ПМТФ, № 3, 1965

О ВЛИЯНИИ ТОКОВ ХОЛЛА НА ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ПОТОКОВ

Г. М. Бам-Зеликович

(Москва)

В работе [1] рассмотрено течение сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла для случая, когда проводимость $\sigma = \infty$. В работе [2] задача о влиянии токов Холла на течение в ускорителе решается для каналов с очень малым отношением высоты канала к его длине, когда можно полагать проекцию скорости на направление высоты канала равной нулю. Ниже решается задача о влиянии токов Холла на течение проводящего газа при конечной проводимости и с учетом наличия двух компонент скорости для случая ускорения газа до больших скоростей ($\sim 50 \div 100$ *км / сек*).

1. Рассмотрим установившееся движение проводящего газа в канале прямоугольной формы с постоянной площадью сечения. Направим ось x вдоль оси канала, ось y — по высоте канала и ось z — перпендикулярно к боковым стенкам канала. Основные предположения, при которых будет решаться задача о влиянии на течение газа в канале ускорителя токов Холла, следующие.

1. Внешнее магнитное поле имеет одну компоненту, направленную по оси z, величина которой $H_z = H(x)$ может зависеть от x. Строго говоря, при $H \neq \mathrm{const}$ будет также отличная от нуля компонента H_x, равная по порядку величине $H_x \sim (z_0 / L) \Delta H$, где z_0 — ширина канала, L — его длина и ΔH — характерная величина изменения H. В дальнейшем будем предполагать, что либо $\Delta H \ll H$, либо $z_0 / L \ll 1$. В обоих случаях $H_x \ll H$ так что компонентой магнитного поля вдоль оси x можно пренебречь.

2. Магнитное число Рейнольдса $R_m \ll 1$; индуцированным магнитным полем можно пренебречь по сравнению с внешним.

3. Можно пренебречь влиянием вязкости.

4. К верхней и нижней стенкам канала приложена переменная по длине разность потенциалов $\varphi(x)$, но такая, что составляющая внешнего электрического поля по оси x мала по сравнению с компонентой вдоль оси y.

5. Искажения электрического поля у границ канала мало влияют на движение газа в рассматриваемой области канала.

6. Проводимость σ постоянна в рассматриваемой области течения; также постоянна величина $k = \omega\tau$, где ω — циклотронная частота вращения электронов, а τ — время свободного пробега электрона. При этом будем предполагать, что величина k не очень мала (токи Холла существенны), но все же $k < 1$, так что $1 + k^2 \approx 1$ (например $k \approx 0.1 \div 0.3$).

7. Движение можно рассматривать как двумерное, т. е. граничные условия таковы, что все искомые величины не зависят от координаты z.

8. Газ совершенный и подчиняется уравнению состояния Клайперона.

9. Во всем дальнейшем будет рассматриваться ускорение в сильных электромагнитных полях, когда характерные значения скорости достигают величин $u \sim 5 \cdot 10^6 \div 10^7$ *см / сек*.

При сделанных предположениях можно пренебречь в уравнениях движения градиентом давления по сравнению с инерционными членами.

Действительно, принимая, что в процессе движения все переменные изменяются на порядок своей величины и оценивая по порядку величин члены в проекции уравнения движения на ось x, имеем

$$p_x' / \rho u u_x' \sim RT / u^2$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, T — температура газа, u — проекция скорости газа на ось x и R — газовая постоянная.

Это отношение для многих газов и паров щелочных металлов при рассматриваемых скоростях u имеет значение порядка 0.001 и меньше даже для температур $T \sim 10^{4\circ}$ K.

Оценка членов в проекции уравнения движения на ось y дает

$$p_y' / \rho u v_x' \sim (RT / u^2)(L^2 / y_0^2)$$

Здесь v — проекция скорости газа на ось y и y_0 — высота канала. При выводе этого соотношения учтено, что $v / u \sim y_0 / L$. При длине канала, в $5 \div 10$ раз большей его высоты, и тех же параметрах потока, что и выше, правая часть равна $0.025 \div 0.1$.

