

УДК 517.9

## ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КОАГУЛЯЦИИ

Ю. Н. Григорьев, С. В. Мелешко\*, А. Суриявичитсерани\*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

\* Технологический университет им. Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд

E-mails: grigor@ict.nsc.ru, sergey@math.sut.ac.th, amornratjulie@gmail.com

С использованием методов группового анализа исследуются нелокальные уравнения теории коагуляции. Наряду с интегродифференциальным уравнением Смолуховского рассматриваются эквивалентные модели, включая уравнение для преобразования Лапласа исходного уравнения, бесконечную систему уравнений для степенных моментов его решения, уравнение для производящей функции степенных моментов. Найдены допустимые группы Ли рассматриваемых уравнений, исследованы их взаимосвязи, проведен анализ соответствующих инвариантных решений.

**Ключевые слова:** уравнение Смолуховского, преобразование Лапласа, степенные моменты, групповой анализ, инвариантные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20190216

**Введение.** Уравнение Смолуховского, являющееся распространенной математической моделью процессов коагуляции в различных системах и играющее центральную роль в кинетической теории коагуляции, используется для описания органических и неорганических систем, таких как бактериальные колонии и океанический планктон, атмосферные аэрозоли, туманы и смоги, минеральные наносреды и протопланетные облака в космосе и др. В математической теории исследование инвариантных решений уравнения Смолуховского до недавнего времени ограничивалось в основном автомодельными (скейлинговыми) решениями для однородных по Эйлеру функций скорости (ядер) коагуляции. Эти решения получены на основе анализа размерностей и теории подобия [1]. Качественные свойства скейлинговых решений изучались в ряде работ, основные результаты которых представлены в [2, 3]. Однако не был решен вопрос о множестве всех инвариантных решений [4] уравнения Смолуховского, или о полной группе Ли преобразований, допустимых этим уравнением, в то время как скейлинговые решения соответствуют только подгруппе растяжений. Для нахождения полной допустимой группы необходимо использовать развитый в [5, 6] вариант группового анализа для уравнений с нелокальными операторами, каким является интегродифференциальное уравнение Смолуховского. Данный подход основан на прямом решении определяющего уравнения для инфинитезимального оператора группы, что позволяет сделать заключение о ее полноте. Заметим, что на основе этого подхода в [7] (см. также [6]) рассматривался частный случай уравнения Смолуховского, в котором

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00209а).

были выполнены некоторые масштабирующие преобразования зависимой и независимых переменных. В частности, в качестве эволюционной переменной использовалась величина, называемая возрастом спектра [8, 9]. В результате была вычислена полная четырехпараметрическая группа операторов, построена оптимальная система подгрупп, найдены представления всех существенно различных инвариантных решений и соответствующие фактор-уравнения.

Одновременно допустимая алгебра Ли для уравнения Смолуховского с однородными ядрами коагуляции найдена с использованием геометрической теории “покрытий” в [10], где также получены представления инвариантных решений и соответствующие фактор-уравнения. При этом констатировалось, что результаты включают в качестве частных случаев все известные решения для однородных ядер, однако вопрос о полноте найденной группы не рассматривался.

Помимо уравнения Смолуховского в теории коагуляции рассматриваются эквивалентные подходы, такие как уравнение для преобразования Лапласа исходного уравнения, бесконечная система уравнений для степенных моментов его решения, уравнение для производящей функции степенных моментов. Однако групповые свойства этих уравнений систематически не изучались. Данные уравнения имеют нелокальный характер, и их полный групповой анализ возможен только с использованием подхода [6]. Кроме прямого вычисления допустимых групп Ли данных уравнений и вида их инвариантных решений, представляет интерес исследовать “наследование” ими допустимых преобразований собственно уравнения Смолуховского. Также требуется сопоставить найденные группы с допустимой группой исходного уравнения, так как в случае других кинетических уравнений отмечалось отсутствие соответствующего изоморфизма [6]. Такое сопоставление необходимо потому, что в большинстве случаев от найденных решений уравнения для преобразования Лапласа или уравнения для производящей функции степенных моментов не удастся перейти к решению уравнения Смолуховского. Однако из этих решений можно получить выражения для степенных моментов решения, содержательных с физической точки зрения.

В настоящей работе вычислена полная алгебра (группа) Ли, допускаемая уравнением Смолуховского для одного вида распространенных ядер коагуляции, а также полные допустимые алгебры соответствующих уравнений для преобразования Лапласа и для производящей функции степенных моментов. Проведено их сопоставление, указаны операторы, соответствующие известным частным решениям.

**1. Уравнение Смолуховского и его представления.** Уравнение коагуляции Смолуховского представляет собой интегродифференциальное уравнение для функции распределения коагулирующих частиц по объему (массе). В случае когда объемы (массы) частиц являются непрерывными переменными, уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f(t, x, v)}{\partial t} + U(t, x) \frac{\partial f(t, x, v)}{\partial x} = \int_0^\infty \int_0^\infty dv_1 dv_2 S(v, v_1, v_2) f(t, x, v_1) f(t, x, v_2), \quad (1)$$

где

$$S(v, v_1, v_2) = K(v_1, v_2)[\delta(v - v_1 - v_2) - \delta(v - v_1) - \delta(v - v_2)]/2,$$

$x$  — пространственная координата;  $t$  — время;  $v$  — объем (масса) коагулирующей частицы (кластера);  $f(v, x, t)$  — ненормированная функция распределения, задающая объемную концентрацию частиц на интервале  $[v, v + dv]$  в окрестности точки пространства  $x$  и в момент времени  $t$ ; симметричная неотрицательная функция  $K(v_1, v_2) = K(v_2, v_1) \geq 0$  — ядро коагуляции, которое определяет скорость слияния двух кластеров с объемами  $v_1$  и  $v_2$ ;  $\delta(v)$  — функция Дирака; функция  $U(t, x)$  — заданная скорость переноса коагулянта в про-

странстве. В случае если перенос по пространству отсутствует и  $U(t, x) = 0$ , уравнение (1) преобразуется в пространственно однородное уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial f(t, v)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^\infty dv_1 dv_2 S(v, v_1, v_2) f(t, v_1) f(t, v_2). \quad (2)$$

С точки зрения группового анализа наличие переноса не является существенным. Вводя новые переменные по формулам

$$s = \varphi(t, x), \quad \bar{t} = t, \quad \bar{f}(\bar{t}, s, v) = f(t, x, v),$$

где функция  $\varphi(t, x)$  удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (1), однородное уравнение (2) запишем в новых переменных

$$\frac{\partial \bar{f}(\bar{t}, s, v)}{\partial \bar{t}} = \int_0^\infty \int_0^\infty dv_1 dv_2 S(v, v_1, v_2) \bar{f}(\bar{t}, s, v_1) \bar{f}(\bar{t}, s, v_2).$$

Поэтому в настоящей работе рассматривается только пространственно однородный случай уравнения Смолуховского.

