не достаточным условием. При необходимости решения задачи распространения в среде с осциллирующим законом изменения волнового числа необходимо, следовательно, выбрать такую зависимость $k = k(A)$, которая может обеспечить наличие хотя бы одной особой точки, и рассматривать в дальнейшем лишь окрестность этой точки.

Рассмотрим, в частности, случай

$$k(A) = b + \sin(A + a) \quad (2.1)$$

Согласно (2.1*), при этом имеем

$$p(A) = \frac{2}{k} \frac{dk}{dA} - \left(\frac{dk}{dA} \right)^{-1} \frac{d^2k}{dA^2} = \frac{2 + \sin(A + a) [b - \sin(A + a)]}{[b + \sin(A + a)] \cos(A + a)} \quad (2.2)$$

Вводя (2.2) в уравнение граничной траектории (3.2*), получим

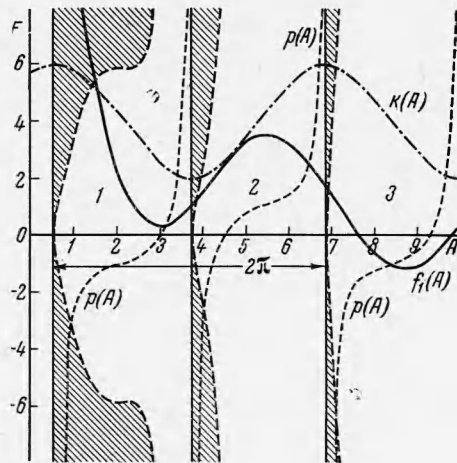
$$F(A) = k \left(- \frac{A}{p} \right)^{1/2} = \frac{\{[\sin(A + a) + b]^3 A \cos(A + a)\}^{1/2}}{\{[\sin(A + a) - b] \sin(A + a) - 2\}^{1/2}}$$

Поле направлений, построенное на фазовой плоскости AF , распадается на ряд областей, каждая из которых характеризуется своей граничной траекторией и может анализироваться независимо от всех остальных областей.

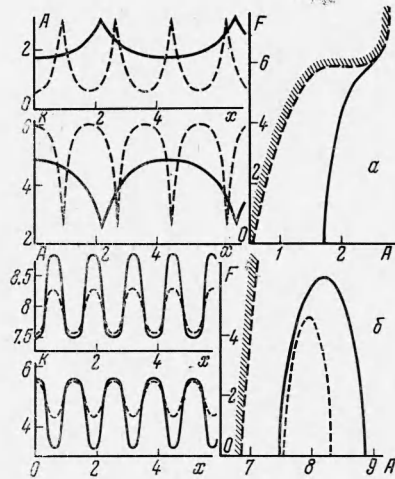
Конкретизируя зависимость (2.1), т. е. выбирая, например

$$k(A) = 2 [2 + \sin(A + 1)] \quad (2.3)$$

отметим штриховкой те участки фазовой плоскости фиг. 4, которые соответствуют нераспространяющимся волнам. Между заштрихованными участками расположены распространяющиеся области, соответствующие распространяющимся волнам, выделенные граничными траекториями. Исходная зависимость $k = k(A)$ нанесена штрих-пунктирной линией. Кривые $p = p(A)$ и $f_1 = f_1(A)$ приведены частым пунктиром и сплошной линией соответственно.



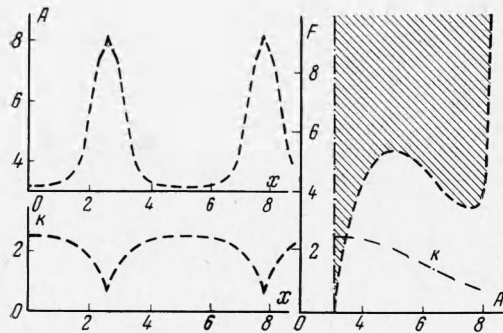
Фиг. 4



Фиг. 5

В качестве примера проведем анализ задачи для областей 1 и 3 фазовой плоскости. Область 1 простирается по оси OA от $A_{11} = 0.57$, где $k = k(A)$ имеет максимум, до $A_{12} = 3$, где кривая $p = p(A)$ пересекает горизонтальную ось (т. е. $p = 0$). Область 3 простирается от $A_{31} = 6.85$, сдвинутой по оси OA относительно A_{11} на величину 2π , до $A_{32} = 9.3$, где опять-таки $p = 0$.