Закон Ома в рассматриваемом случае имеет вид (см., например, [3])

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{H} / c) - k(\mathbf{j} \times \mathbf{H}) / H$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического, $\mathbf{H}$ — магнитного поля, $\mathbf{V}$ — скорость потока и c — скорость света в пустоте.

Разрешая его относительно проекций плотности тока на оси x и y и учитывая сделанные выше предположения относительно электрического и магнитного полей, получим

$$j_x = [\sigma / (1 + k^2)] [E_x + vH / c - k(E_y - uH / c)] \qquad (1.1)$$

$$j_y = [\sigma / (1 + k^2)] [E_y - uH / c + k(E_x + vH / c)] \qquad (1.2)$$

Уравнение неразрывности электрического тока $\partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y = 0$ при этом дает

$$E_y' + (H / c)[v_x' - u_y' + k(u_x' + v_y')] = 0 \qquad (1.3)$$

Здесь $E_y = E$, а штрихи и индексы обозначают частные производные. При выводе (1.3) учтено, что $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, а также то, что в силу сделанных предположений $\partial E_x / \partial x \sim (y_0^2 / L^2) \partial E / \partial y$ и, следовательно, $\partial E_x / \partial x$ может быть отброшена как малая величина. Уравнения неразрывности и движения с учетом сделанных оценок принимают вид

$$(\rho u)_x' + (\rho v)_y' = 0, \qquad \rho u u_x' + \rho v u_y' = H j_y / c$$
$$\rho u v_x' + \rho v v_y' = -H j_x / c \qquad (1.4)$$

Система уравнений (1.1) — (1.4) представляет замкнутую систему шести уравнений относительно шести неизвестных функций ρ, u, v, E, j_x и j_y.

Граничные условия для нее могут быть приняты в следующем виде: в некотором сечении $x = 0$, где влияние токов Холла еще не сказалось, можно считать заданными все параметры

$$u = u_{00} = \text{const}, \quad v = 0, \quad \rho = \rho_{00} = \text{const} \quad \text{при } x = 0 \qquad (1.5)$$

Кроме того, на верхней и нижней стенках имеем

$$v = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = y_0, \qquad \int_0^{y_0} E dy = \varphi(x) \qquad (1.6)$$

Последнее условие выражает то, что разность потенциалов между верхней и нижней стенками канала — заданная величина.

Решение системы (1.1) — (1.4) в общем случае возможно только численными методами. Поэтому будем искать приближенное решение, раскладывая все искомые величины в ряды по степеням k и ограничиваясь линейными относительно k членами. Положим

$$u = u_0 + k u_1, \quad v = v_0 + k v_1, \quad \rho = \rho_0 + k \rho_1, \quad E = E_0 + k E_1 \qquad (1.7)$$

Не проводя вычислений, можно сделать некоторые общие замечания о картине течения в рассматриваемом случае. В отсутствие токов Холла ($k = 0$) движение в канале при сделанных предположениях было бы одномерным. Токи Холла приводят к возникновению силы, направленной по оси y и действующей на все частицы газа. Эта сила вызывает движение в направлении оси y. Сделанные выше оценки показывают, что в рассматриваемом случае скорость частиц v в направлении оси y будет сверхзвуковая.

Так как влиянием вязкости пренебрегаем, то частицы газа, приобретая скорость в направлении оси y, отрываются от нижней стенки. У нижней стенки возникает область вакуума. В реальных условиях вследствие действия вязкости и диффузии абсолютного вакуума не будет, а будет зона с крайне малой плотностью. Поэтому можно предполагать, что эта зона обладает конечной проводимостью.

У верхней стенки канала должно происходить торможение от сверхзвуковой скорости v до $v = 0$. При этом будет возникать у верхней стенки скачок уплотнения. Таким образом, в рассматриваемом случае течение в канале распадается на три зоны: зону вакуума у нижней стенки, ядро потока в канале и зону за скачком уплотнения у верхней стенки.

