

УДК 533.1, 612.2

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ БРОНХИАЛЬНОГО ДЕРЕВА ЧЕЛОВЕКА — МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В НОРМЕ И ПРИ ПАТОЛОГИИ

А. Е. Медведев, В. М. Фомин, П. С. Гафурова

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
E-mails: medvedev@itam.nsc.ru, fomin@itam.nsc.ru, polina_g96@mail.ru

Проведено математическое моделирование течения воздуха в бронхиальном дереве человека в норме и при патологии. Приведены аналитические формулы для построения полного бронхиального дерева. Все поверхности бронхиального дерева состыковываются со вторым порядком гладкости (не имеют острых углов и ребер). Геометрические характеристики бронхиального дерева человека при патологии моделируются звездчатой формой внутреннего строения бронха, патология задается двумя параметрами: степенью сужения бронха и степенью искажения цилиндрической формы бронхов. Предложена численная методика поэтапного расчета движения воздуха в бронхиальном дереве человека. Проведены расчеты ламинарного течения воздуха в бронхиальном дереве человека (от входного бронха до альвеол). Показано, что при ламинарном течении воздуха в бронхах падение давления в два раза меньше, чем при турбулентном течении. Искажение цилиндрической формы бронхов при патологии приводит к увеличению падения давления в бронхиальном дереве.

Ключевые слова: бронхиальное дерево человека, бифуркация, математическая модель, ламинарное течение, сечение бронха.

DOI: 10.15372/PMTF20200101

Введение. Дыхательная система человека состоит из верхних (нос, носоглотка, гортань) и нижних (трахея, бронхиальное дерево и альвеолы) дыхательных путей и имеет сложную структуру. Бронхиальное дерево от трахеи до альвеол насчитывает 24 ветвления (бифуркации). Сечения отдельных бронхов не являются, вообще говоря, окружностями. При патологии (например, астме) происходит сужение бронхов и изменение формы их проходного сечения.

Одной из основных проблем, возникающих при моделировании бронхиального дерева, является адекватное описание его геометрии. Для компьютерного моделирования течения воздуха в бронхиальном дереве человека необходимо построить трехмерную модель бронхов с бифуркациями. Качество построенного бронхиального дерева влияет на точность

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и субъекта РФ (Новосибирская область) в рамках научного проекта № 19-41-540003 р-а.

© Медведев А. Е., Фомин В. М., Гафурова П. С., 2020

и скорость вычисления. Наличие ребер и негладкая стыковка бифуркаций и бронхов в модели приводят к турбулизации потока воздуха в расчетах. В итоге увеличивается сопротивление при прохождении воздуха через бронхиальное дерево, что оказывает влияние на корректность результатов.

Второй проблемой, возникающей при компьютерном моделировании легких, является увеличение в геометрической прогрессии количества бронхов: бронхиальное дерево начинается с одной трахеи и заканчивается приблизительно 2^{23} альвеолами, при этом размер бронхов уменьшается приблизительно в 240 раз.

Третья проблема, появляющаяся при моделировании легких человека, состоит в том, что при патологии происходит сужение поперечного сечения бронхов. Если в норме форма поперечного сечения бронхов близка к окружности, то при патологии площадь поперечного сечения уменьшается и оно принимает звездообразную форму.

Большинство работ, посвященных построению бронхиального дерева, основаны на модели [1], в которой описаны основные геометрические параметры бронхиального дерева человека. В работах [2, 3] изучалось течение в крупной бифуркации и построена аналитическая модель бифуркации. Внешний вид такой бифуркации существенно отличается от анатомического строения бифуркаций бронхиального дерева. В бифуркации бронхи входят под острым углом, образуя острые грани, что не соответствует гладким обводам реальных бронхов [2, 3].

Подробное математическое описание геометрии бифуркаций дыхательных путей приведено в работе [4]. Эта модель основана на физиологически реалистичной геометрии бифуркации бронхиального дерева [5]. Предложенный в [4] и развитый в работе [5] алгоритмический метод построения гладкого бифуркационного узла и на его основе бронхиального дерева ориентирован на конкретную компьютерную программу построения трехмерных объектов (препроцессор GAMBIT для программы Fluent и для программы компьютерного моделирования UNIGRAPHICS).

На основе статистической обработки томографических данных в работе [6] создана модель бронхиального дерева человека. Полученный граф бронхиального дерева содержит топологические сведения о пространственных координатах, связности, диаметрах и узлах ветвления 1453 бронхов вплоть до 17-й бифуркации.

В работе [7] приведен алгоритм описания бронхов как симметричных, так и асимметричных деревьев с использованием иерархических систем упорядочения, представлены некоторые математические свойства ветвящихся деревьев.

В работах [8, 9] предложены алгоритмические методы построения трехмерной модели бронхиального дерева человека. Для численной реализации этих алгоритмов построения бронхиального дерева и расчета течения в нем потребуется сетка, содержащая порядка 1012 элементов. Это не реализуемо на вычислительных машинах текущей вычислительной архитектуры.

Несмотря на трудоемкость и сложность, проводились расчеты течения воздуха в бронхиальном дереве человека с достаточно большим количеством ветвлений. В работе [10] на основе анатомической диаграммы [6] построено несимметричное бронхиальное дерево до 17-й генерации. Проведено численное исследование течения воздуха в этом дереве. Вычислительное моделирование выполнено с использованием пакета ANSYS Fluent. Вычислительная модель бронхиального дерева содержала 1453 бронха, вычислительная сетка включала $6,744 \cdot 10^6$ неструктурированных четырехгранных элементов. Воздух полагался вязкой несжимаемой жидкостью. Расход воздуха составлял 28,3 л/мин и вычисления проводились в рамках турбулентной модели течения. Время проведения расчета на вычислительных машинах суперкомпьютерного центра составляло 50 ч.

В работе [11] представлена новая методология вычислительного моделирования воздушного потока в бронхиальном дереве человека. Новый подход обеспечивает детальное разрешение течения с помощью трехмерного численного моделирования уравнений Навье — Стокса без необходимости полного разрешения геометрии всех ветвей бронхиального дерева. Метод основан на предположении о конечном числе ветвей бронхиального дерева, каждая из которых полностью разрешена, чтобы обеспечить подробное описание всего сложного мелкомасштабного потокового поля. Метод включает три этапа: 1) статистическое описание геометрии и ветвления бронхов; 2) выбор набора элементов бронхиального дерева, которые должны быть включены в вычислительное моделирование течения; 3) применение физически реалистичных граничных условий к входным и выходным бронхам. По мнению авторов работы [11], данная методика позволяет на порядок уменьшить вычислительные затраты с сохранением хорошего согласования с полностью разрешенной геометрией. Было просчитано бронхиальное дерево с 16 бифуркациями.