1. На фиг. 5, а представлена область 1 фазовой плоскости фиг. 4. Нанесем на ней одну из фазовых траекторий $F = F(A)$ и построим слева зависимости $A = A(x)$ и $k = k(x)$ сплошными линиями. Здесь же пунктиром показаны эти зависимости, отвечающие граничной траектории, нанесенной редким пунктиром. Подчеркнем, что все построения произведены при произвольных граничных условиях, а смещение кривой $k = k(x)$ на произвольную величину вдоль оси x влечет за собой такое же смещение и кривой $A = A(x)$.



Фиг. 6

2. В правой части фиг. 5, б показана область 3 фазовой плоскости фиг. 4. Ограничиваясь построением на ней лишь двух фазовых траекторий, достаточно, учитывая отмеченную выше симметрию фазовых траекторий относительно оси OA , нанести лишь их верхние половины. Центры траекторий, проведенных сплошной и пунктирной линиями, совпадают с особой точкой ($A = 7.65$), однако траектории несколько смещены

вдоль оси OA , а их форма близка к эллипсоидальной. Как и ранее (область 1), зависимости $A = A(x)$ и $k = k(x)$ для обеих фазовых траекторий построены на отдельных графиках в левой части фиг. 5, б.

Аналогичные построения для другого частного случая формулы (2.1)

$$k(A) = 1.5 + \sin 0.5 A \quad (2.4)$$

представлены на фиг. 6. Граничная траектория нанесена пунктиром на фазовую

плоскость в правой части фигуры, а зависимости $A = A(x)$ и $k = k(x)$ — в ее левой части. Кривая $k = k(A)$ показана штрих-пунктиром.

Уже из рассмотренных примеров ясно, что одна и та же зависимость $k = k(A)$ может обеспечить решение задачи распространения волн для ряда различных типов неоднородных сред. Поэтому зависимость $k = k(A)$ можно в рассматриваемом асимптотическом методе считать узловой.

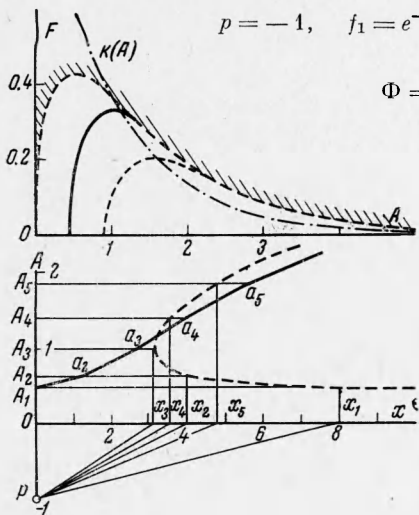
3. Пример решения задачи распространения волн. Рассмотрим среду, характеризуемую узловой зависимостью

$$k(A) = \exp(-A) \tag{3.1}$$

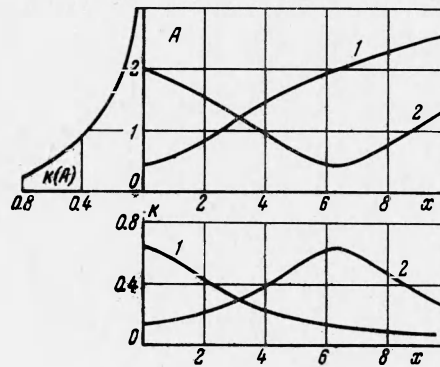
показанной на фиг. 7 штрих-пунктиром. Для построения фазовых и граничной траекторий по формулам (2.5*) и (3.2*) следует, как и ранее случай (в) (п. 1), вычислить, прежде всего, по формулам (2.1*), (2.6*), (2.7*) и (2.8*) функции