Если $y_0 - y^1$ — высота зоны за скачком уплотнения, то аналогично (1.7) можно записать $y_0 - y^1 = y_0^1 + ky_1^1$. Но при отсутствии токов Холла ($k = 0$) скачка нет, т. е. $y_0^1 = 0$. Такие же рассуждения справедливы и о высоте зоны вакуума у нижней стенки. Таким образом, можно заключить, что отношение высоты зоны вакуума и высоты зоны за скачком уплотнения к высоте канала должно быть порядка k.

2. Рассмотрим течение в ядре потока. Так как u_0, v_0, ρ_0, E_0 — значения переменных в случае, когда токов Холла нет ($k = 0$) и движение в канале одномерное, то $v_0 = 0$, а u_0, ρ_0 и E_0 могут зависеть только от x. Замечая это, подставим выражения (1.7) в (1.3), (1.4), исключив предварительно j_x и j_y, и в граничные условия (1.5), (1.6). Приравнивая члены с одинаковыми степенями k, получим системы уравнений для определения величин нулевого и первого приближений

$$v_0 = 0, \qquad u_{0y}' = 0, \qquad E_{0y}' = 0$$
$$(\rho_0 u_0)_x' = 0, \qquad \rho_0 u_0 u_{0x}' = (\sigma H / c)(E_0 - u_0 H / c) \tag{2.1}$$

$$u_0 = u_{00}, \quad \rho_0 = \rho_{00} \quad \text{при } x = 0, \qquad \int_0^{y_0} E_0\, dy = \varphi(x) \tag{2.2}$$

$$(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)_x' + (\rho_0 v_1)_y' = 0$$
$$(\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) u_{0x}' + \rho_0 u_0 u_{1x}' = (\sigma H / c)(E_1 - H u_1 / c)$$
$$\rho_0 u_0 v_{1x}' = -(\sigma H / c)(H v_1 / c - E_0 + H u_0 / c) \tag{2.3}$$
$$E_{1y}' + (H / c)(v_{1x}' - u_{1y}' + u_{0x}') = 0$$

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \rho_1 = 0 \quad \text{при } x = 0, \qquad \int_0^{y_0} E_1\, dy = 0 \tag{2.4}$$

Здесь интеграл от E_1 взят по всей высоте канала, а не только по высоте ядра потока. Это можно делать с принятой степенью точности потому, что, как было указано выше, разность высот ядра потока и всего канала будет порядка k. Но интеграл (2.4) сам является коэффициентом в члене порядка k разложения в ряд интеграла (1.6). Поэтому изменение пределов интегрирования приводит к поправке порядка лишь k^2, т. е. к поправке такого порядка, которым всюду пренебрегаем.

Интегрируя уравнения (2.1) и учитывая условия (2.2), найдем

$$\rho_0 u_0 = \rho_{00} u_{00}, \qquad E_0 = \varphi / y_0 \tag{2.5}$$

$$u_0 = e^{-\Lambda(x)} \left\{u_{00} + \frac{\sigma}{c\rho_{00} u_{00} y_0} \int_0^x H\varphi e^{\Lambda(x)} dx\right\}, \qquad \Lambda(x) = \frac{\sigma}{c^2 \rho_{00} u_{00}} \int_0^x H^2 dx$$

Система уравнений (2.3) для функций первого приближения является системой четырех линейных уравнений первого порядка в частных производных. Ее решение удается свести к вычислению квадратур.

Подставим полученные для u_0, ρ_0 и E_0 выражения в третье уравнение (2.3). Оно оказывается линейным уравнением относительно неизвестной функции v_1, не содержащим производной v_{1y}'; коэффициенты этого уравнения зависят только от x. Интегрируя его по x и учитывая, что $v_1 = 0$ при $x = 0$, получим

$$v_1 = e^{-\Lambda(x)} \left\{\frac{\sigma}{c\rho_{00} u_{00} y_0} \int_0^x H\varphi e^{\Lambda(x)} dx - \frac{\sigma}{c^2 \rho_{00} u_{00}} \int_0^x H^2 u_0 e^{\Lambda(x)} dx\right\} \tag{2.6}$$