Для уменьшения вычислительных затрат разрабатываются методы симметричного усечения бронхиального дерева [12–14]. В соответствии с моделью [1] разработана численная модель бронхиального дерева от трахеи до 16-го уровня бронхиол. Приведен алгоритм построения отдельной бифуркации в коммерческом пакете ANSYS Fluent. При расчете течения воздуха в симметричном бронхиальном дереве использовался итерационный метод для обрезания симметричных ветвей бронхов. Для этого требовалось до 1000 итераций и не доказана сходимости такого итерационного процесса. Тем не менее в [12–14] проведены расчеты течения воздуха в бронхиальном дереве до 16-й генерации.

Целью настоящего исследования является разработка аналитической модели бронхиального дерева, которая позволяет эффективно описывать воздушный поток в нем в норме и при патологии от входного бронха до альвеол. Аналитическая модель бифуркации позволяет с помощью конечных формул построить полное бронхиальное дерево человека с 0-й до 23-й бифуркации включительно. С использованием аналитических формул можно моделировать патологии легочной системы, вызванные звездообразным сужением бронхов. Аналитические формулы позволяют отказаться от ручной работы по построению каждой бифуркации в программах трехмерного моделирования, их состыковке и сглаживанию (особенно сложной является процедура построения вручную бифуркации при патологии). Разработана методика поэтапного расчета ламинарного течения в бронхиальном дереве, когда каждая бифуркация рассчитывается отдельно и данные с предыдущей бифуркации передаются на последующую. Это существенно упрощает расчет всего бронхиального дерева человека от 0-й до 23-й бифуркации. Для отдельной бифуркации нетрудно построить расчетную сетку и провести расчет с любой требуемой точностью.

1. Гистологическое строение бронхов. Внутреннее сечение бронхов даже в норме отличается от кругового. На рис. 1 приведены микрофотографии поперечного сечения бронхов. Внутреннее сечение имеет звездообразную форму, которая образуется клетками эпителия. Под эпителием находятся волокна мышечных клеток. Внешняя форма бронхов поддерживается хрящевыми пластинами (замкнутыми для крупных бронхов и не замкнутыми для мелких). Сокращение мышечных волокон приводит к сужению внутреннего сечения бронхов, например при приступе астмы.

При построении модели бронхиального дерева необходимо учитывать реальное (или близкое к реальному внутреннее строение бронхов), так как внутренняя форма бронха существенно влияет на параметры течения.

2. Параметры бронхиального дерева. Бронхиальное дерево человека имеет сложную структуру и состоит из бронхов и соединяющих их бифуркаций (ветвлений, когда входящий бронх разветвляется на два исходящих бронха). Согласно [1] бронхиальное дерево человека имеет 24 генерации бифуркаций. Параметр n бифуркации (или генерации

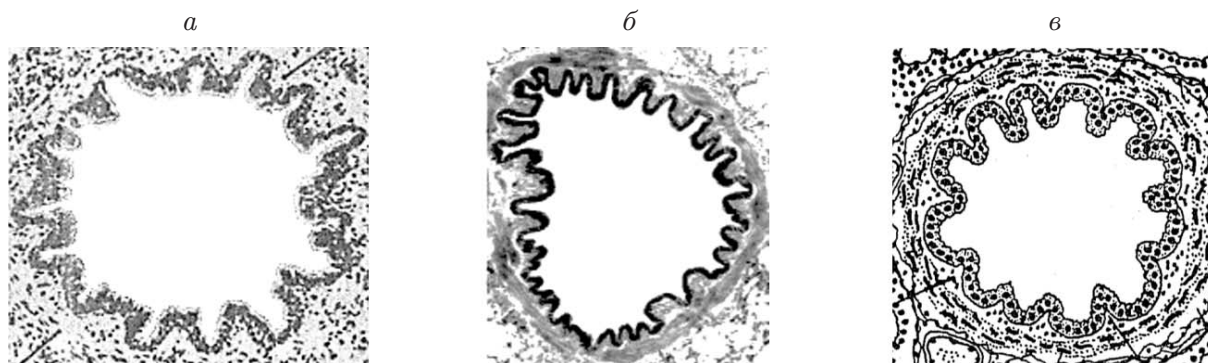


Рис. 1. Микрофотографии сечений бронхов:
a — крупная бронхиола в легком ребенка [15], *б* — бронхиола взрослого человека [16],
в — малый бронх кошки [17]

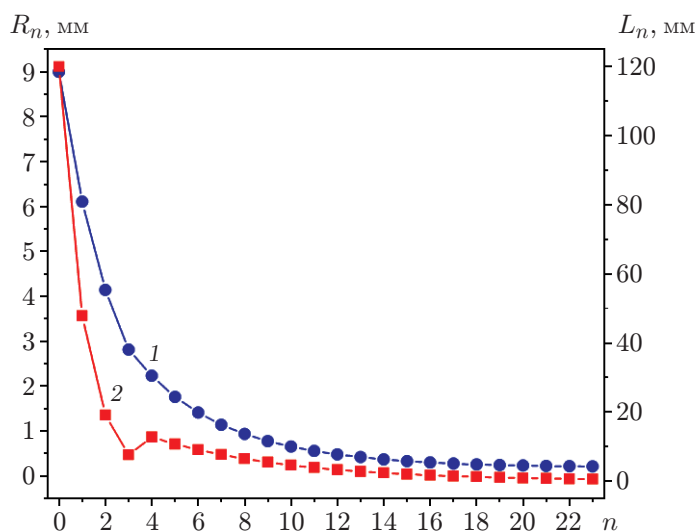


Рис. 2. Зависимости радиуса R_n (1) и длины L_n (2) бронхов от номера бифуркации n для симметричной модели бронхиального дерева, построенные по формулам (1), (2)

бронхиального дерева) меняется от 0 до 23. Рассмотрим одну из наиболее простых моделей бронхиального дерева человека — модель симметричной дихотомии (модель симметричного бронхиального дерева [1]). Параметры этой модели задаются следующими формулами [12]:

— радиус входящего бронха

$$R_n = \begin{cases} 9e^{-0,388n}, & n \leq 3, \\ 6,5e^{-(0,2929-0,00624n)n}, & n > 3; \end{cases} \quad (1)$$

— длина входящего бронха

$$L_n = \begin{cases} 120e^{-0,92n}, & n \leq 3, \\ 25e^{-0,17n}, & n > 3. \end{cases} \quad (2)$$

Графики функций (1), (2) приведены на рис. 2.