$$p = -1, \quad f_1 = e^{-A} \left(\frac{2}{A} - 1 \right), \quad f_2 = \frac{e^A}{A} \left(1 - \frac{3}{2A} \right),$$

$$\Phi = e^{-A} \left[1 - \left(1 - \frac{e^{2A} F^2}{A} \right)^{1/2} \right] \tag{3.2}$$



Фиг. 7



Фиг. 8

С учетом (3.2) уравнение (2.5*), определяющее угол θ наклона касательной к кривой $F = F(A)$, в любой точке фазовой плоскости, приобретает вид

$$\operatorname{tg} \theta = F \left\{ -1 + \left[\frac{2}{A} - 1 + \frac{1}{A} \left(1 - \frac{3}{2A} \right) e^{2A} F^2 \right] \left[1 - \left(1 - \frac{1}{A} e^{2A} F^2 \right)^{1/2} \right]^{-1} \right\} \tag{3.3}$$

а уравнение граничной траектории будет

$$F(A) = k(-pA^{-1})^{-1/2} = A^{1/2} e^{-A} \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что граничная траектория имеет горизонтальную касательную в точке фазовой плоскости $A = 0.5$. Она нанесена на фиг. 7 пунктиром. Область, соответствующая нераспространяющимся волнам, заштрихована. В соответствии с (3.3*), все фазовые траектории будут иметь горизонтальные касательные в точках фазовой плоскости, определяемых уравнением

$$F^2 = \frac{A}{(1 - 3/2 A^{-1}) e^{2A}} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{A} \right) - \frac{1 - [8A^{-1} - 3(1 + A^2)]^{1/2}}{2(1 - 3/2 A^{-1})} \right\} \tag{3.5}$$

На фиг. 7 представлено семейство фазовых траекторий, построенное при помощи (3.3) и (3.5) в незаштрихованной области фазовой плоскости.

Выбирая для определенности одну из фазовых траекторий, например нанесенную сплошной линией, следует восстановить функциональную зависимость $A = A(x)$, закон $k = k(x)$ и поле $\psi = \psi(x)$. Графические построения сводятся к переносу (в два этапа) кривой из фазовой плоскости на плоскость Ax фиг. 7. Сначала кривая преобразуется из системы координат AF в систему координат Ax' , где (так как $x' = dA/dx = F^{-1}$) кривая $F = F(A)$ переходит в кривую $x' = x'(A)$. Для переноса

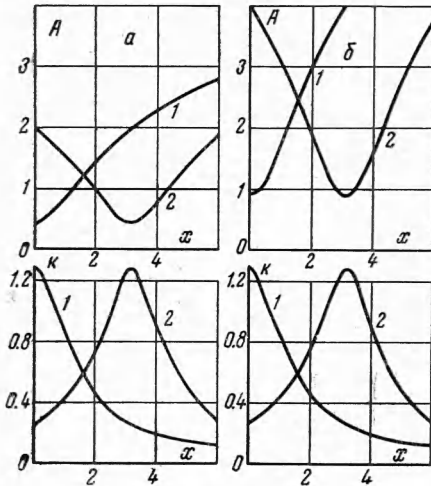
полученной кривой, которая показана на промежуточной плоскости Ax редким пунктиром, на плоскость Ax , ее необходимо проинтегрировать по переменной A , т. е., оставив ось OA неизменной, перейти, в соответствии с правилами графического интегрирования, от оси x к оси A .