Из выражения (2.6) видно, что v_1 является функцией только одного переменного x. Учитывая это, из первого уравнения (2.3) находим

$$\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0 = 0 \qquad \rho_1 = -\rho_0 u_1 / u_0 \tag{2.7}$$

При выводе формул (2.7) были использованы граничные условия (2.4) для u_1 и ρ_1. Исключая ρ_1 из второго и третьего уравнений (2.3), получим систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для определения неизвестных функций u_1 и E_1

$$u_{1x}' + \frac{\sigma}{c^2 \rho_{00} u_{00}} H^2 u_1 = \frac{\sigma}{c\rho_{00} u_{00}} H E_1, \qquad E_{1y}' - \frac{H}{c} u_{1y}' = -\frac{1}{c} H (v_1 + u_0)_x' \tag{2.8}$$

Здесь v_1, u_0 и H — известные функции x.

Продифференцируем первое уравнение по y и подставим в полученное соотношение E_{1y}' из второго уравнения

$$u_{1xy}'' = -\sigma H^2 (v_1 + u_0)_x' / c^2 \rho_{00} u_{00}$$

Интегрируя это уравнение дважды по x и по y и учитывая условия (2.4), вычислим u_1, после чего из первого уравнения (2.8) найдем E_1

$$u_1 = -\frac{\sigma}{c^2 \rho_{00} u_{00}} y \int_0^x H^2 (v_1 + u_0)_x' dx + \Phi(x), \qquad E_1 = \frac{H}{c} u_1 + \frac{c\rho_{00} u_{00}}{\sigma H} u_{1x}' \tag{2.9}$$

Здесь $\Phi(x)$ — произвольная функция x, причем $\Phi(0) = 0$, так как $u_1 = 0$ при $x = 0$. Функцию $\Phi(x)$ определим из последнего условия (2.4). Подставим u_1 в выражение для E_1 и проинтегрируем по y от нуля до $y = y_0$. При этом, так как левая часть обратится в нуль, получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно $\Phi(x)$

$$\Phi_x' + \frac{\sigma H^2}{c^2 \rho_{00} u_{00}} \Phi = \frac{\sigma y_0 H}{2c^2 \rho_{00} u_{00}} \left\{\frac{\sigma H}{c^2 \rho_{00} u_{00}} \int_0^x H^2 (v_1 + u_0)_x' dx + H (v_1 + u_0)_x'\right\}$$

Отсюда, учитывая, что $\Phi(0) = 0$

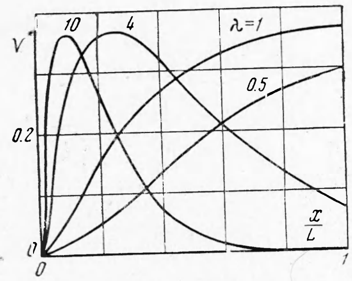
$$\Phi = \frac{\sigma y_0}{2c^2 \rho_{00} u_{00}} e^{-\Lambda(x)} \int_0^x \left\{\frac{\sigma H^2}{c^2 \rho_{00} u_{00}} \int_0^x H^2 (v_1 + u_0)_x' dx + H^2 (v_1 + u_0)_x'\right\} e^{\Lambda(x)} dx \tag{2.10}$$

Формулы (2.5) — (2.10) дают решение поставленной задачи при произвольной зависимости магнитного поля H и разности потенциалов на электродах φ от x. Если $H = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, то интегралы, входящие в формулы (2.5) — (2.10), могут быть вычислены.