Параметры среды и течения имели следующие значения: плотность воздуха $\rho = 1,23 \text{ кг/м}^3$, динамическая вязкость $\mu = 1,79 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Расход воздуха для взрослого чело-

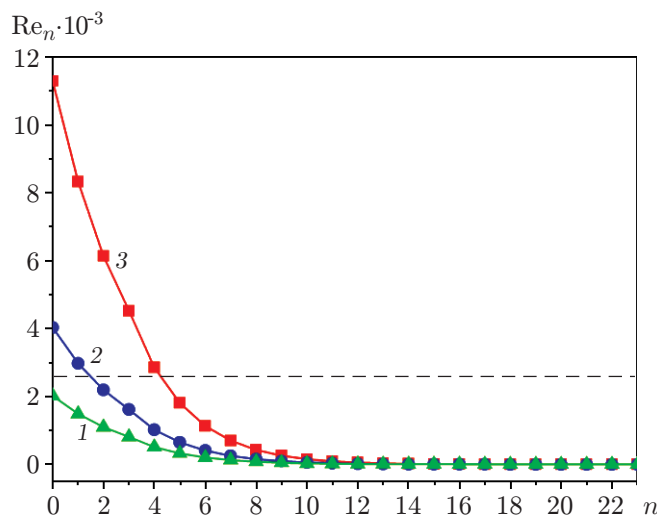


Рис. 3. Зависимость числа Рейнольдса Re_n от номера бифуркации при различных значениях расхода воздуха:
 1 — $Q = 25$ л/мин, 2 — $Q = 50$ л/мин, 3 — $Q = 140$ л/мин; штриховая линия — критическое число Рейнольдса для круглой трубы ($Re = 2300$)

века в состоянии покоя составляет $Q = 5$ л/мин и увеличивается до 140 л/мин при беге на средние дистанции. Максимальное падение давления в легких человека составляет $\Delta p \approx 35$ мм вод. ст. ≈ 343 Па [18–20]. Таким образом, максимальный перепад давления в легких человека составляет 0,338 % атмосферного давления. Число Рейнольдса потока воздуха в бронхе n -й генерации рассчитывается по формуле

$$Re_n = \frac{2\rho U_n R_n}{\mu} = \frac{\rho Q}{2^{n-1} \pi \mu R_n}, \tag{3}$$

где $U_n = Q / (2^n \pi R_n^2)$ — средняя скорость на выходе из n -го бронха. Рассчитанные значения числа Рейнольдса приведены на рис. 3. Для круглой трубы с гладкими стенками критическое значение числа Рейнольдса равно 2300. На рис. 3 видно, что значения числа Рейнольдса превышают критические только для нескольких крупных бронхов при больших расходах, т. е. течение является ламинарным во всем бронхиальном дереве, за исключением нескольких крупных бронхов при больших расходах воздуха. Течение в бронхиальном дереве человека в спокойном состоянии является ламинарным согласно критерию критического числа Рейнольдса.

Турбулентное и ламинарное течения в трубе создают различное сопротивление, которое рассчитывается по формулам (для турбулентного течения используется формула Блазиуса)

$$\lambda_{lam} = 64 / Re, \quad \lambda_{turb} = 0,3164 / Re^{0,25}.$$

Перепад давления в трубе при турбулентном течении больше перепада при ламинарном течении (в случае одинакового расхода)

$$\frac{\Delta p_{turb}}{\Delta p_{lam}} = \frac{\lambda_{turb}}{\lambda_{lam}}.$$

Для критического числа Рейнольдса отношение перепадов давления равно 1,64. Таким образом, при турбулентном режиме течения требуется больший перепад давления для

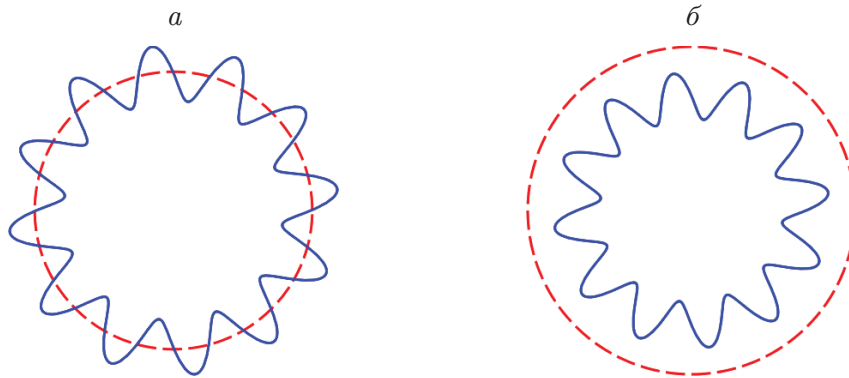


Рис. 4. Формы звездообразного и кругового внутренних сечений бронхов, рассчитанные по формулам (4)–(6):

a — одинаковые площади сечений, b — различные площади сечений

обеспечения такого же, как в случае ламинарного течения, расхода воздуха в легких. Очевидно, что в процессе эволюции человеческий организм выработал схему строения бронхиального дерева, обеспечивающую ламинарный поток воздуха в бронхах.

3. Моделирование формы бронха в норме и при патологии. Функцию, описывающую форму поперечного сечения бронхов в норме и при обструктивных заболеваниях легких, запишем в виде

$$f(\varphi) = [C - s_{ob} \sin^2(n_{ed}\varphi/2)]\sqrt{A_{bronch}}, \quad (4)$$

где $0 < A_{bronch} \leq 1$ — степень уменьшения площади поперечного сечения обструктивного бронха по отношению к площади здорового бронха; $0 < s_{ob} \leq 1$ — относительная высота лучей “звездочки” внутреннего сечения бронха; $n_{ed} = 4i_{ed}$ ($i_{ed} \geq 0$) — количество лучей “звездочки” внутреннего сечения бронха. Количество лучей “звездочки” должно быть кратно четырем, для того чтобы (как показано ниже) при повороте на угол $\pi/2$ соседние бронхи состыковывались друг с другом. Параметр C выбирается из условия сохранения площади поперечного сечения бронха при изменении значений параметров s_{ob} и n_{ed} :

$$C = \frac{s_{ob}[2\pi n_{ed} - \sin(2\pi n_{ed})] + \sqrt{\Delta}}{4\pi n_{ed}} \quad (5)$$

$$(\Delta = 2\pi n_{ed} s_{ob}^2 \sin(2\pi n_{ed}) \sin^2(\pi n_{ed}) + 2\pi^2 n_{ed}^2 (8 - s_{ob}^2) - s_{ob}^2 (1 - \pi n_{ed}) \sin(2\pi n_{ed})).$$

Уравнение поперечного сечения бронха с обструктивным сужением (4) имеет вид

$$X_n^B(\varphi) = R_n \cos(\varphi) f(\varphi), \quad Y_n^B(\varphi) = R_n \sin(\varphi) f(\varphi), \quad (6)$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$; R_n — радиус бронха (1) n -й генерации.

На рис. 4 показаны формы звездообразного и кругового внутренних сечений бронхов. На рис. 4, a круглый и звездообразный бронхи имеют одинаковую площадь поперечного сечения, на рис. 4, b площадь звездообразного бронха меньше площади круглого.