Рассмотрим ядро коагуляции

$$K(v_1, v_2) = a + b(v_1 + v_2) + cv_1v_2, \quad (3)$$

где  $a, b, c$  — неотрицательные константы. Очевидно, что ядра такого вида принадлежат классу однородных (в смысле Эйлера) ядер в случае, когда только одна из констант не равна нулю. Вместе с тем для любой пары констант, отличных от нуля, данное ядро не является однородным.

Другой подход к анализу групповых свойств уравнения Смолуховского связан с преобразованием Лапласа уравнения (2) относительно переменной  $v$ . С помощью преобразования Лапласа

$$F(p, t) = \int_0^\infty e^{-pv} f(t, v) dv$$

уравнение (2) представляется в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{a}{2} [F^2 - 2FF(0)] + b \left[ \frac{\partial F}{\partial p} F(0) + F \frac{\partial F}{\partial p}(0) - F \frac{\partial F}{\partial p} \right] + \frac{c}{2} \left[ \frac{\partial F^2}{\partial p} - 2 \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial p}(0) \right]. \quad (4)$$

Заметим, что уравнение (4) содержит нелокальные элементы

$$F(0) = F(0, t), \quad \frac{\partial F}{\partial p}(0) = \frac{\partial F}{\partial p}(0, t).$$

В [8, 9] помимо уравнения (4) рассматривается уравнение для функции  $\Phi = F - F(0)$ . Используя уравнение (4) и полагая  $p = 0$ , получаем уравнение для функции  $\Phi(t, p)$  в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{a}{2} \Phi^2 - b \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}(0) \right] \Phi + \frac{c}{2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial p}(0) \right]^2. \quad (5)$$

Использование уравнения (5) для функции  $\Phi(t, p)$  обусловлено тем, что для функции  $F(0)$  имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t}(0) = -\frac{a}{2} F^2(0) + bkF(0) - \frac{c}{2} k^2, \quad k = \frac{\partial F}{\partial p}(0), \quad (6)$$

для которого может быть получено общее решение.

Еще один альтернативный подход с использованием группового анализа для уравнения Смолуховского основан на исследовании системы уравнений для моментов функции распределения  $f(t, v)$ , которые определяются следующим образом:

$$M_n(t) = \int_0^{\infty} v^n f(v, t) dv \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь момент  $M_0(t)$  задает общее количество кластеров в момент времени  $t$ ,  $M_1(t)$  задает общий объем (массу) коагулянта.

Умножая уравнение (2) с ядром (3) на  $v^n$  и интегрируя в пределах  $(0, \infty)$ , получаем соответствующую систему моментных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_0}{\partial t} &= -\frac{a}{2} M_0^2 - bM_0M_1 - \frac{c}{2} M_1^2, & \frac{\partial M_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial M_n}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left( \frac{a}{2} M_k M_{n-k} + M_{k+1} \left( bM_{n-k} + \frac{c}{2} M_{n+1-k} \right) \right), & n &\geq 2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ .

Заметим, что система (7) в теории коагуляции занимает более значительное место, чем аналогичная система в кинетической теории газа [11], поскольку, в частности, в этом случае любая конечная подсистема замкнута и может быть проинтегрирована независимо от моментов с большими номерами.

Используя моменты экспоненциального распределения

$$\hat{M}_n = \int_0^{\infty} v^n e^{-v} dv = n!, \quad n = 1, 2, \dots,$$

определим нормированные моменты функции распределения  $f(t, v)$

$$\hat{M}_n = \int_0^{\infty} v^n e^{-v} dv = n!, \quad \mu_n(t) = \frac{M_n(t)}{\hat{M}_n} \equiv \frac{M_n(t)}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

С использованием нормированных моментов систему (7) можно записать в более простой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_0}{\partial t} &= -\frac{a}{2} \mu_0^2 - b\mu_0\mu_1 - \frac{c}{2} \mu_1^2, & \frac{\partial \mu_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \mu_n}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{a}{2} \mu_k \mu_{n-k} + b(k+1)\mu_{k+1}\mu_{n-k} + \frac{c}{2} (k+1)(n+1-k)\mu_n \mu_n \right), & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (8)$$

В ряде работ, посвященных групповому анализу уравнения Больцмана (см., например, [12–14]), структура которого аналогична структуре уравнения Смолуховского, использовался переход к уравнению для производящей функции степенных моментов

$$G(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \mu_n(t),$$

имеющему форму дифференциального уравнения с нелокальными коэффициентами.

Умножая уравнения (8) на  $\xi^n$  и суммируя по  $n$ , после перестановки порядка в двойных суммах получаем уравнение для производящей функции степенных моментов  $G(\xi, t)$  в виде

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{a}{2} [G^2 - 2GG(0)] - b \left[ \frac{\partial G}{\partial \xi} G(0) + G \frac{\partial G}{\partial \xi}(0) - G \frac{\partial G}{\partial \xi} \right] + \frac{c}{2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \xi}(0) \right], \quad (9)$$

где  $G(0) = G(0, t)$ ;  $(\partial G/\xi)(0) = (\partial G/\partial \xi)(0, t)$ .