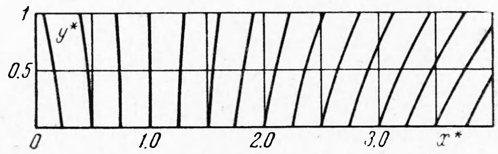
Не проводя выкладок, приведем формулы для этого случая

$$u_0 / u_{00} = 1 + U(1 - e^{-x^*}) + kU(0.5y_0^* - y^*)(x^* e^{-x^*} - e^{-x^*} + 1)$$
$$v / u_{00} = kUx^* e^{-x^*}, \quad Ec / Hu_{00} = 1 + U + kU(0.5y_0^* - y^*)(e^{-x^*} + 1)$$
$$\lambda = \sigma H^2 L / c^2 \rho_{00} u_{00}, \quad U = -1 + \varphi c / y_0 H u_{00} \qquad (2.11)$$
$$x^* = \lambda x / L, \quad y^* = \lambda y / L, \qquad y_0^* = \lambda y_0 / L$$

Формулы (2.11) показывают, что при наличии токов Холла проекция u скорости на ось x в нижней половине канала ($y < 0.5\, y_0$) больше, а в верхней меньше, чем при отсутствии токов Холла (при $k = 0$). Увеличение скорости u приводит к возникновению большей напряженности электрического поля E в нижней половине канала. Проекция скорости на ось y, возникающая при



Фиг. 1



Фиг. 2

наличии токов Холла, в первом приближении оказывается постоянной по сечению. По длине же канала она сначала возрастает, достигая максимума в сечении $x / L = 1 / \lambda$, а затем убывает. Величина $\max v = ku_{00} U e^{-1}$ и не зависит от λ. Функция $v\,(x / L)$ при различных значениях λ показана на фиг. 1, где $V^* = v / ku_{00} U$. Из (2.11) и фиг. 1 видно, что при $\lambda \geqslant 1$ сечение, в котором v достигает максимума, лежит внутри канала, а при $\lambda < 1$ — вне его. Чем больше λ, тем быстрее изменяется значение v. Для того чтобы объяснить такое поведение v, рассмотрим протекание электрического тока в канале. Из формул (1.1) и (1.2) имеем, отбрасывая малые высшего порядка

$$j_y = \sigma(E - uH / c), \qquad j_x = \sigma[vH / c - k(E - uH / c)] \qquad (2.12)$$

Подставляя в эти формулы значения E, u и v из (2.11) и сохраняя лишь члены наинизшего порядка малости, получим

$$j_y = (\sigma H u_{00} / c)\, U e^{-x^*}, \qquad j_x = (\sigma H u_{00} / c)\, kU(x^* - 1)\, e^{-x^*} \qquad (2.13)$$

Отсюда находим дифференциальное уравнение линий электрического тока и сами линии электрического тока (X^* — значение x^* при $y^* = 0$).

$$dx^* / dy^* = j_x / j_y = k(x^* - 1), \qquad |x^* - 1| = |X^* - 1|\, e^{ky^*} \qquad (2.14)$$

Картина линий электрического тока, вычисленная по формуле (2.14) для $\lambda = 4$, $k = 0.2$ и $y_0 / L = 0.3$, показана на фиг. 2. Из формулы (2.13) и фиг. 2 следует, что j_x при $x^* > 1$ положительно, а при $x^* < 1$ отрицательно. Так как $x^* = \lambda x / L$, то при $\lambda > 1$ сечение, где j_x меняет знак, лежит внутри канала. Это связано с тем, что вначале $v = 0$ и, как видно из (2.12), $j_x < 0$. При больших λ (т. е. в случае сильных магнитных полей) скорость вдоль оси u быстро достигает значений, близких к $\max u$. При этом $E - uH/c$ становится малой величиной, меньшей vH/c. Из формулы (2.12) видно, что при этом будет $j_x > 0$. Изменение направления проекции электрического тока на ось x приводит к изменению направления силы, действующей вдоль оси y. Поэтому, начиная с сечения $x^* = 1$, проекция v скорости на ось y будет убывать. При $\lambda < 1$ всюду в канале $x^* < 1$. Поэтому при $\lambda < 1$ скорость v монотонно возрастает вдоль всего канала.