4. Перепад давления в зависимости от формы трубы. Внутренняя форма бронха оказывает существенное влияние на параметры течения. Рассмотрим ламинарное течение в трубках, имеющих одинаковую длину и одинаковую площадь поперечного сечения, но с различной формой поперечного сечения (см. таблицу). Определим необходимый перепад давления ΔP , который обеспечивает одинаковый расход для трубок с различным поперечным сечением (L_{per} — периметр поперечного сечения трубки). В трубках с квадратным, треугольным и эллиптическим сечениями перепад давления находится аналитически по

Зависимость перепада давления от формы поперечного сечения бронха

Форма поперечного сечения бронха	ΔP	L_{per}
Круглая	1,000	1,000
Квадратная	1,132	1,128
Треугольная	1,378	1,286
Эллиптическая	1,250	1,118
Звездообразная с числом лучей $n_{ed} = 8$	1,137	1,143
Звездообразная с числом лучей $n_{ed} = 16$	1,251	1,476

формулам течения Пуазейля [21]. Для трубки со звездообразным сечением решение (4) найдено численно. У эллипсообразного сечения большая полуось в два раза больше малой полуоси, у звездообразного с числом лучей $n_{ed} = 8$ высота $s_{ob} = 0,2$, у звездообразного с числом лучей $n_{ed} = 16$ высота $s_{ob} = 0,2$.

Из таблицы следует, что для трубок звездообразной формы сопротивление ламинарного течения жидкости увеличивается на 25 % по сравнению с сопротивлением в гладкой трубке.

5. Аналитическое построение формы бифуркации. Основная сложность при построении бифуркационного узла бронхиального дерева заключается в корректном описании каринального округления расходящихся бронхов. Качество построения каринального округления влияет на качество построения расчетной сетки и в итоге на точность решения. Неалгоритмическое построение каринального округления (например, простое сглаживание острых ребер) требует большого объема ручной работы при построении разветвленного бронхиального дерева.

Для построения полного бронхиального дерева человека аналитическим путем конструируем отдельную бифуркацию. Затем, меняя номер бифуркации, получаем весь набор бронхов. Положения бронха в бронхиальном дереве также задаются аналитически путем преобразования координат согласно положению бронха в дереве.

Конструировать отдельную бифуркацию будем с помощью торов [14]. Отдельная n -я бифуркация бронхиального дерева строится из частей двух торов и трехмерных двухпараметрических поверхностей, гладко соединяющих эти торы. Значение угла разворота бронхов χ_n в модели бронхиального дерева [1] (формулы (1), (2)) не регламентируется, поэтому, как и в работе [12], примем величину угла постоянной и равной $\chi_n = 35^\circ$.

Геометрию тора с расстоянием от центра образующей окружности до оси вращения R и с радиусом образующей окружности r зададим параметрически в виде

$$\begin{aligned} X(\varphi, \chi, R, r) &= [R + rf(\varphi) \cos \varphi] \cos \chi, & Y(\varphi, r) &= rf(\varphi) \sin \varphi, \\ Z(\varphi, \chi, R, r) &= [R + rf(\varphi) \cos \varphi] \sin \chi, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$; $\chi \in [-\pi, \pi]$; $f(\varphi)$ — функция формы поперечного сечения бронха (3).

Для построения тора (7) с переменным радиусом окружности R используем уравнение кривой, соединяющей точки $(R_0, 0)$ и (R_1, χ_n) со вторым порядком гладкости:

$$R_n^M(\chi, R_0, R_1) = \frac{R_0 - R_1}{2} \sin \left(\pi \left(\frac{\chi}{\chi_n} + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{R_0 + R_1}{2}. \tag{8}$$

На рис. 5 показаны общий вид и проекция правой части бифуркационного узла ($x > 0$) на плоскость $y = 0$. Верхний тор $(0, x_a, f_a, f_c)$ имеет радиус входа $(0, x_a) = R_n$, радиус выхода $(f_b, f_c) = (f_c, f_a) = R_{n+1}$ и ограничен углом χ_n . Нижний тор (z_a, f_c, f_b, z_c) имеет радиусы входа и выхода $(z_a, z_b) = (f_c, f_b) = R_{n+1}$. Внутренний радиус нижнего тора равен

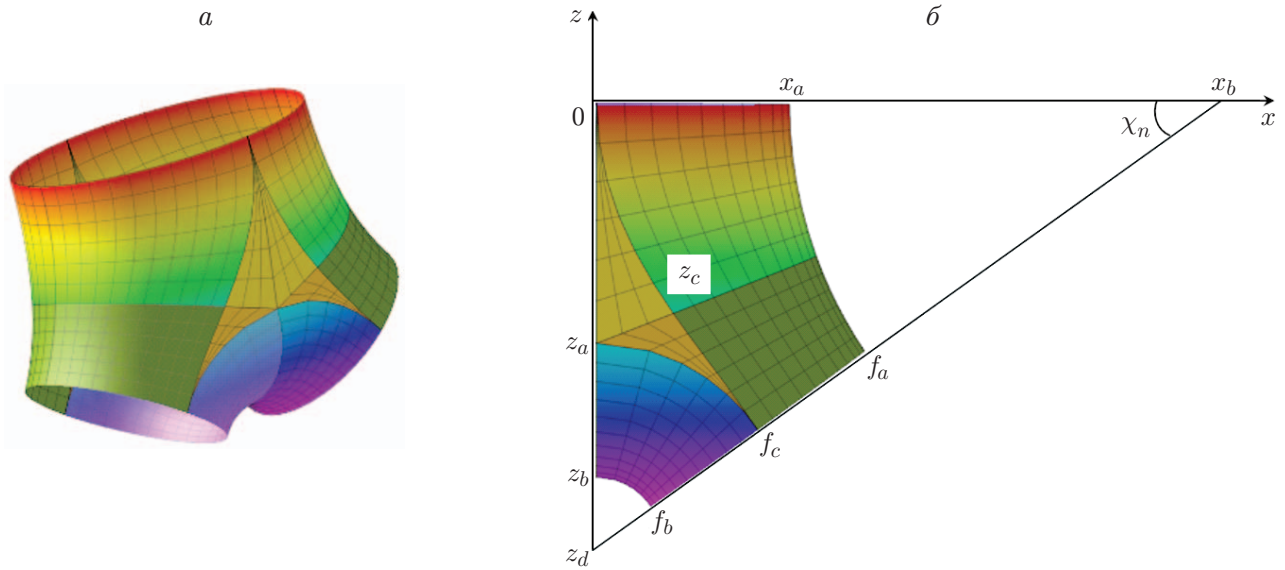


Рис. 5. Общий вид трехмерной бифуркации с сечением в виде окружности (а) и проекция этого узла в плоскости $y = 0$ (б):

$(0, x_a, f_a, f_c)$ — верхний тор, (z_a, f_c, f_b, z_c) — нижний тор, $(0, z_c, z_a)$ — верхняя поверхность, (z_a, z_c, f_c) — нижняя поверхность