Заметим, что уравнение (9) совпадает с уравнением (4) с точностью до противоположного знака во втором члене в правой части. Поскольку

$$M_n(t) = (-1)^n \frac{\partial^n F(p, t)}{\partial p^n} \Big|_{p=0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

производящую функцию  $G(\xi, t)$  можно представить через функцию  $F(p, t)$  в виде степенного ряда

$$G(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial p^n}(0, t).$$

**2. Вычисление допустимой группы Ли уравнения Смолуховского.** Для проведения группового анализа уравнение Смолуховского будем рассматривать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, v) = \frac{1}{2} \int_0^v dv_1 K(v - v_1, v_1) f(t, v - v_1) f(t, v_1) - f(t, v) \int_0^{\infty} dv_1 K(v, v_1) f(t, v_1). \quad (11)$$

Групповые свойства уравнения Смолуховского с однородными ядрами порядка однородности  $\sigma$ :

$$K(\lambda v, \lambda v_1) = \lambda^\sigma K(v, v_1)$$

исследовались с использованием геометрического метода “покрытий” в работе [10], в которой показано, что уравнение Смолуховского (11) допускает алгебру Ли с операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t \partial_t - f \partial_f, \quad X_3 = (\sigma + 1)t \partial_t - v \partial_v. \quad (12)$$

Однако вопрос полноты найденной алгебры Ли не рассматривался.

Используем метод группового анализа, развитый в [5, 6] для нелокальных уравнений и заключающийся в выводе определяющих уравнений для операторов допустимой группы Ли и их последующем решении, откуда следует полнота вычисленной группы.

Оператор допустимой группы Ли находим в виде

$$X = \tau(t, v, f) \partial_t + \eta(t, v, f) \partial_v + \zeta(t, v, f) \partial_f.$$

В соответствии с алгоритмом [5, 6] определяющее уравнение для уравнения Смолуховского (11) имеет вид

$$D_t \zeta - f_t D_t \tau - f_v D_t \eta - \tau f_{tt} - \eta f_{tv} - \int_0^v dv_1 K(v - v_1, v_1) f(t, v - v_1) \psi(t, v_1) + \\ + \psi(t, v) \int_0^v dv_1 K(v, v_1) f(t, v_1) + f(t, v) \int_0^v dv_1 K(v, v_1) \psi(t, v_1), \quad (13)$$

где

$$\psi(t, v) = \zeta(t, v, f(t, v)) - \tau(t, v, f(t, v)) f_t(t, v) - \eta(t, v, f(t, v)) f_v(t, v),$$

$D_t = \partial_t + f_t \partial_f$  — оператор полной производной по  $t$ . Производные  $f_{tt}$ ,  $f_{tv}$ ,  $f_t$  определяются с помощью уравнения Смолуховского (11). Определяющее уравнение (13) должно быть удовлетворено для любого решения  $f(t, v)$  уравнения Смолуховского. Поэтому, если заданы начальные данные  $f(t_0, v) = f_0(v)$ , то с их использованием можно определить все производные функции  $f(t, v)$  в точке  $(t_0, v)$ , входящие в уравнение (13).

Метод решения определяющего уравнения (13) состоит в изучении свойств функций  $\tau(t, v, f)$ ,  $\eta(t, v, f)$ ,  $\zeta(t, v, f)$ . Эти свойства могут быть исследованы при последовательном рассмотрении определяющего уравнения на конкретном классе решений уравнения Смолуховского. Данный класс решений определяется начальными условиями

$$f_0(v) = c e^{-\alpha v} v^n, \quad (14)$$

где  $c$  — произвольная числовая константа;  $\alpha > 0$ ;  $n$  — неотрицательное целое число. Этот класс начальных данных позволяет использовать для решения определяющего уравнения символьные вычисления. Действительно, полагая функции  $\tau(t, v, f)$ ,  $\eta(t, v, f)$ ,  $\zeta(t, v, f)$  аналитическими, имеем

$$\begin{aligned} \tau(t, v, f) &= \sum_{m, l \geq 0} q_{lm}(t) f^l v^m, & \eta(t, v, f) &= \sum_{m, l \geq 0} r_{lm}(t) f^l v^m, \\ \zeta(t, v, f) &= \sum_{m, l \geq 0} p_{lm}(t) f^l v^m. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя ряды (15) в определяющее уравнение (13), получаем степенной ряд относительно переменной  $v$ , коэффициенты которого являются функциями  $q_{lm}(t)$ ,  $r_{lm}(t)$ ,  $p_{lm}(t)$  и их производных. Удерживая первые  $k$  членов этого ряда, получаем полином  $P_k(v)$  степени  $k$ , расщепляя который по  $v$  выводим уравнения для функций  $q_{lm}(t)$ ,  $r_{lm}(t)$ ,  $p_{lm}(t)$ . Решая эти уравнения и увеличивая степень  $k$ , можно найти функции  $\tau(t, v, f)$ ,  $\eta(t, v, f)$ ,  $\zeta(t, v, f)$ . При решении расщепленных уравнений можно также использовать произвольные значения  $b$  и  $n$  в (14). Данный подход применялся при исследовании других интегродифференциальных уравнений [6].

Многочлен  $P_k(v)$  можно также получить другим способом. Подставляя многочлены

$$\begin{aligned} \tau_{ks}(t, v, f) &= \sum_{m, l \geq 0}^{k, s} q_{lm}(t) f^l v^m, & \eta_{ks}(t, v, f) &= \sum_{m, l \geq 0}^{k, s} r_{lm}(t) f^l v^m, \\ \zeta_{ks}(t, v, f) &= \sum_{m, l \geq 0}^{k, s} p_{lm}(t) f^l v^m \end{aligned}$$

в (13) вместо  $\tau(t, v, f)$ ,  $\eta(t, v, f)$  и  $\zeta(t, v, f)$ , получаем полином  $P(v)$  относительно  $v$ . Удерживая первые  $k$  членов полинома, также получаем многочлен  $P_k(v)$ . Для этих вычислений использовалась программа, разработанная в рамках системы компьютерной алгебры Reduce [15].

Очевидно, что описанный алгоритм также можно использовать для решения определяющих уравнений, если имеются предположения о функциях  $\tau(t, v, f)$ ,  $\eta(t, v, f)$ ,  $\zeta(t, v, f)$ , например,

$$\tau = \tau_{ks}, \quad \eta = \eta_{ks}, \quad \zeta = \zeta_{ks}.$$

В настоящей работе использовалась программа при  $k = 1$ ,  $s = 1$ .