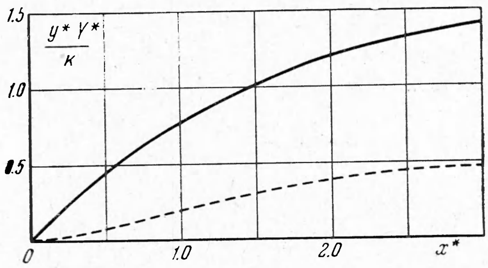
Дифференциальное уравнение линий тока в ядре потока с точностью до членов порядка k имеет вид

$$dy^* / dx^* = v / u = kUx^* \, [(1 + U) \, e^{x^*} - U]^{-1}$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$y^* = Y^* + kU \int_0^{x^*} \frac{x^*}{(1+U)\, e^{x^*} - U} \, dx^* \qquad (2.15)$$

где Y^* — значение y^* в начальном сечении для рассматриваемой линии тока. Из (2.15) следует, что в первом приближении линии тока могут быть получены одна из другой сдвигом по оси y.



Фиг. 3

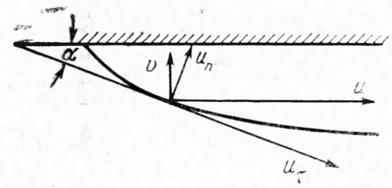
На фиг. 3 показан вид линий тока в ядре потока, вычисленный по формуле (2.15). Сплошная кривая дает форму линий тока для очень больших значений U (это соответствует малым значениям u_{00} по сравнению с максимальной скоростью). Пунктирной кривой показана линия тока при $U = 1$.

3. Перейдем к рассмотрению течения за скачком уплотнения, образующимся у верхней стенки канала. Так как течение в ядре потока известно, то задача о течении вблизи верхней стенки канала в рассматриваемом случае аналогична задаче об обтекании тела потоком с большой сверхзвуковой скоростью и может быть решена методами, применяемыми в этом случае [4].

Два обстоятельства позволяют значительно упростить решение рассматриваемой задачи. Прежде всего, оценивая величину v — проекции скорости за скачком на ось y, получаем

$$v / u \sim (y_0 - y^1) / L \sim ky_0 / L \qquad (3.1)$$

Здесь y^1 — координата скачка уплотнения. Так как величина отношения $y_0 / L \sim 0.1 \div 0.3$, т. е. порядка k, то из (3.1) следует, что за скачком $v/u \sim k^2$ и с принятой степенью точности можно полагать за скачком $v \approx 0$.



Фиг. 4

Во-вторых, как указывалось выше, в ядре потока RT/v^2 может быть порядка $0.025 \div 0.1$. Поэтому ниже рассмотрим подробно тот случай, когда проекция скорости на нормаль к скачку уплотнения u_n будет много больше скорости звука. При этом можно приближенно полагать [4]

$$\rho^1 / \rho^\circ = (\varkappa + 1) / (\varkappa - 1), \qquad u_n^1 / u_n^\circ = (\varkappa - 1) / (\varkappa + 1) \qquad (3.2)$$

Здесь $\varkappa$ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме, ρ^1 — плотность за скачком, ρ° — в ядре потока перед скачком, u_n^1 — проекция скорости на нормаль за скачком и u_n° — перед скачком. Если газ полностью ионизирован, то можно считать, что при переходе через скачок $\varkappa$ не меняется.

Обозначим через u_τ° проекцию на касательную к скачку уплотнения скорости в ядре потока, u_τ^1 — скорости за скачком, α — угол наклона скачка к верхней стенке канала (фиг. 4). Тогда справедливы равенства

$$u^1 = u_\tau^1 \cos\alpha + u_n^1 \sin\alpha, \qquad v^1 = -u_\tau^1 \sin\alpha + u_n^1 \cos\alpha \qquad (3.3)$$

$$u_\tau = u\cos\alpha - v\sin\alpha, \qquad u_n = u\sin\alpha + v\cos\alpha \qquad (3.4)$$

Так как в нашем случае $v^1 = 0$, то из второго равенства (3.3) следует

$$\operatorname{tg}\alpha = u_n^1 / u_\tau^1 = u_n^1 / u_\tau^\circ = [(\varkappa - 1) / (\varkappa + 1)]\, u_n^\circ / u_\tau^\circ \qquad (3.5)$$