$(z_d, z_b) = (z_d, f_b) = R_{n+1}/2$. Расстояние между точками с координатами 0 и x_b обозначим через G_n . Параметр G_n задается соотношением [12–14]

$$G_n = (2,5R_{n+1} - R_n) \frac{\cos \chi_n}{1 - \cos \chi_n}. \quad (9)$$

Верхний тор $(0, x_a, f_a, f_c)$ описывается соотношениями

$$\begin{aligned} X_n^U(\varphi, \chi) &= \pm[G_n + X(\varphi, \chi - \pi, R_n^M(\chi, G_n, G_n - (R_n - R_{n+1})), R_n^M(\chi, R_n, R_{n+1}))], \\ Y_n^U(\varphi, \chi) &= Y(\varphi, R_n^M(\chi, R_n, R_{n+1})), \end{aligned} \quad (10)$$

$$Z_n^U(\varphi, \chi) = Z(\varphi, \chi - \pi, R_n^M(\chi, G_n, G_n - (R_n - R_{n+1})), R_n^M(\chi, R_n, R_{n+1}))$$

$(\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]; \chi \in [0, \chi_n])$, нижний тор (z_a, f_c, f_b, z_c) — соотношениями

$$\begin{aligned} X_n^D(\varphi, \zeta) &= \pm X(\varphi, \zeta, 1,5R_{n+1}, R_{n+1}), \quad Y_n^D(\varphi, \zeta) = Y(\varphi, R_n^M(A_n(\zeta), R_n, R_{n+1})), \\ Z_n^D(\varphi, \zeta) &= -G_n \operatorname{tg} \chi_n + Z(\varphi, \zeta, 1,5R_{n+1}, R_{n+1}) \end{aligned} \quad (11)$$

$(\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]; \zeta \in [\chi_n, \pi/2])$.

Верхнюю двухпараметрическую поверхность $(0, z_c, z_a)$ зададим уравнениями

$$x_n^U(s) = \pm s, \quad y_n^U(\chi) = Y_n^U(\pm\pi/2, \chi), \quad z_n^U(s, \chi) = (s - G_n) \operatorname{tg} \chi, \quad (12)$$

где $s \in [0, X_n^U(\pi/2, \chi)]$; $\chi \in [0, \bar{\chi}_n]$; угол $\bar{\chi}_n$, ограничивающий второй параметр, определяется соотношением

$$\bar{\chi}_n = -\operatorname{arctg} \left(\frac{1,5R_{n+1} - G_n \operatorname{tg} \chi_n}{G_n} \right). \quad (13)$$

Нижнюю двухпараметрическую поверхность $(0, z_c, z_a)$ зададим уравнениями

$$x_n^D(s) = \pm s, \quad y_n^D(\zeta) = Y_n^U(\pm\pi/2, A_n(\zeta)), \quad z_n^D(s, \zeta) = (s - G_n) \operatorname{tg} A_n(\zeta), \quad (14)$$

где $s \in [X_n^D(\pi/2, \zeta), X_n^U(\pi/2, A_n(\zeta))]$; $\zeta \in [\chi_n, \pi/2]$. Функция $A_n(\zeta)$ определяет связь углов ζ и χ :

$$A_n(\zeta) = \chi_n - \operatorname{arctg} \left(\frac{1,5R_{n+1} \sin(\zeta - \chi_n)}{G_n / \cos \chi_n - 1,5R_{n+1} \cos(\zeta - \chi_n)} \right). \quad (15)$$

Координаты точки f_c (центр выходящих бронхов) задаются соотношениями

$$x_n^c = \pm 1,5R_{n+1} \cos \chi_n, \quad y_n^c = 0, \quad z_n^c = -[G_n - (R_n - R_{n+1})] \sin \chi_n. \quad (16)$$

К поверхности (f_a, f_c, f_b) примыкает выходящий цилиндрический или звездообразный бронх длиной L_{n+1} (на рис. 5 не показан). Уравнения для выходящих бронхов имеют вид

$$\begin{aligned} X_n^{B(out)}(\varphi, s) &= x_n^c + R_{n+1}f(\varphi) \cos(\varphi) \cos \chi_n \pm s \sin \chi_n, \\ Y_n^{B(out)}(\varphi, s) &= R_{n+1}f(\varphi) \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (17)$$

$$Z_n^{B(out)}(\varphi, s) = z_n^c \pm R_{n+1}f(\varphi) \cos(\varphi) \sin \chi_n - s \cos \chi_n,$$

где знак “+” соответствует правому бронху, знак “−” — левому исходящему бронху; $s \in [0, L_{n+1}]$; $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Уравнения (7)–(17) аналитически описывают построение n -й бифуркации бронхиального дерева с выходящими бронхами.

6. Построение бронхиального дерева. Построение последующих бифуркационных узлов бронхиального дерева начинается с преобразования системы координат с началом в середине правого или левого выходного бронха предыдущей бифуркации. При этом ось Z направлена по оси левого или правого выходного бронха предыдущей бифуркации. Такое преобразование координат позволяет переносить бифуркацию в любую область дерева, не меняя формулы для построения бронхов (меняется только номер n бифуркации).

Перейдем к новой системе координат от текущей бифуркации, когда начало системы координат сдвигается в точку $(x_{n+1}^{new}, y_{n+1}^{new}, z_{n+1}^{new})$:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{new} &= \pm(1,5R_{n+1} \cos \chi_n + L_{n+1} \sin \chi_n), & y_{n+1}^{new} &= 0, \\ z_{n+1}^{new} &= -[G_n - (R_n - R_{n+1})] \sin \chi_n - L_{n+1} \cos \chi_n \end{aligned} \quad (18)$$

и поворачивается вокруг оси Y на угол $\pm\chi_n$.

Начиная со второй бифуркации ($n = 2$) четные бифуркации поворачиваются вокруг оси Z (рассматривается локальная система координат, в которой строится данная бифуркация) на угол $\pi/2$. В результате матрица преобразования координат для следующей бифуркации с номером $n + 1$ принимает следующий вид:

— для нечетных n

$$S_{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(\chi_n) & 0 & \mp \sin(\chi_n) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pm \sin(\chi_n) & 0 & \cos(\chi_n) & 0 \\ \pm x_{n+1}^{new} & y_{n+1}^{new} & z_{n+1}^{new} & 1 \end{bmatrix}; \quad (19)$$

— для четных $n \geq 2$

$$S_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\chi_n) & \mp \sin(\chi_n) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm \sin(\chi_n) & \cos(\chi_n) & 0 \\ -y_{n+1}^{new} & \pm x_{n+1}^{new} & z_{n+1}^{new} & 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