Полагая в (14)  $n = 1$ , в результате вычислений получаем следующую классификацию. Операторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t \partial_t - f \partial_f$$

допускаются при любом выборе коэффициентов  $a, b, c$  и функции  $K(v, v_1)$ . На качественном уровне нетрудно показать, что при преобразовании сдвига по времени и одновременном растяжении функции распределения и времени, соответствующих операторам  $X_1$  и  $X_2$ , уравнение (11) остается инвариантным для произвольного ядра коагуляции. Расширения алгебры Ли  $\{X_1, X_2\}$  имеют место только в случае однородных ядер:

$$\begin{aligned} a = 0, \quad b = 0: & \quad X_3 = 3t \partial_t - v \partial_v, \\ a = 0, \quad c = 0: & \quad X_3 = 2t \partial_t - v \partial_v, \\ b = 0, \quad c = 0: & \quad X_3 = t \partial_t - v \partial_v. \end{aligned}$$

Эти операторы совпадают с операторами, полученными в [10] для однородных ядер соответствующих порядков однородности.

Результаты проведенных вычислений подтверждают возможности метода [5, 6], в котором в отличие от [10] используются в основном инструменты классического группового анализа, реализованные средствами компьютерной алгебры.

**3. Допустимая группа Ли уравнения для преобразования Лапласа уравнения Смолуховского.** Уравнение (4) отличается от обыкновенного дифференциального уравнения наличием нелокальных элементов

$$F(0) = F(0, t), \quad \frac{\partial F}{\partial p}(0) = \frac{\partial F}{\partial p}(0, t),$$

что необходимо учитывать при анализе его групповых свойств [5, 6, 16].

Допустимый оператор группы ищется в виде

$$X = \tau \partial_t + \eta \partial_p + \zeta \partial_F,$$

где все коэффициенты зависят от  $t, p, F$ . Можно непосредственно проверить, что операторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t \partial_t - F \partial_F \quad (16)$$

допускаются уравнением (4) для любых значений  $a, b, c$  и определяют ядро всех допустимых алгебр Ли.

В случае если  $c \neq 0$ , расширение ядра (16) определяется оператором

$$X = q_3 X_3 + q_4 X_4,$$

где

$$q_3 a = 0, \quad q_3 b = 0, \quad q_4 (ac - b^2) = 0, \quad X_3 = p \partial_p + 2F \partial_F, \quad X_4 = e^{bp/c} \partial_F.$$

Если  $ac - b^2 \neq 0$ , то  $q_4 = 0$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Так как  $a^2 + b^2 \neq 0$ , то  $q_3 = 0$ . Следовательно, расширение ядра существует только для  $a = b^2 c^{-1}$ . В этом случае ядро (3) является параболическим [8, 9]:

$$K(v_1, v_2) = c^{-1} (b + cv_1)(b + cv_2).$$

Нетрудно показать, что в этом случае также допускается оператор  $X_4$ . Для  $b \neq 0$  это единственное расширение. Преобразованием, соответствующим  $X_4$ , является

$$\bar{F} = F + \tau e^{bp/c},$$

где  $\tau$  — групповой параметр.

Обратное преобразование для  $\bar{F}$  вычислить не получается, однако в соответствии с зависимостью (10) между производными лаплас-образа функции распределения и ее степенными моментами для них можно получить следующие выражения:

$$\bar{M}_n = M_n + (-1)^n \tau (b/c)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если  $b = 0$  и, следовательно,  $a = 0$ , то для уравнения (4) существует расширение ядра путем добавления операторов  $X_3$  и  $X_4$ .

Рассмотрим случай  $c = 0$ ,  $b \neq 0$ . При этом для уравнения (4) ядро допустимых алгебр Ли расширяется путем добавления оператора

$$X_5 = p \partial_p + F \partial_F$$

только при  $a = 0$ .

В случае  $c = 0$ ,  $b = 0$ ,  $a \neq 0$  ядро допустимых алгебр уравнения для преобразования Лапласа дополняется оператором

$$X_\varphi = \varphi(p) \partial_p,$$

где  $\varphi(0) = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Ядро допустимых операторов уравнения (5) состоит из операторов  $\bar{X}_1 = \partial_t$  и  $\bar{X}_2 = -t \partial_t + \Phi \partial_\Phi$ .

Расширения алгебры Ли  $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2\}$  возможны только в следующих случаях:

$$\begin{aligned} a = 0, \quad b = 0, \quad c \neq 0: & \quad \bar{X}_3 = 2t \partial_t + p \partial_p, \\ a = 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0: & \quad \bar{X}_3 = t \partial_t + p \partial_p, \\ a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0: & \quad \bar{X}_3 = 2b(e^{ap/(2b)} - 1) \partial_p + a e^{ap/(2b)} \Phi \partial_\Phi. \end{aligned}$$

В случае  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  уравнение для  $\Phi(p, t)$  становится обыкновенным дифференциальным уравнением, которое интегрируется в явном виде.

**4. Анализ инвариантных решений.** Проанализируем инвариантные решения уравнения Смолуховского и его эквивалентных преобразований для однородных ядер коагуляции. Для анализа инвариантных решений дифференциальных уравнений в частных производных, как правило, достаточно рассмотреть решения, инвариантные относительно подалгебр оптимальной системы подалгебр. Для уравнений с нелокальными элементами возможность использования оптимальной системы допустимых подалгебр требует отдельного изучения. Для интегродифференциальных уравнений действие внутренних автоморфизмов должно быть обусловлено существованием соответствующего преобразования эквивалентности. Однако в отличие от дифференциальных уравнений в частных производных для интегродифференциального уравнения трудно найти все преобразования эквивалентности.

Уравнение Смолуховского допускает закон сохранения полной массы коагулянта, в соответствии с которым момент  $M_1$  не зависит от  $t$ :

$$M_1 = \int_0^\infty v f(t, v) dv = \text{const}. \quad (17)$$

Более того, для физически значимых решений этот момент должен быть положительно определенным ( $M_1 > 0$ ). Данное условие налагает ограничения на инвариантные решения. Поскольку трудно проследить выполнение этого условия при построении оптимальной системы подалгебр, рассматривается общий вид инвариантных решений вместо решений, инвариантных относительно подалгебр оптимальной системы подалгебр. Заметим, что для уравнения Смолуховского из [8, 9] можно получить следующие преобразования эквивалентности:

$$\partial_t, \quad t \partial_t - f \partial_f, \quad t \partial_t + K \partial_K.$$

**4.1. Уравнение Смолуховского.** Допустимый оператор для уравнения Смолуховского рассматривается в виде линейной комбинации операторов (12):

$$X = \alpha \partial_t + \beta(f \partial_f - t \partial_t) + \gamma(-(\sigma + 1)t \partial_t + v \partial_v),$$



где  $\alpha, \beta, \gamma$  — произвольные постоянные. При этом, если  $\beta \neq 0$ , полагается, что  $\beta = 1$ ; если  $\beta = 0, \gamma \neq 0$ , полагается, что  $\gamma = 1$ . Во всех этих случаях функция  $H$  в представлениях инвариантных решений является функцией одной переменной.