Соответствующие построения приведены на фиг. 7. Так как интегрирование производится при произвольных начальных условиях, кроме полученной кривой $x = x(A)$, которая одновременно является и графиком зависимости $A = A(x)$, возможно построение и ряда других кривых, отличающихся друг от друга лишь величиной сдвига вдоль оси x . Две кривые $A = A(x)$ (1 и 2) на фиг. 8, сдвинутые одна относительно другой по оси x , представлены в первом квадранте, а узловая зависимость $k = k(A)$ нанесена во втором. Искомая зависимость $k = k(x)$ построена для кривых 1 и 2 описанным выше способом в четвертом квадранте.

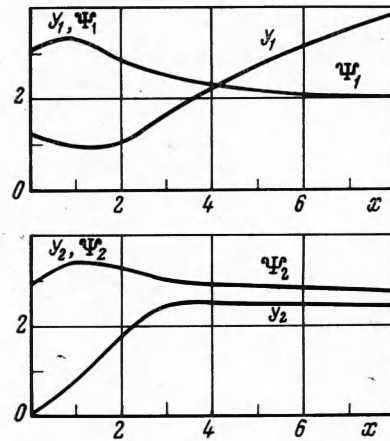
Для более сложных неоднородных сред, например когда узловая зависимость имеет вид

$$k(A) = b e^{aA} \quad (3.6)$$

можно воспользоваться результатами, полученными при решении простой задачи (3.1). Действительно, зависимость (3.1) может быть записана так: $k(A) = b e^{aA}$, где коэффициенты $a = -1$, $b = 1$. Поэтому при построении графика $A = A(x)$, если принять, например, $a = -1$, $b = 2$, то, в соответствии с рекомендациями раздела 3, п. (г) работы [1], при этом достаточно лишь несколько трансформировать полученные для (3.1) графики. Необходимо сжать кривые первого квадранта фиг. 8 по горизонтальной оси в два раза, сохранив ранее полученные значения по вертикальной оси. Следовательно, при построении в четвертом квадранте закона $k = k(x)$ необходимо в два раза сжать соответствующие кривые по горизонтальной оси и расширить их также в два раза по вертикальной оси. Полученные в результате указанной трансформации графики 1 и 2 для зависимостей $A = A(x)$ и $k = k(x)$, показаны на фиг. 9, а.



Фиг. 9



Фиг. 10

Аналогичным образом, если узловая зависимость выбрана в виде

$$k(A) = 2e^{-0.5A} \quad (3.7)$$

т. е. если $a = -0.5$, $b = 2$, необходимо графики $A = A(x)$ и $k = k(x)$ фиг. 8 сжать по горизонтальной оси и расширить по вертикальной (в два раза). Кривые, полученные в результате этой трансформации масштабов по осям координат, представлены на фиг. 9, б.

Переходя к построению полного поля $\psi(x)$ в неоднородной среде, следует определить частное решение $Y_1 \exp i\Psi_1$ уравнения (0.1*), соответствующее узловой зависимости (3.1). Для этого на плоскости $AO\psi$ наносится график $\psi = \psi(A)$, найденный интегрированием кривой $\psi' = d\psi(A)/dA$, построенной в соответствии с (2.9*)

$$\psi' = \left\{ \frac{p(A)}{A} + \left[\frac{k(A)}{F(A)} \right]^2 \right\}^{1/2} = \left[\frac{1}{(Fe^A)^2} - \frac{1}{A} \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

Начальные условия учитываются выбором в (1.1*) постоянных интегрирования C_1 и C_2 , а по формулам (2.11*) вычисляются параметры

$$M(A) = \left[\frac{1}{(Fe^A)^2} - \frac{1}{A} \right]^{1/2} - \frac{1}{Fe^A}, \quad N(A) = \frac{1}{A} - 1$$

Далее при помощи (2.12*) производится после замены $A \rightarrow x$, выполненной на фиг. 10, определение функций $Y_1 = Y_1(x)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(x)$.