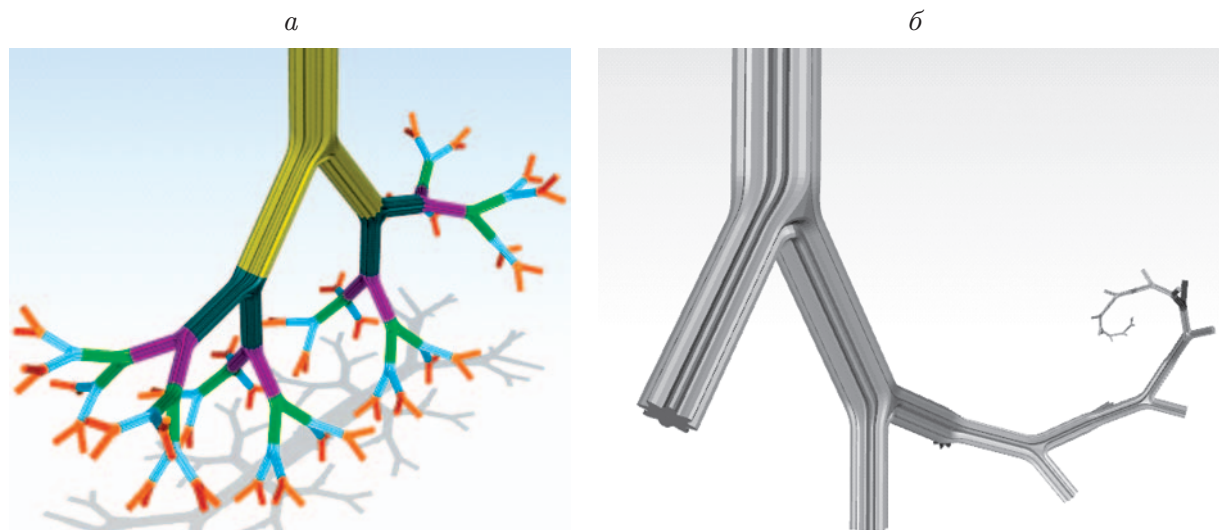


Рис. 6. Бронхиальное дерево человека со звездообразными бронхами, построенное по модели (7)–(20), до генерации $n = 5$ (ветви одной генерации показаны одинаковым цветом) (а) и отдельная ветвь бронхиального дерева с 0-й по 23-ю генерацию (б)

На рис. 6,а показано построенное бронхиальное дерево до генерации $n = 5$ со звездообразным внутренним сечением бронхов. Полностью изобразить бронхиальное дерево до 23-й генерации не представляется возможным вследствие многочисленности и разномасштабности ветвей. На рис. 6 приведена одна ветвь бронхиального дерева (показаны только бифуркационные узлы, примыкающие к правым исходящим бронхам) до 23-й генерации включительно. Численный расчет проводился для этой ветви бронхиального дерева человека.

7. Расчет течения в бронхиальном дереве. Как и в работах [12–14], для расчета течения воздуха в бронхиальном дереве человека использовалась модель вязкой несжимаемой жидкости, что обусловлено малой сжимаемостью воздуха при значениях давления, характерных для дыхательной системы человека. Значения расчетной плотности и вязкости воздуха приведены в п. 2. Бронхи имеют номер n от 0 (трахея) до 23 (терминальные бронхиолы — последние бронхиолы перед альвеолами). Радиус R_n и длина L_n бронхов задаются формулами (1), (2). Внутреннее сечение бронхов задается формулой (4).

Для несжимаемой жидкости (воздух в бронхах), зная расход, можно по формулам (3) рассчитать среднюю скорость U_n и число Рейнольдса Re_n на выходе из n -го бронха. На рис. 7 показаны расчетные значения скорости и числа Рейнольдса в бронхиальном дереве человека при расходе воздуха $Q = 50$ л/мин. Такой расход приблизительно соответствует одному вдоху человека. Критическое число Рейнольдса, при значениях больше которого течение является турбулентным, для круглой трубы равно 2300. На рис. 7 видно, что начиная со второй бифуркации число Рейнольдса потока меньше критического. Немонотонность поведения скорости при $n = 3$ обусловлена немонотонностью длины бронха L_n (см. рис. 2).

Сложность численного моделирования течения в бронхиальном дереве обусловлена ростом в геометрической прогрессии размера расчетной области и уменьшением размера бронхов с увеличением номера бифуркации. Количество бронхов увеличивается в два раза после каждой бифуркации (см. рис. 6,а). Соответственно количество терминальных бронхиол равно $2^{23} = 8\,388\,608$. Поэтому на данном этапе развития вычислительной техники

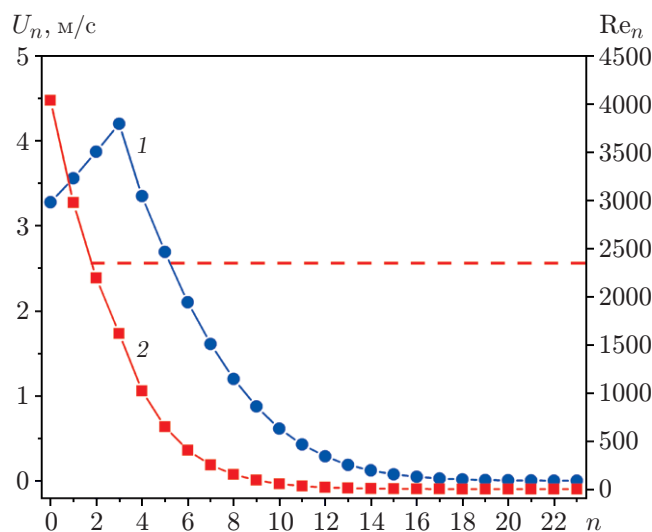


Рис. 7. Зависимости средней скорости U_n (1) и числа Рейнольдса Re_n (2) потока от номера бифуркации, полученные по формуле (3) при расходе воздуха $Q = 50$ л/мин: штриховая линия — $Re_n = 2300$

численный расчет полного бронхиального дерева практически невозможен. При расчете течения воздуха в полном бронхиальном дереве необходимо проводить расчет в каждом из $\sum_{n=0}^{23} 2^n = 16\,777\,215$ бронхов, радиус и длина которых уменьшаются от значений $R_n(0) = 9$ мм и $L_n(0) = 120$ мм до значений $R_n(23) = 0,5$ мм, $L_n(23) = 0,21$ мм (формулы (1), (2)) соответственно.

В работе [2] полностью рассчитывалась одна бронхиальная ветвь без боковых ответвлений, при этом методом последовательных приближений (несколько тысяч итераций) согласовывались условия “усечения” бронхиального дерева. Поскольку в [2] расчет проводился для турбулентного режима, значение падения давления завышено.