В случае  $\beta \neq 0, \gamma = 0$  инвариантные решения имеют вид

$$f(t, v) = t^{-1} H(v).$$

Из условия (17) получаем тривиальное решение  $H = 0$ .

В случае  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma(\sigma + 1) + 1 = 0$  инвариантные решения имеют вид

$$f(t, v) = e^{t/\alpha} H(v e^{-\gamma t/\alpha}). \quad (18)$$

Из условия (17) получаем

$$M_1 = \int_0^\infty v f(t, v) dv = e^{t(1+2\gamma)/\alpha} \int_0^\infty s H(s) ds = \text{const}. \quad (19)$$

Из (19) и из условия для коэффициента  $\gamma$  в допустимом операторе  $X$  следует, что нетривиальное решение имеется только для случая

$$\gamma = -1/2, \quad \sigma = 1.$$

После подстановки представления инвариантного решения (18) в уравнение Смолуховского получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (H - \gamma v e^{-\gamma t/\alpha} H') &= \frac{1}{2} e^{t/\alpha} \int_0^v K(v - v_1, v_1) H((v - v_1) e^{-\gamma t/\alpha}) H(v_1 e^{-\gamma t/\alpha}) dv_1 - \\ &\quad - e^{t/\alpha} H \int_0^\infty K(v, v_1) H(v_1 e^{-\gamma t/\alpha}) dv_1. \end{aligned}$$

Используя однородность ядра коагуляции  $K$  при  $\sigma = 1$ , условие  $2\gamma + 1 = 0$  и выполняя замену переменных в интегралах, получаем фактор-уравнение

$$\frac{1}{\alpha} (H(z) - \gamma z H'(z)) = \frac{1}{2} \int_0^z K(z - s, s) H(z - s) H(s) ds - H(z) \int_0^\infty K(z, s) H(s) ds,$$

где  $z = v e^{-\gamma t/\alpha}$ .

В случае  $\beta \neq 0, \gamma(\sigma + 1) + 1 = 0, \alpha = 0, \gamma \neq 0$  имеем

$$f(t, v) = v^{1/\gamma} H(t)$$

и из условия (17) следует отсутствие нетривиальных инвариантных решений.

В случае  $\beta \neq 0, \gamma(\sigma + 1) + 1 \neq 0, \gamma \neq 0$  имеем

$$f(t, v) = (t - \alpha q_1)^{-q} H(v(t - \alpha q_1)^{\gamma q}),$$

где

$$q = [\gamma(\sigma + 1) + 1]^{-1}, \quad q_1 = \alpha q.$$

Из условия (17) следует соотношение

$$M_1 = \int_0^\infty v f(t, v) dv = (t - \alpha q_1)^{-q(1+2\gamma)} \int_0^\infty s H(s) ds = \text{const},$$

которое выполняется только при условии

$$\gamma = -1/2.$$

При этом

$$q = 2/(\sigma - 1).$$

Решение, полученное Т. Е. Шуманом для  $K = 1$  ( $\sigma = 0$ ) [8, 9], принадлежит этому классу решений.

В случае  $\beta = 0$ ,  $\gamma \neq 0$  имеем

$$f(t, v) = H(v(t - \alpha q_1)^q),$$

где

$$q = (\sigma + 1)^{-1}, \quad q_1 = \alpha q.$$

Для этого инвариантного решения момент первого порядка имеет вид

$$M_1 = \int_0^\infty v f(t, v) dv = (t - \alpha q_1)^{-2q} \int_0^\infty s H(s) ds.$$

Однако закон сохранения полной массы (17) может быть выполнен только при  $q = 0$ , что противоречит исходному выражению, т. е. такое решение не имеет физического смысла.

4.2. *Уравнение для преобразования Лапласа.* Поскольку при исследовании решений уравнения Смолуховского используется уравнение (4) для преобразования Лапласа, рассмотрим соответствие между алгебрами Ли, допустимыми этими уравнениями (такое соответствие не всегда является взаимно однозначным [14]).

Используя преобразование Лапласа

$$F(t, p) = \int_0^\infty e^{-sp} f(t, s) ds,$$

находим, что оператору

$$X_3 = -(\sigma + 1)t \partial_t + v \partial_v$$

соответствует оператор

$$\tilde{X}_3 = -(\sigma + 1)t \partial_t + F \partial_F - p \partial_p.$$

Действительно, преобразования, соответствующие оператору  $X_3$ , переводят функцию  $f(t, v)$  в функцию

$$\bar{f}(\bar{t}, \bar{v}) = f(e^{(\sigma+1)a} \bar{t}, e^{-a} \bar{v}),$$

где  $a$  — параметр группы. Доказательство данного утверждения следует из вычислений

$$\bar{F}(\bar{t}, \bar{p}) = \int_0^\infty e^{-s\bar{p}} \bar{f}(\bar{t}, \bar{s}) d\bar{s} = \int_0^\infty e^{-s\bar{p}} f(e^{(\sigma+1)a} \bar{t}, e^{-a} \bar{s}) d\bar{s} = e^a F(e^{(\sigma+1)a} \bar{t}, e^a \bar{p}).$$

Аналогичным образом можно показать, что операторам  $X_1 = \partial_t$  и  $X_2 = f \partial_f - t \partial_t$  соответствуют операторы

$$\bar{X}_1 = \partial_t, \quad \bar{X}_2 = F \partial_F - t \partial_t.$$

Таким образом, для уравнения (4) необходимо изучить алгебру Ли с операторами

$$\bar{X}_1 = \partial_t, \quad \bar{X}_2 = F \partial_F - t \partial_t, \quad \bar{X}_3 = \sigma t \partial_t + p \partial_p.$$

Поскольку

$$M_1 = -\frac{\partial}{\partial t} (F_p(t, 0)),$$

условие (17) приводит к ограничению

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_p(t, 0)) = 0. \quad (20)$$

Как и в случае исходного уравнения, можно рассматривать допустимый оператор в общем виде

$$X = \alpha \partial_t + \beta(F \partial_F - t \partial_t) + \gamma(\sigma t \partial_t + p \partial_p)$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  — произвольные постоянные). При этом, как и в подп. 4.1, делаются следующие предположения: если  $\beta \neq 0$ , то  $\beta = 1$ ; если  $\beta = 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , то  $\gamma = 1$ . Во всех случаях функция  $H$  в представлениях инвариантных решений зависит от одной переменной.