Полное поле в рассмотренной неоднородной среде (3.1) описывается формулой (1.1*) и включает, кроме $Y_1(x)$ и $\Psi_1(x)$, еще и функции $Y_2(x)$ и $\Psi_2(x)$. Нахождение последних осуществляется путем построения при помощи (2.14*) графиков, отражающих зависимости $R_1 = R_1(A)$ и $R_2 = R_2(A)$, с последующим интегрированием этих графиков по A и определения функций $J_1(A)$ и $J_2(A)$. Вычисленные по формулам (2.13*) искомые функции $Y_2 = Y_2(A)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(A)$ нанесены после замены переменной $A \rightarrow x$ на фиг. 10.

Таким образом, решение задачи (3.1) дается графиками $Y_1 = Y_1(x)$, $\Psi_1 = \Psi_1(x)$, $Y_2 = Y_2(x)$ и $\Psi_2 = \Psi_2(x)$, представленными на фиг. 10, которые описывают общее решение уравнения (0.1*)

$$\psi(x) = Y_1 e^{i\Psi_1} [C_1 + C_2 Y_2 e^{-i\Psi_2}]$$

являющееся полным полем в неоднородной среде $k = k(x)$, характеризуемой кривой I фиг. 8.

Как показано в работе [1], решение задачи распространения волн предложенным асимптотическим методом может производиться и чисто аналитическим способом. При этом необходимые преобразования (замена переменной и интегрирование) выполняются не графическим путем, а численно, при помощи вычислительной машины. Применение в настоящей статье графического построения продиктовано лишь желанием несколько увеличить наглядность изложения особенностей этого метода решения.

В заключение следует отметить следующие обстоятельства.

1. В процессе решения задачи предложенным асимптотическим методом не вводятся никаких допущений, а также не используются какие-либо предположения, упрощающие решение, применяемые, например, в методах коротковолнового или длинноволнового приближений. Точность метода снижается лишь за счет погрешностей, вводимых при выполнении промежуточных преобразований. Таким образом, решение задачи распространения волн в произвольной неоднородной среде может быть произведено асимптотическим методом с любой наперед заданной точностью, причем не только для поля $\psi(x)$, но и для парциальных волн $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ поля [4] и для внутреннего коэффициента отражения $R(x) = \beta(x)\alpha^{-1}(x)$.

2. Сказанным объясняется некоторая громоздкость метода, являющегося фактически точным численным методом. Поэтому естественно, что при решении задачи распространения в простых неоднородных средах этот метод более трудоемок, чем ряд других частных методов, эффективных для того или иного класса неоднородных сред (слабонеоднородных, мелкослойных с синусоидальной зависимостью волнового числа от координаты и пр.). Однако при переходе к более сложным средам, характеризуемым, например, осциллирующим изменением волнового числа вдоль координаты (в том числе — и переменные по амплитуде или периоду колебаний), выявляются его преимущества перед известными.

3. В силу отмеченной общности асимптотического метода целесообразно его применение при нахождении решения для таких неоднородных сред $k = k(x)$, для которых решение известными методами неизвестно. Единообразие всех трех последовательных этапов решения [1], независимо от вида среды, позволяет ограничиться одной и той же программой при решении задачи распространения для различных классов сложных неоднородных сред на цифровых вычислительных машинах, а также упрощает разработку соответствующей аналоговой машины.

Поступила 25 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у д а г я н И. Ф., М и р о в и ц к и й Д. И. Применение к задаче распространения волн асимптотических методов теории нелинейных колебаний. ПМТФ, 1966, № 1, стр. 93.
2. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1963.
3. R e n s u k u I s u i. The non-linear theory of electric generators. Rept. Radio res. Japan, 1935, vol. 5, No 2.
4. М и р о в и ц к и й Д. И. Распространение звука в неоднородной среде и внутренние условия. Акуст. ж., 1964, т. 1, № 10, стр. 88.