В настоящей работе предложена численная методика последовательного расчета движения воздуха в бронхиальном дереве человека. Рассматривается стационарный процесс вдоха (для выдоха схема расчета строится аналогичным образом). Течение полагается ламинарным, расход воздуха через все бронхи n -й генерации — одинаковым. Расчет проводится последовательно от n -й до $(n + 1)$ -й генерации (т. е. последовательно от 0-й до 23-й бифуркации). Для расчета n -й бифуркации во входном сечении задаются поле скоростей $U_{n-1}(x, y, z)$ и среднее давление \tilde{p}_{n-1} во входном сечении, полученные из расчета для $(n - 1)$ -й бифуркации. В выходном сечении задается расход $Q_n = Q/2^{n+1}$. Схема расчета n -й бифуркации показана на рис. 8, а. После расчета n -й бифуркации в выходном сечении получаем поле скоростей $U_n(x, y, z)$ и среднее давление в сечении \tilde{p}_n . Эти значения передаются на вход для расчета $(n + 1)$ -й бифуркации. Таким образом можно рассчитать течение во всем бронхиальном дереве человека или хотя бы в одной ветке с 0-й до 23-й генерации.

Ламинарное течение позволяет задавать на входе в бронх только поле скоростей и среднее давление (а не все поле давления в сечении). Поэтому точность метода определяется точностью задания среднего давления во входном сечении каждого бронха вместо полного поля давления во входном сечении. Средний перепад давления между входным и выходным бронхами n -й бифуркации колеблется от нескольких паскалей до долей 1 Па.

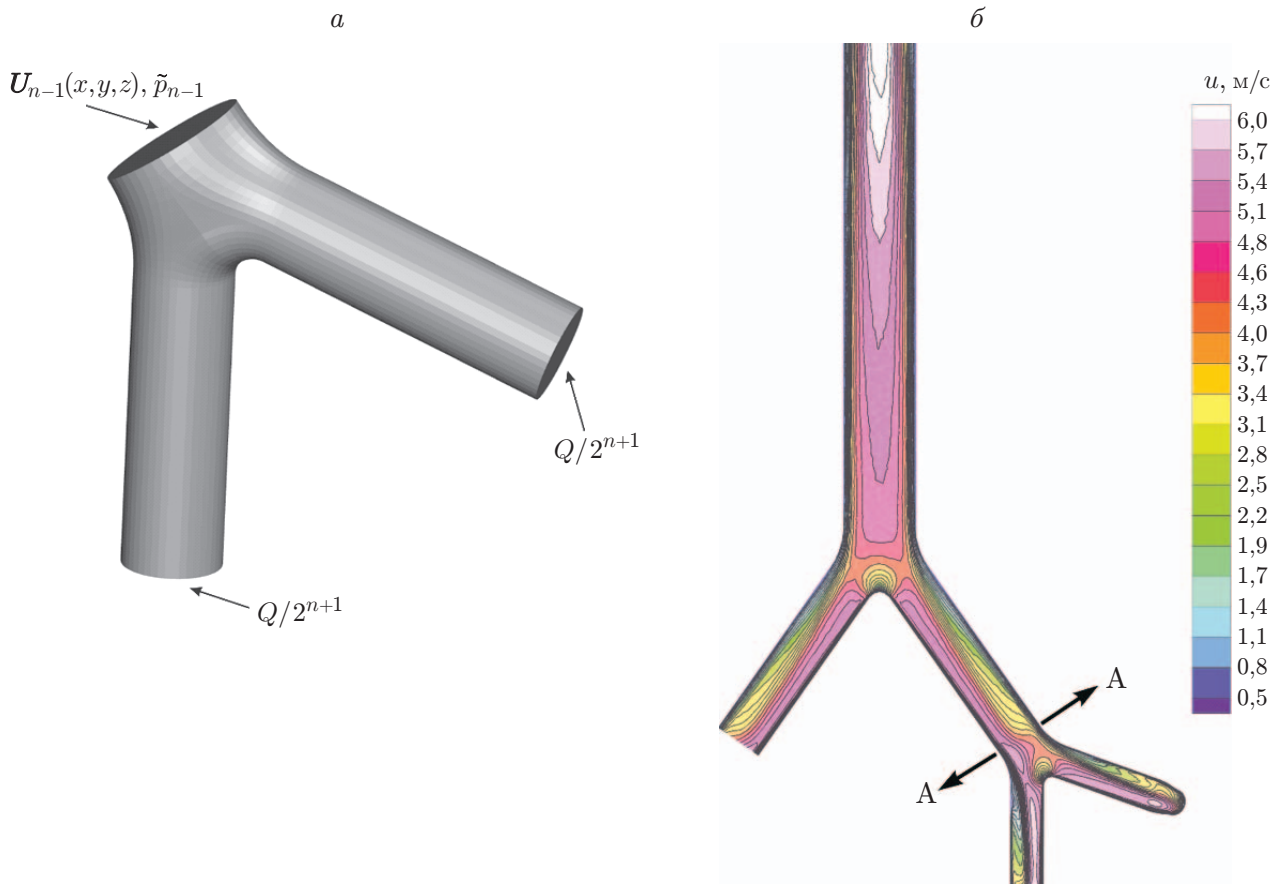


Рис. 8. Схема последовательного расчета бронхиального дерева человека (а) и расчетные изолинии модуля скорости в 0-й и 1-й бифуркациях (б) при расходе воздуха $Q = 50$ л/мин:

AA — область стыковки бифуркаций

Как показывают результаты расчетов, перепад давления в поперечном сечении n -го бронха (разность максимального и минимального давлений в сечении) максимум на два порядка меньше среднего перепада давления между входом и выходом в n -й бифуркации. Поэтому погрешность, обусловленная заменой поля давления на среднее давление в сечении, составляет менее 10 % значения давления. Состыковка полей скорости происходит с большой точностью. На рис. 8, б показаны рассчитанные поля скорости при переходе от 0-й к 1-й бифуркации.

Проведены численные расчеты течения в одной из ветвей бронхиального дерева, показанной на рис. 6, б для бронхов с круглым и звездообразным сечениями. Расчеты проводились для стационарных уравнений Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Расчетные параметры вязкости и плотности воздуха приведены в п. 2 и совпадают с данными, используемыми для расчета в работе [14]. Расчеты проводились для стационарного ламинарного течения (вдох) при $Q = 50$ л/мин. Параметры звездообразного бронхиального дерева следующие: количество лучей “звездочки” $n_{ed} = 8$, относительная высота лучей $s_{ob} = 0,4$, площадь поперечного сечения обструктивного бронха совпадает с площадью “здорового” бронха. Построение последовательности бронхов описывается аналитическими формулами (см. п. 6). Построение расчетной сетки и численный расчет ламинарного течения в отдельном бронхе можно проводить с требуемой точностью практически в любой программе CFD.