В случае  $\beta \neq 0, \gamma = 0$  инвариантные решения имеют вид

$$F(t, p) = (t - \alpha)^{-1} H(p).$$

Из условия (20) получаем  $H'(0) = 0$  или  $M_1 = 0$ . Поэтому данное решение не имеет физического смысла.

В случае  $\beta \neq 0, \gamma \sigma = 1, \alpha \neq 0$  инвариантное решение принимает вид

$$F(t, p) = e^{t/\alpha} H(p e^{-\gamma t/\alpha})$$

или

$$\Phi(t, p) = e^{t/\alpha} H(z), \quad z = p e^{-\gamma t/\alpha}. \quad (21)$$

Из условия (20) находим

$$M_1 = -e^{(1-\gamma)t/\alpha} H'(0) = \text{const}.$$

При этом нетривиальное решение существует только для случая

$$\gamma = 1, \quad \sigma = 1.$$

В частности, для ядра  $K(v_1, v_2) = v_1 + v_2$  подстановка в уравнение (5) представления инвариантного решения (21) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(z - H)H' = kH, \quad k = \alpha^{-1} - H'(0).$$

Выполнив замену  $H(z) = zv(z)$ , получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{1-v}{v(v+k-1)} dv = \frac{1}{z} dz,$$

которое при  $k = 1$  имеет интеграл  $zv e^{1/v} = C$ , при  $k \neq 1$  — интеграл

$$\left(\frac{v}{v+k-1}\right)^{1/(k-1)} = Cz(v+k-1)$$

( $C$  — произвольная постоянная интегрирования). Используя исходную переменную  $H(z)$ , находим  $H e^{z/H} = C$  при  $k \neq 1$  и  $(H/(H+z(k-1)))^{1/(k-1)} = C(H+z(k-1))$  при  $k = 1$ . В обоих случаях выполнение условий  $H(0) = 0$  и  $H' \neq 0$  приводит к нефизичности этих решений.

В случае  $\beta \neq 0, \gamma \sigma = 1, \alpha = 0$  инвариантное решение имеет вид

$$F(t, p) = p^{1/\gamma} H(t).$$

Из условия (20) следует, что в этом случае физически непротиворечивые инвариантные решения отсутствуют.

В случае  $\beta \neq 0$ ,  $\gamma\sigma \neq 1$ ,  $\gamma \neq 0$  имеем

$$F(t, p) = (t - q_1)^{-q} H(p(t - q_1)^{\gamma q}),$$

где

$$q = (1 - \gamma\sigma)^{-1}, \quad q_1 = \alpha q.$$

Из условия (20) находим

$$M_1 = (t - q_1)^{(\gamma-1)q} H'(0).$$

Таким образом, в случае нетривиальных инвариантных решений  $\gamma = 1$  и, следовательно,  $\sigma \neq 1$ . Заметим, что решение Шумана [8, 9] для  $K = 1$  ( $\sigma = 0$ ) принадлежит данному классу решений.

В случае  $\beta = 0$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $\sigma \neq 0$  имеем

$$F(t, p) = H(p(t - q_1)^q), \quad (22)$$

где

$$q = -\sigma^{-1}, \quad q_1 = \alpha q.$$

Однако закон сохранения полной массы (20) выполняется только при  $q = 0$ , что противоречит выражению (22). Таким образом, данное решение не имеет физического смысла.

В случае  $\beta = 0$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $\alpha = 0$  инвариантные решения имеют вид  $F(t, p) = H(t)$  и  $F(t, p) = H(p e^{-\alpha t})$ . Эти представления также противоречат условию (20).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для неоднородных ядер коагуляции выше было получено два расширения ядра допустимых операторов:

$$\begin{aligned} c \neq 0, \quad a = b^2/c: & \quad X_4 = e^{bp/c} \partial_F, \\ c = 0, \quad ab \neq 0: & \quad \bar{X}_3 = 2b(e^{ap/(2b)} - 1) \partial_p + a e^{ap/(2b)} \Phi \partial_\Phi. \end{aligned}$$

В первом случае ядро коагуляции является параболическим:

$$K(v_1, v_2) = c^{-1}(b + cv_1)(b + cv_2).$$

Решения, инвариантные относительно операторов с аддитивной добавкой в них оператора  $X_4$ , включают дополнительное слагаемое в виде  $e^{bp/c}$ .

Во втором случае получаем два вида инвариантных решений

$$F(p, t) = F_0(t) + \Phi_i(p, t), \quad i = 1, 2,$$

где  $F_0(t)$  — решение уравнения (6), функции  $\Phi_i(p, t)$  ( $i = 1, 2$ ) — инвариантные решения уравнения (5). В случае  $i = 1$  функция имеет представление

$$\Phi_1(p, t) = (e^{ap/(2b)} - 1)^{(a+\alpha)/a} e^{-\alpha p/(2b)} H(z), \quad z = t(e^{ap/(2b)} - 1)^{\alpha/a}, \quad \alpha > 0. \quad (23)$$

Подставляя (23) в уравнение (5), получаем фактор-уравнение

$$H' = -\frac{(a + \alpha)H^2}{\alpha z H + 2},$$

которое путем замены  $y = z$ ,  $x = H^{-1}$  приводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(a + \alpha)xy' = \alpha y + 2x. \quad (24)$$

Уравнение (24) интегрируется в явном виде. Однако данное решение не имеет физического смысла, так как для представления (23)  $\Phi_{1p}(0, t) = 0$  и закон сохранения полной массы не выполняется, в случае если константа равна нулю.