Здесь использовано соотношение (3.2) и то обстоятельство, что касательная составляющая скорости при переходе через скачок не меняет своего значения, т. е. $u_\tau^1 = u_\tau^\circ$. Подставляя в (3.5) выражения u_n° и u_τ° из (3.4), получим уравнение для определения $\operatorname{tg}\alpha$

$$v^\circ \operatorname{tg}^2\alpha - 2\,(u^\circ \operatorname{tg}\alpha) / (\varkappa + 1) + (\varkappa - 1)\, v^\circ / (\varkappa + 1) = 0$$

где v° и u° — проекции скорости перед скачком на оси y и x. Отсюда

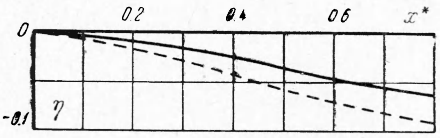
$$\operatorname{tg}\alpha = u^\circ / v^\circ (\varkappa + 1) \pm [u^{\circ 2} / v^{\circ 2} (\varkappa + 1)^2 - (\varkappa - 1) / (\varkappa + 1)]^{1/2} \qquad (3.6)$$

Так как $u^\circ / v^\circ \sim 1/k$ — очень большая величина, то знаку плюс должен был бы соответствовать почти прямой скачок уплотнения, расположенный почти перпендикулярно к верхней стенке канала. Это не имеет физического смысла при рассмотрении задачи об ускорении плазмы сильными электромагнитными полями. Поэтому в равенстве (3.6) следует брать знак минус. Ограничиваясь членами порядка k, из (3.6) и (3.4) найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = (\varkappa - 1)\, v^\circ / 2u^\circ, \qquad u^1 = u_\tau^1 = u_\tau^\circ = u^\circ \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.2) и (3.7) позволяют определить параметры плазмы за скачком уплотнения по известным значениям параметров перед скачком, а также угол наклона скачка. Линии тока за скачком с принятой степенью точности — прямые, параллельные стенке канала (так как $v^1 = 0$). Поэтому уравнения неразрывности и движения за скачком принимают вид

$$(\rho u)_x' = 0, \qquad \rho u u_x' = H j_y / c \qquad (3.8)$$



Фиг. 5

Интегрируя первое уравнение и учитывая (3.2) и (3.7), получаем

$$\rho u = \rho^1 u^1 = [(\varkappa + 1) / (\varkappa - 1)]\, \rho^\circ u^\circ$$

В этом равенстве ρ° и u° — значения плотности и скорости в ядре потока перед скачком в том месте, где рассматриваемая линия тока пересекает скачок уплотнения. Разлагая ρ° и u° в ряд по степеням k и учитывая равенства (2.5) и (2.7), получим с точностью до членов порядка k^2

$$\rho^\circ u^\circ = \rho_{00} u_{00}, \qquad \rho u = [(\varkappa + 1) / (\varkappa - 1)]\, \rho_{00} u_{00} \qquad (3.9)$$

Заметим теперь, что во втором уравнении (3.8) ток j_y с точностью до членов порядка k^2 является известной величиной, вычисляемой по параметрам течения в ядре потока. Действительно, из уравнения непрерывности электрического тока имеем для j_y за скачком

$$j_y = j_y^1 - \int_{y^1}^{y} \frac{\partial j_x}{\partial x}\, dy \qquad (3.10)$$

где j_y^1 — значение j_y при $y = y^1$.