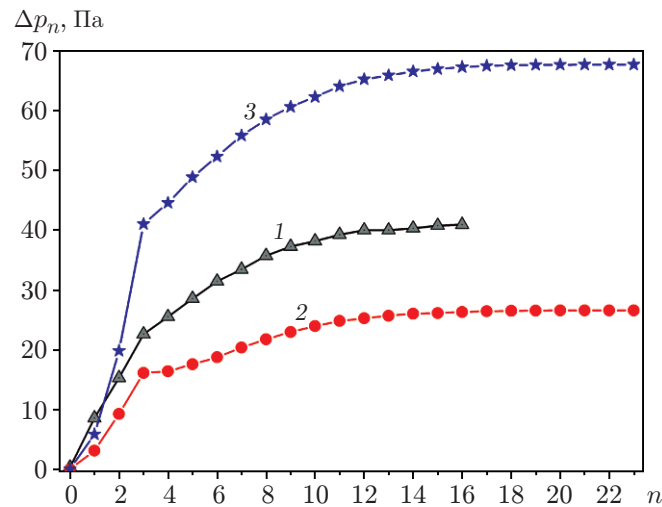


Рис. 9. Зависимость перепада давления в бронхиальном дереве человека при расходе воздуха $Q = 50$ л/мин от номера бифуркации для бронхов с различными сечениями: 1 — круглые [14], 2 — круглые (настоящая работа), 3 — звездообразные (настоящая работа)

Результаты расчета бронхиального дерева до 23-й бифуркации включительно приведены на рис. 9, где показана зависимость перепада среднего (по площади поперечного сечения) давления $\Delta p_n = p_0 - p_n$ между входом в 0-й бронх и выходом из n -го бронха от номера бифуркации. Представлены результаты расчетов стационарного вдоха в работе [14], которые проводились по SST- $(k-\omega)$ -модели турбулентности. В расчетах настоящей работы использовались такие же, как в [14], значения вязкости, плотности и расхода несжимаемого газа и такая же симметричная модель бронхиального дерева (1), (2). На рис. 9 видно, что при ламинарном режиме течения падение давления в два раза меньше, чем в случае турбулентного режима [14] (кривые 1, 2). По-видимому, это справедливо, поскольку организм человека в процессе эволюции выработал дыхание с наименьшими затратами энергии, т. е. в норме дыхание человека является ламинарным процессом. В случае звездообразной формы бронхов дерева перепад давления резко увеличивается, что обусловлено увеличением боковой поверхности бронхов при постоянном значении (в данном расчете) площади их поперечного сечения.

Заключение. В работе выполнено математическое моделирование течения воздуха в бронхиальном дереве человека в норме и при патологии. Разработана аналитическая параметрическая модель бронхиального дерева человека, позволяющая получить реальное звездообразное внутреннее сечение бронхов и при изменении параметров, например при астме, описывающая их сжатие. Приведены аналитические формулы для построения полного бронхиального дерева. Все поверхности бронхиального дерева состыковываются со вторым порядком гладкости (не имеют острых углов и ребер). Геометрические характеристики бронхиального дерева человека при патологии моделируются звездообразной формой внутреннего сечения бронха, степень патологии задается двумя параметрами: степенью сужения бронха и степенью искажения цилиндрической формы бронхов. Предложена численная методика поэтапного расчета бронхиального дерева человека. Проведены расчеты ламинарного течения воздуха в бронхиальном дереве человека (от входного бронха до альвеол). Показано, что при ламинарном течении воздуха в бронхах падение давления в два раза меньше, чем при турбулентном течении. Искажение цилиндрической формы бронхов при патологии приводит к увеличению падения давления в бронхиальном дереве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейбель Э. Р. Морфометрия легких человека. М.: Медицина, 1970.
2. Zhao Y., Lieber B. B. Steady inspiratory flow in a model symmetric bifurcation // J. Biomech. Engng. 1994. V. 116. P. 488–496.
3. Zhao Y., Brunskill C. T., Lieber B. B. Inspiratory and expiratory steady flow analysis in a model symmetrically bifurcating airway // J. Biomech. Engng. 1997. V. 119. P. 52–58.
4. Hegedűs C. J., Balásházy I., Farkas Á. Detailed mathematical description of the geometry of airway bifurcations // Respiratory Physiol. Neurobiol. 2004. V. 141, N 1. P. 99–114.
5. Heistracher T., Hofmann W. Physiologically realistic models of bronchial airway bifurcations // J. Aerosol Sci. 1995. V. 26, N 3. P. 497–509.
6. Schmidt A., Zidowitz S., Kriete A., et al. A digital reference model of the human bronchial tree // Comput. Med. Imag. Graphics. 2004. V. 28. P. 203–211.
7. Horsfield K. Some mathematical properties of branching trees with application to the respiratory system // Bull. Math. Biology. 1976. V. 38. P. 305–315.
8. Kitaoka H., Takaki R., Suki B. A three-dimensional model of the human airway tree // J. Appl. Physiol. 1999. V. 87, N 6. P. 2207–2217.
9. Tawhai M. H., Burrowes K. S. Developing integrative computational models of pulmonary structure // The Anatom. Record. Pt B. New Anatomist. 2003. V. 275B, N 1. P. 207–218.
10. Gemci T., Ponyavin V., Chen Y., et al. Computational model of airflow in upper 17 generations of human respiratory tract // Ser. Biomech. 2007. V. 23, N 1. P. 5–18.
11. Walters D. K., Luke W. H. A method for three-dimensional Navier — Stokes simulations of large-scale regions of the human lung airway // J. Fluids Engng. 2010. V. 132, N 5. 051101.
12. Tena A. M., Casan P., Fernández J., et al. Characterization of particle deposition in a lung model using an individual path // EPJ Web Conf. 2013. V. 45. 01079.
13. Tena A. F., Francos J. F., Álvarez E., Casan P. A. A three dimensional in SILICO model for the simulation of inspiratory and expiratory airflow in humans // Engng Applicat. Comput. Fluid Mech. 2015. V. 9, N 1. P. 187–198.
14. Tena A. F., Fernández J., Álvarez E., et al. Design of a numerical model of lung by means of a special boundary condition in the truncated branches // Intern. J. Numer. Methods Biomed. Engng. 2017. V. 33, N 6. e2830.
15. Ham A. W. Histology. S. l.: Lippincott Williams and Wilkins, 1979.
16. Mescher A. L. Junqueira's basic histology: Text and atlas. N. Y.: McGraw Hill Med., 2013.
17. Кирпичникова Е. С. Практикум по частной гистологии. М.: Высш. шк., 1963.
18. Barbini P., Brighenti C., Cevenini G., Gnudi G. A dynamic morphometric model of the normal lung for studying expiratory flow limitation in mechanical ventilation // Annals Biomed. Engng. 2005. V. 33, N 4. P. 518–530.
19. Slutsky A., Berdine G., Drazen J. Steady flow in a model of human central airways // J. Appl. Physiol. 1980. V. 49. P. 417–423.
20. Liu Y., So R. M. C., Zhang C. H. Modeling the bifurcating flow in a human lung airway // J. Biomech. 2002. V. 35. P. 465–473.
21. Happel J. Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media / J. Happel, H. Brenner. S. l.: Prentice-Hall, 1963.

*Поступила в редакцию 15/VII 2019 г.,
после доработки — 15/VII 2019 г.
Принята к публикации 29/VII 2019 г.*