В случае  $i = 2$  представление инвариантного решения уравнения (5) имеет вид

$$\Phi_2(p, t) = C(e^{ap/(2b)} - 1),$$

где  $C$  — произвольная постоянная, соответствующая значению первого момента функции распределения. Однако выполнить обратное преобразование Лапласа не удастся.

**5. Допустимая группа Ли моментной системы уравнений.** Построенные допустимые группы Ли уравнений для производящей функции моментов  $G$  или лаплас-образа  $F$  позволяют найти некоторые частные решения определяющих уравнений для моментной системы. Покажем это на примере ядра коагуляции, в котором  $c = 0$ ,  $ab \neq 0$ , и уравнения для функции  $\Psi = G(\xi, t) - G(0, t)$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{a}{2} \Psi^2 + b \left( \frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial p}(0) \right) \Psi. \quad (25)$$

Уравнение (25) отличается от уравнения для функции  $\Phi(p, t)$  только знаком при коэффициенте  $b$ .

Оператор, допустимый системой уравнений (8), ищется в виде

$$X = \tau \partial_t + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^{\mu_k} \partial_{\mu_k},$$

где коэффициенты оператора зависят от времени  $t$  и нормированных моментов  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ).

Рассмотрим оператор  $\tilde{X}_3 = 2b(e^{-a\xi/(2b)} - 1) \partial_{\xi} + a e^{-ap/(2b)} \Psi \partial_{\Psi}$ , допустимый уравнением (25). Преобразования, соответствующие этому оператору, задаются формулой

$$\bar{G}(\bar{\xi}) = (1 + e^{-a\bar{\xi}/(2b)}(e^{-a\tau/(2b)} - 1))G(\varphi),$$

где

$$\varphi(\bar{\xi}) = (2b/a) \ln (e^{a\tau/(2b)}(e^{a\bar{\xi}/(2b)} - 1) + 1),$$

$\tau$  — групповой параметр.

Далее используем соотношение

$$\left( \frac{\partial \bar{G}(\bar{\xi})}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} = -\frac{a}{2b} e^{-a\bar{\xi}/(2b)} G(\bar{\xi}) + (1 - e^{-a\bar{\xi}/(2b)}) G_{\xi}(\bar{\xi}).$$

Так как нормированные моменты определяются формулами

$$\mu_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial^k G(\xi)}{\partial \xi^k} \right) \Big|_{\xi=0}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

преобразованные нормированные моменты принимают вид

$$\bar{\mu}_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial^k \bar{G}(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^k} \right) \Big|_{\bar{\xi}=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты допустимого оператора находятся по формулам

$$\begin{aligned} \zeta^{\mu_k} &= \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^k \bar{G}(\bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}^k} \right) \Big|_{\bar{\xi}=0} \right) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} \left( \frac{\partial \bar{G}(\bar{\xi})}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=0} \right) \Big|_{\bar{\xi}=0} = \\ &= -\frac{1}{k!} \frac{a}{2b} \left( \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} \left( e^{-a\bar{\xi}/(2b)} G(\bar{\xi}) \right) \right) \Big|_{\bar{\xi}=0} + \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} \left( (1 - e^{-a\bar{\xi}/(2b)}) G_\xi(\bar{\xi}) \right) \right) \Big|_{\bar{\xi}=0}. \end{aligned}$$

Используя формулу Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} \left( e^{-a\bar{\xi}/(2b)} G(\bar{\xi}) \right) &= e^{-a\bar{\xi}/(2b)} \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} (G(\bar{\xi})) + G(\bar{\xi}) \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} \left( e^{-a\bar{\xi}/(2b)} \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-n)!n!} \frac{\partial^{k-n}}{\partial \bar{\xi}^{k-n}} \left( e^{-a\bar{\xi}/(2b)} \right) \frac{\partial^n}{\partial \bar{\xi}^n} (G(\bar{\xi})), \\ \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} \left( (1 - e^{-a\bar{\xi}/(2b)}) G_\xi(\bar{\xi}) \right) &= (1 - e^{-a\bar{\xi}/(2b)}) \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} (G_\xi(\bar{\xi})) + G_\xi(\bar{\xi}) \frac{\partial^k}{\partial \bar{\xi}^k} (1 - e^{-a\bar{\xi}/(2b)}) + \\ &+ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-n)!n!} \frac{\partial^{k-n}}{\partial \bar{\xi}^{k-n}} (1 - e^{-a\bar{\xi}/(2b)}) \frac{\partial^n}{\partial \bar{\xi}^n} (G_\xi(\bar{\xi})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\zeta^{\mu_k} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n}.$$

Таким образом, получаем оператор

$$Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{k-1} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} \right) \partial_{\mu_k},$$

допускаемый системой уравнений (8). Это свойство проверялось также путем прямой подстановки найденных коэффициентов в определяющие уравнения. Проверка проводилась с помощью программы, разработанной для построения определяющих уравнений для уравнений с частными производными.

Для операторов  $\partial_t$  и  $t\partial_t - \Psi\partial_\Psi$  соответствующие им допустимые операторы для системы уравнений (8) находим следующим образом:

$$Z_2 = t\partial_t - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \partial_{\mu_k}, \quad Z_3 = \partial_t.$$

**6. Инвариантные решения моментной системы.** Для построения инвариантных решений используем оптимальную систему подалгебр для алгебры Ли операторов  $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$ , которая состоит из подалгебр

$$\{Z_2 + \alpha Z_1\}, \quad \{Z_3 + \alpha Z_1\}, \quad \{Z_1\},$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная.

6.1. *Инвариантные решения относительно  $\{Z_2 + \alpha Z_1\}$ .* Инварианты подалгебры

$$\begin{aligned} Z_2 + \alpha Z_1 &= t \partial_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\mu_k + \alpha \sum_{n=0}^{k-1} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} \right) = \\ &= t \partial_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha \sum_{n=0}^{k-2} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} + q_k \mu_k \right), \end{aligned}$$

где

$$q_k = (k-1)\alpha a / (2b) - 1,$$

зависят от величины  $\alpha$ .