Но из (1.1) следует, что $\partial j_x / \partial x$ имеет порядок k, а так как интервал интегрирования за скачком также порядка k, то интеграл в правой части (3.10) будет порядка k^2, и с принятой степенью точности можно считать $j_y = j_y^1$. Учитывая это, а также (3.9), найдем, интегрируя второе уравнение (3.8), скорость потока в зоне течения за скачком уплотнения

$$u = u^1 + \frac{\varkappa - 1}{(\varkappa + 1)\, c \rho_{00} u_{00}} \int_{x^1}^{x} H j_y\, dx \qquad (3.11)$$

Формулы (3.7), (3.9), (3.11) дают распределение параметров течения за скачком и угол наклона скачка при произвольной зависимости напряженности магнитного поля H и разности потенциалов φ от x. В том случае, когда H и φ постоянны, из первого уравнения (3.7) легко получаем форму скачка уплотнения, так как $dy^1 / dx = -\operatorname{tg}\alpha$. Подставляя u° и v° из (2.11) в (3.7), отбрасывая члены порядка k^2 и интегрируя по x, получаем

$$y^{1*} = y^{0*} - k\frac{\varkappa - 1}{2} U \int\limits_0^{x^*} \frac{x^* dx^*}{(1+U)e^{x^*} - U}, \qquad x^* = \frac{\lambda x}{L}, \quad y^* = \frac{\lambda y}{L} \tag{3.12}$$

Форма скачка, вычисленная по (3.12), показана на фиг. 5, где

$$\eta = \frac{2}{(\varkappa - 1)k}(y^{1*} - y_0^*)$$

Сплошная кривая для $U = 3$, пунктирная для $U = 8$.

Подставляя в (1.2) значения E и u из (2.11) и отбрасывая члены порядка k^2, найдем для плотности тока j_y за скачком уплотнения

$$j_y = (\sigma H u_{00} / c)\, U e^{-x^*}[1 - 0.5\, k y^* (2 - x^*)]$$

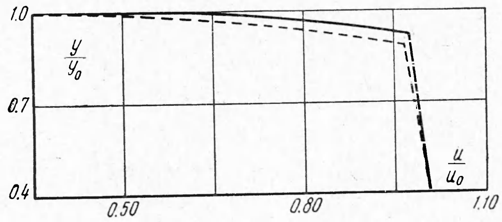
Используя это выражение j_y, теперь из (3.11) определим скорость

$$u(x^*, y^*)/u_{00} = 1 + U(1 - e^{-x^*}) - [2/(\varkappa+1)]\, U\, [e^{-x^{1*}(y)} - e^{-x^*}] + 0.5 kU \times$$
$$\times y^* \{-1 + (1 - x^*)e^{-x^*} - [2/(\varkappa+1)]\,[(1 - x^*)e^{-x^*} + (1 - x^{1*})e^{-x^{1*}(y)}]\}$$

где $x^{1*}(y)$ — то значение x, при котором линия тока $y = \mathrm{const}$ пересекает скачок уплотнения. Это значение $x^*(y)$ вычисляется по формуле (3.12). При помощи (2.11) можно преобразовать формулу для скорости за скачком к виду

$$u(x, y) = u[x, y^1(x)] - [2/(\varkappa+1)]\{u[x, y^1(x)] - u[x^1(y), y]\} \tag{3.13}$$

Отсюда скорость на какой-либо линии тока за скачком меньше скорости в ядре потока перед скачком на разность между скоростями в ядре потока перед скачком в рассматриваемом сечении канала и сечении, где линия тока пересекла скачок уплотнения, умноженную на $2/(\varkappa + 1)$.



Фиг. 6

На фиг. 6 показан профиль проекции u скорости на ось x, вычисленный для ядра потока по формуле (2.11) и за скачком уплотнения по формуле (3.13). Кривые соответствуют значениям параметров $x^* = 1$, $k = 0.2$, $y_0^* = 0.3$, $\varkappa = {}^5/_3$, $U = 3$ (сплошная линия) и $U = 8$ (пунктирная линия). По оси абсцисс отложено отношение скорости u в данной точке к скорости u_0 на оси канала, по оси ординат отношение координаты y к ширине канала y_0. Точка излома кривых соответствует координате скачка уплотнения в рассматриваемом сечении канала ($x^* = 1$).

Поступила 30 IX 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 7.
2. Oates J. C. Hall Current and Inlet Disturbances in Constant Area Chanell Flows. AJAA Journal, 1963, No. 12.
3. Куликовский Л. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.
4. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959