В случае если  $\alpha a = 0$ , представление инвариантного решения имеет вид

$$\mu_k = c_k / t, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $c_k$  постоянны. Подставляя представления инвариантного решения в (8), получаем фактор-уравнения

$$\begin{aligned} c_n + \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + b \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) c_{k+1} c_{n-k} &= \\ &= (1 + bnc_1) c_n + \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + b \sum_{k=1}^{n-2} (k+1) c_{k+1} c_{n-k} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В частности, для  $n = 1$  имеем  $c_1 = 0$ . Следовательно,

$$c_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, в случае  $\alpha a = 0$  инвариантное решение может быть только тривиальным.

В случае если  $\alpha a \neq 0$ , представление инвариантного решения определяется рекуррентно:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= c_1, \\ \mu_k &= t^{q_k} \left( c_k + \int_{t_0}^t \tau^{-(q_k+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha \sum_{n=0}^{k-2} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} \right) d\tau \right), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

При этом выполняется закон сохранения полной массы.

6.2. *Инвариантные решения относительно  $\{Z_3 + \alpha Z_1\}$ .* Как и в подп. 6.1, инварианты подалгебры

$$Z_3 + \alpha Z_1 = \partial_t + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left( (k-1) \frac{a}{2b} \mu_k + \sum_{n=0}^{k-2} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} \right) \partial_{\mu_k}$$

зависят от  $\alpha$ .

В случае если  $\alpha a = 0$ , представление инвариантного решения имеет вид

$$\mu_k = c_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $c_k$  постоянны. Подставляя представления инвариантного решения в (8), получаем фактор-уравнения

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + b \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) c_{k+1} c_{n-k} &= \\ &= bnc_1 c_n + \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} + b \sum_{k=1}^{n-2} (k+1) c_{k+1} c_{n-k} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если  $bc_1 \neq 0$ , то константы  $c_k$  определяются рекуррентно.

В случае если  $\alpha a \neq 0$ , представление инвариантного решения определяется последовательно:

$$\mu_1 = c_1,$$

$$\mu_k = e^{q_k t} \left( c_k + \alpha \int_{t_0}^t e^{-q_k \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{k-2} \left( -\frac{a}{2b} \right)^{k-n} \frac{k-2n-1}{(k-n)!} \mu_{n+1} \right) d\tau \right), \quad k = 2, 3, \dots$$

Здесь  $q_k = (k-1)\alpha a/(2b)$ . В обоих случаях выполняется закон сохранения полной массы.

6.3. *Инвариантные решения относительно  $\{Z_1\}$ .* В данном случае инвариантные решения отсутствуют, так как недостаточно инвариантов для нахождения нормированных моментов  $\mu_k$ . Этот случай аналогичен случаю нахождения представления частично инвариантного решения.

**Заключение.** Исследованы групповые свойства уравнения Смолуховского для линейной комбинации простых однородных ядер коагуляции и его следствий, таких как уравнение для преобразования Лапласа, бесконечная система уравнений для степенных моментов его решения, уравнение для производящей функции степенных моментов.

Для уравнения Смолуховского на основе решения определяющего уравнения вычислена полная допустимая группа Ли. Для частных случаев простейших однородных ядер подтверждена полнота расширений этой группы, полученных ранее с использованием альтернативного метода “покрытий”. Для этих случаев получены представления инвариантных решений и фактор-уравнения для них, а также проанализирована их совместность с законом сохранения полной массы коагулянта.

Для преобразования Лапласа уравнения Смолуховского (уравнения для производящей функции моментов) построена полная допустимая группа Ли, а также ее расширения для частных случаев простейших однородных ядер. Исследовано их соответствие допустимым группам исходного уравнения. Как и для уравнения Смолуховского с простыми однородными ядрами, для уравнения преобразования Лапласа получены представления инвариантных решений, фактор-уравнения для них и изучена их совместность с законом сохранения полной массы.

В случае бесконечной системы уравнений для степенных моментов функции распределения с использованием допустимой группы Ли для частного случая уравнения для производящей функции моментов вычислены операторы допустимой группы и ее оптимальная система подалгебр. Найдены соответствующие подалгебрам представления инвариантных решений и фактор-уравнения для них. Рассмотрено их соответствие закону сохранения полной массы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1959.
2. **Leyras F.** Scaling theory and exactly solvable models in the kinetics of irreversible aggregation // Phys. Rep. 2003. V. 383, N 95. P. 1–160.
3. **Leyras F.** Rigorous results in the scaling theory of irreversible aggregation // J. Nonlinear Math. Phys. 2005. V. 12, suppl. 1. P. 449–465.
4. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.** Исследование инвариантных решений кинетического уравнения Больцмана и его моделей. Новосибирск, 1986. (Препр. / СО АН СССР. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 18-86).



6. **Grigoriev Yu. N.** Symmetries of integro-differential equation with applications in mechanics and plasma physics / Yu. N. Grigoriev, N. H. Ibragimov, V. F. Kovalev, S. V. Meleshko. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. (Lecture Notes Phys.; V. 806).
7. **Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V.** Group analysis of kinetic equations // Russ. J. Anal. Math. Modelling. 1995. V. 10, N 5. P. 425–447.
8. **Волощук В. М.** Процессы коагуляции в дисперсных системах / В. М. Волощук, Ю. С. Седунов. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
9. **Волощук В. М.** Кинетическая теория коагуляции. Л.: Гидрометеиздат, 1984.
10. **Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G.** A method for computing symmetries and conservation laws of integro-differential equations // Acta Appl. Math. 1995. N 41. P. 45–56.
11. **Коган М. Н.** Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
12. **Krook M., Wu T. T.** Exact solutions of the Boltzmann equation // J. Phys. Fluids. 1977. V. 20, N 10. P. 1589–1595.
13. **Nonenmacher T. F.** Application of the similarity method to the nonlinear Boltzmann equation // Z. angew. Math. Phys. 1984. Bd 35, N 5. S. 680–691.
14. **Grigoriev Yu. N., Meleshko S. V., Suriyawichitseranee A.** On group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with sources // Intern. Non-Linear Mech. 2012. V. 47. P. 1014–1019.
15. **Hearn A. C.** Reduce users manual, ver. 3.3. Santa Monica: Rand Corp. CP 78, 1987.
16. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations. N. Y.: Springer, 2005.

*Поступила в редакцию 28/IX 2018 г.,  
после доработки — 28/IX 2018 г.  
Принята к публикации 29/X 2018 г.*

---